付録１　渦位保存の導出

(1) Kelvin の循環定理と渦位の保存

ここでは、Kelvin の循環定理から断熱過程で摩擦なしのとき、渦位が保存することを示す。渦位の保存は、渦度方程式からの導出ができるが、本質的にはここで示すことと同じである。これらついては、二階堂(1986)や Lackmann(2011)4.3 項などが参考となる。

流体とともに動く任意の閉曲線 Cをとり、Cに沿う循環 $\Gamma=\int_C(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})$の時間変化は、

$$\frac{\mathrm{D}\,\Gamma}{\mathrm{Dt}}=\int_C\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{Dt}}\cdot d\boldsymbol{l}\right)+\int_C\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{D}d\boldsymbol{l}}{\mathrm{Dt}}\right)$$

となる。ここで、$\boldsymbol{v}$は慣性系の速度を示す。 ρを密度、p を気圧、g を重力加速度、F を摩擦力とすると運動方程式は、 $\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{Dt}}=-\boldsymbol{\nabla}\mathrm{p}-\rho\mathrm{g}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{F}$と書けるので、これを上式へ代入して、

$$\frac{\mathrm{D}\,\Gamma}{\mathrm{Dt}}=-\int_C\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)-[\mathrm{gz}]_C+\int_C\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)+[|\boldsymbol{v}|^2]_C\ .$$

$[\ ]_C$は、閉曲線 Cを一周したときの差を表すが、gz と $|\boldsymbol{v}|^2$は不連続に変化はしないのでゼロとなる。また、断熱であるとき、閉曲線 Cは等温位面上を動き、密度ρが圧力のみの関数となることから、圧力関数$\mathrm{A}=\int\frac{1}{\rho}dp$を導入して、$\nabla\mathrm{A}=\frac{1}{\rho}\nabla p$ とできるので、右辺第一項はゼロとわかる。摩擦がないとき、右辺第三項がゼロとなることは言うまでもない。以上から、断熱で摩擦がないとき、流体とともに動く任意の閉曲線 Cに沿う循環は保存することがわかる。これを Kelvin の循環定理という。ここでは地球大気の運動方程式から導いたが、一般的な Kelvin の循環定理の導出は、流体力学の教科書など参考にしていただきたい。

一方、ストークスの定理を用いると、

$$\Gamma=\int_C(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})=\iint_S\boldsymbol{\eta}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

断熱であるとき、閉曲線 Cは等温位面上を動くので、閉曲線 Cに囲まれた面Ｓを等温位面上に取ることができ、$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{\nabla}\theta}{|\boldsymbol{\nabla}\theta|}\mathrm{ds}$から、

$$\Gamma=\iint_S\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta}{|\boldsymbol{\nabla}\theta|}\mathrm{ds}$$

これを温位θで積分して、等温位面に垂直な座標 h を用いると、$\mathrm{dh}=\frac{\mathrm{d}\theta}{|\boldsymbol{\nabla}\theta|}$ となること、面Ｓは流体とともに動くので、質量保存から$\rho\,\mathrm{ds\,dh}$が一定であることを考慮すると、

$$\int\Gamma\mathrm{d}\theta=\int\iint_S\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta}{|\boldsymbol{\nabla}\theta|}\mathrm{ds\,d}\theta=\int\iint_S\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta\,\mathrm{ds\,dh}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\int\Gamma\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\int\iint_S\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta}{|\boldsymbol{\nabla}\theta|}\mathrm{ds\,d}\theta=\int\iint_S\left(\frac{\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}\theta}{\rho}\right)}{\mathbf{Dt}}\right)\rho\,\mathrm{ds\,dh}+\int\iint_S\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}\theta}{\rho}\right)\left(\frac{\mathbf{D}(\rho\,\mathrm{ds\,dh})}{\mathbf{Dt}}\right)$$

$$=\int\iint_S\left(\frac{\mathrm{D}(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta/\rho)}{\mathrm{Dt}}\right)\rho\,\mathrm{ds\,dh}$$

これが、任意の閉曲線Cに対してゼロとなるためには、$\rho\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dh} \neq 0$ なので、

$$\frac{\mathrm{D}(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta/\rho)}{\mathrm{Dt}} = \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{Dt}} = 0$$

であることがわかり、渦位の保存が導かれる。また、渦度については、

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{Dt} = \iint_S \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\eta}}{\mathrm{Dt}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \iint_S \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{s})}{Dt} = 0$$

から、流体とともに動く座標での絶対渦度 η の時間変化は、$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{s})}{Dt}$ の変化とわかる。これから絶対渦度 η が保存するのは、η に垂直な面の面積が流体の運動に伴って変化しないときである。これは断熱過程では、等温位面上で非発散であるときと言える。

(2) 非断熱過程と渦位の傾向方程式

静圧平衡を仮定するとき、温位座標系の渦度方程式から、渦位の傾向方程式

$$\frac{\mathrm{DP}}{Dt} = -\mathrm{g}\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\mathrm{p}}\zeta_{a\theta} + \mathrm{g}\frac{\partial\theta}{\partial\mathrm{p}}\boldsymbol{k}\cdot\left[\boldsymbol{\nabla}\dot{\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\theta}\right] + \mathrm{g}\frac{\partial\theta}{\partial\mathrm{p}}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})$$

が導かれる。右辺の各項は、鉛直方向の非断熱加熱の差による渦位の変化、鉛直シアーがあるときに水平方向の非断熱加熱の差により生じる渦位の変化、摩擦による渦位の変化を表す。なお、この渦位の傾向方程式の導出については、Lackmann(2011)4.3項などを参考いただき、ここでは省略する。

参考文献

Lackmann, G., 2011: Midlatitude synoptic meteorology:dynamics, analysis, and forecasting. Amer. Met. Soc., ISBN 978-1-878220-10-3, 345pp.

二階堂義信, 1986: Q-map(等温位面上で解析された渦位分布図)－その１ Q-mapの原理. 天気, 33, 289-300.