付録１　前線形成関数の導出と解説*

・前線形成関数の各項の計算式について

式(2.2.2)の前線形成関数の各項の計算式を以下に導出する。

$$
\mathrm{F} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left|\nabla_p \theta\right| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2}
$$

$$
= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right\}
$$

$$
= \left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)
$$

$$
= \left|\nabla_p\theta\right|^{-1}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] + \frac{\partial\theta}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\right\}
$$

$$
= \left|\nabla_p\theta\right|^{-1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial y} + u\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + u\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} + v\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right.
$$

$$
\left. + \omega\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \omega\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)
$$

ここで、 $\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} - u\frac{\partial\theta}{\partial x} - v\frac{\partial\theta}{\partial y} - \omega\frac{\partial\theta}{\partial p}$ **を使う。**

$$
\mathrm{F} = \left|\nabla_p\theta\right|^{-1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\theta}{dt} - u\frac{\partial\theta}{\partial x} - v\frac{\partial\theta}{\partial y} - \omega\frac{\partial\theta}{\partial p}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\theta}{dt} - u\frac{\partial\theta}{\partial x} - v\frac{\partial\theta}{\partial y} - \omega\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)\right.
$$

$$
+ u\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + u\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} + v\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \omega\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial x}
$$

$$
\left. + \omega\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]
$$

$$
= \left|\nabla_p\theta\right|^{-1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\frac{d\theta}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right.
$$

$$
\left. - \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right]
$$

$$
= \left|\nabla_p\theta\right|^{-1}\left\{\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] - \left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right.
$$

$$
\left. - \left[\frac{\partial\theta}{\partial p}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\right]\right\}
$$

各項について、次の通り Fc（合流項）、Fs（シアー項）、Ft（立ち上がり項）、Fd（非断熱項）を定義すると、F は式(2.2.2)のとおり、これらの和と等しくなる。

$$
Fc = -\left|\nabla_p\theta\right|^{-1}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right]
$$

---

*黒良　龍太（気象庁予報部予報課）

$$Fs = -\left|\nabla_p \theta\right|^{-1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$Ft = -\left|\nabla_p \theta\right|^{-1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial p}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\right]$$

$$Fd = \left|\nabla_p \theta\right|^{-1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \mathrm{F} = Fc + Fs + Ft + Fd \quad (2.2.2)$$

・Petterssen frontogenesis の計算式(2.2.3)の解説

$$F_H = F_C + F_S = \frac{1}{2}\left|\nabla_p \theta\right|(E \cos 2\beta + Conv) \qquad (2.2.3)$$

について説明する。

$$F_H = Fc + Fs = -\left|\nabla_p \theta\right|^{-1}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + \left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right\}$$

$$= -\left|\nabla_p \theta\right|^{-1} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + \left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left|\nabla_p \theta\right|\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left|\nabla_p \theta\right|^{-1} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\right\}$$

この第一項は収束に関する項、第二項は変形に関する項である。ここで、第二項を FHd とする。

$$F_{Hd} = -\frac{1}{2}\left|\nabla_p \theta\right|^{-1} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\right\}$$

式(2.2.3)への変形については、北畠(2005)を参照。なお、Conv と E は、次のとおりである。

$$Conv = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

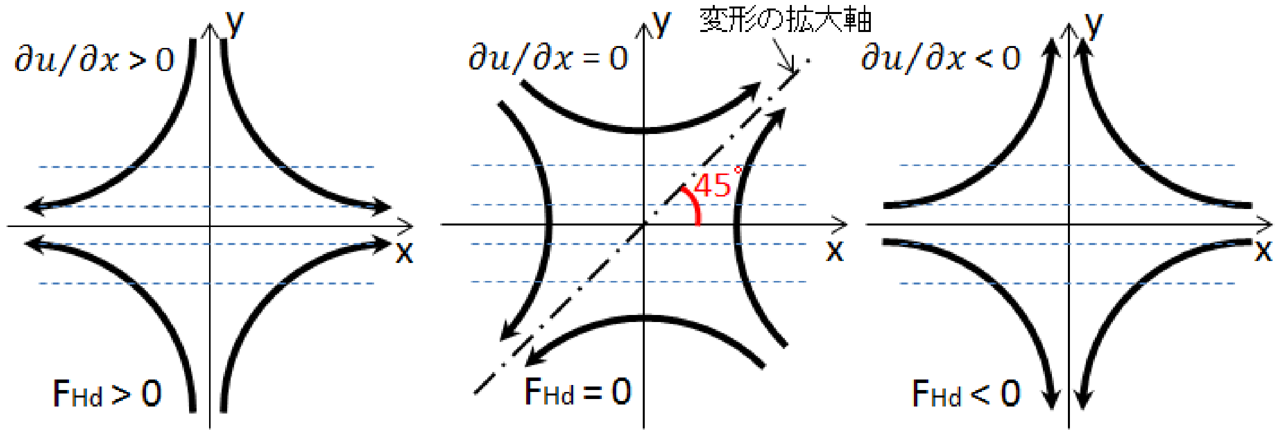
$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

ここでは Petterssen frontogenesis の合流変形に関する項について、直感的に理解できる解説を行う。合流変形場の効果を考察するため、収束発散が 0 となる点の近傍で合流変形となっている場合を考える。その点を中心に xy 平面を$\partial\theta/\partial x = 0$となるように回転すると、FHd は次のように変形できる。

$$F_{Hd} = \frac{1}{2}\left|\nabla_p \theta\right|^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = \left|\nabla_p \theta\right|\frac{\partial u}{\partial x}$$

この式から、FHd は、温位傾度と合流の強さの積であることがわかり、frontogenesis かどうかは$\partial u/\partial x$の符号が正かどうかで判別できる。付録第 1.1 図に$\partial u/\partial x$が最大（正）、0、最小（負）の合流変形の流れ、つ

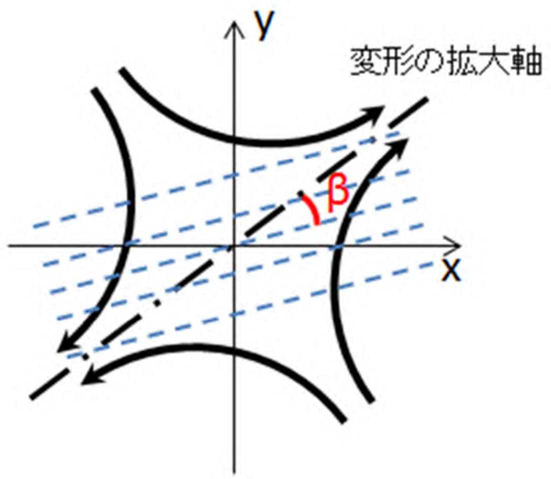
まり合流変形場における FHd の正（Frontogenesis)、0、負（Frontolysis）となる合流変形の場の模式図を示す。



付録第 1.1 図　Petterssen frontogenesis の合流変形の効果

点線は等温位線、矢印は流れ、破線は変形の拡大軸を示す。

このことから、合流変形による frontogenesis は、付録第 1.2 図の変形の拡大軸と等温位線のなす角（β）が 45 度より小さいかで判断できる。式(2.2.3)から FHd と cos2βは比例することから、βが 30°の場合はβ=0 の Frontogenesis の半分となる。Petterssen frontogenesis において、βが大きくなると合流変形の寄与は小さくなり、収束発散の効果が相対的に大きくなる。



付録第 1.2 図　合流変形による frontogenesis の模式図

点線は等温位線、矢印は流れ、破線は変形の拡大軸を示す。βが 0°以上 45°未満の場合に Frontogenesis となる。

参考文献

北畠尚子，2005：前線の考え方の過去と現在．気象研究時報,57，27-57.