
報 告

CTD 観測に含まれる観測誤差について*

分木 恭朗 **・湊 信也 **・藤村 昌彦 ***・三浦 雄美利 ***
・有田 真 ****・中村 哲也 **・東 吉一 *****・北村 知之 *****

要 旨

西部北太平洋熱帯域において気象庁の海洋気象観測船凌風丸により、電気伝導度水温水深計（以下、CTD）を深さ 1500～2500dbar 間で上げと下げを繰り返して、約 12 時間にわたり 18 往復の観測を実施した。その結果、水温 $\pm 0.08^{\circ}\text{C}$ 、塩分 $\pm 0.005\text{psu}$ の周期約 12 時間の短期変動が観測され、海水の鉛直変位は $\pm 50\text{dbar}$ 程度と見積もることができた。この観測の標準偏差（以下、SD）は同点、同季節における SD の約 2 分の 1 に匹敵する大きさであった。

このような海洋内部波に起因すると思われる短期変動は海洋のいたるところに存在している。CTD やアルゴフロートなど精密測定が可能な測器による観測でも、データに付く観測誤差には、短期変動によるものも含まれ、観測データそのままでは、海洋内部の気候変動を論じる上での有意性はほとんどない。このため、短期変動による観測誤差をキャンセルする必要がある。今回の観測結果から、短期変動による観測誤差は、鉛直変位にして少なくとも $\pm 50\text{dbar}$ 程度と大きいことがわかった。例えば、数度おきに何点かモニタ一点を設定し繰り返し観測を入れることで、短期変動による観測誤差をキャンセルできると考える。

* An Observational Error Involved in CTD Profiles

** Yasuaki Bungi, Shinya Minato, Yumitoshi Miura, Tetsuya Nakamura

Marine Division, Global Environment and Marine Department（地球環境・海洋部海洋気象課）

*** Masahiko Fujimura

Administration Division, Maizuru Marine Observatory（舞鶴海洋気象台業務課）

**** Shin Arita

Memanbetsu Magnetic Observatory（地磁気観測所女満別出張所）

***** Yoshikazu Higashi, Tomoyuki Kitamura

Oceanographical Division, Kobe Marine Observatory（神戸海洋気象台海洋課）

1. はじめに

地球温暖化の実態の把握や影響の評価のために、長期変動の監視が重要になってきている。長期変動を的確に把握するためには観測データそれ自体とともに、誤差の正確な評価が必要である。しかしながら、これまで観測データに付加すべき誤差の実態を観測によって論じたものはない。

海洋観測において1つの観測値 A には、測定誤差 $\pm\Delta A$ が付く。この誤差 ΔA は、例えば電気伝導度水温水深計（以下、CTD）による水温観測のように単一の測器で測定値が得られる場合、測器メーカーが公表しているスペック誤差（「精度」とも呼ばれている）であり、時にはセンサードリフトであったりする。精密測定が可能な測器の測定誤差は通常非常に小さく、例えば水温の場合せいぜい 0.001°C 程度である。ところで、この観測値 A を使って何らかの解析をするとき、解析者は観測値 A にどのくらい時間的かつ空間的な範囲を代表させているのかを明示しなければならない。しかし全体の場を詳細に把握しない限り、これに答えることは非常に難しい。

観測船による海洋観測は多くの場合、測線に沿って移動しながら間隔を置いて行われ（断面観測）、ブイやフロートによる自動観測では、地図上の固定点又は流れに流されながら一定の時間間隔を置いて行われる（時系列観測）。いずれの場合も、得られた一連の観測値の集合を単に観測データと呼ぶことにする。観測データはそれを特徴付ける空間又は時間分解能を持つ。一方、解析自体もその目的や使えるデータ個数により独自の時空間分解能を設定する。以下では簡単のため、解析とそれが使う観測データの分解能は等しいとし、単に分解能と呼ぶことにする。この分解能という言葉を使って言い換えれば、観測値の時空間代表性とは、（観測又は解析によって）与えられた分解能の中で観測値 A がどの程度の代表性を持っているかということである。代表性は、観測値 A と与えられた分解能以下（以下、サブグリッドスケールと呼ぶ）のスケールを持つ自然変動の大きさ（ δA ）の比 $\delta A/A$ で定量化できる。例

* SD には季節変動などの、その時系列解析で得られる本来の変動分も、サブグリッドスケールの変動分も含まれている。

例えば、 δA が A の有効数字 1 桁目と同程度の大きさであれば、観測値 A の代表性は小さいといえる。このサブグリッドスケールの変動の大きさ δA を観測誤差と呼ぶことにする。観測誤差はその時空間位置の関数であるだけでなく、当然、分解能の大きさにも依存する。

例えば、気象庁の観測定線である東経 137 度線で見ると、観測はおよそ 3 か月間隔で年 4 回である。ある点において、その点の定線観測データをすべて使って時系列解析をしようとしても、その時間分解能は 3 か月であるから、6 か月以下の周期の変動が観測誤差になる。この周期 6 か月以下の変動による観測誤差は未知の量であり、より時間分解能が小さい観測データ（アルゴデータ等）から求めなければならないものであるが、全データの標準偏差（以下、SD*）がその大きさの目安になる。また、約 6 か月間隔で年 2 回の観測である東経 165 度線の観測データを用いて時系列解析を行う場合、観測誤差には 1 年周期の変動すなわち季節変動の大きさも加わり、時間分解能とともに解析誤差も大きくなる。年に 4 回の観測で長期変動を解析するには、6 か月程度までの変動による観測誤差を明示しておく必要がある。

この観測誤差を定量化する第一歩として、ここでは CTD で計測できる圧力、水温及び塩分の 3 つの量に関して数時間～十数時間の自然変動に焦点を当て、その大きさを観測し、解析を行った。

2006 年 8 月に東経 137 度、黒潮の南（北緯 32 度）における凌風丸の観測で、約 1500 ~ 2500m を往復 12 回、繰り返し上げ下げし 24 プロファイルを観測することができた。このとき水温 0.05°C 、塩分 0.006psu の周期約 11 時間の海洋内部波とみられる短周期の変動を得た。現在の測器で観測するようになった 2001 年以降の同点、同季節での全データの SD と比較すると、この短期変動は SD の約 3 分の 1 に相当するものであった。これは、水温分解能より 1 桁大きく、CTD やアルゴフロートデータの観測結果には常にこの程度の誤差が含まれていることを意味している。

このような短期変動は外洋のどこにでも、い

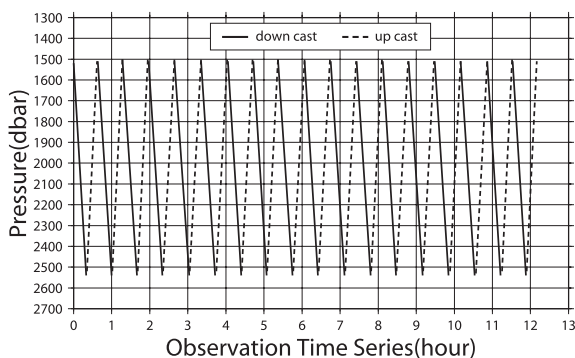
つでも存在している可能性がある。このことを確認するため、2007年7月に北赤道海流域の北緯13度、東経137度において、2006年8月と同様の繰り返し観測を行った。また、2007年11月19～22日に北緯30度、東経137度において神戸海洋気象台啓風丸でも繰り返し観測を実施しており、これらの観測結果についても合わせて報告する。

2. 解析に使ったデータ

2.1 繰り返し観測で得られたデータ

凌風丸の観測では、2007年7月29日、北緯13度、東経137度、水深約4900mにおいてCTDを深さ1500～2500dbarの間で往復18回上げ下げした。第1図に繰り返し観測でのCTDの軌跡を時間-深度グラフで示す。

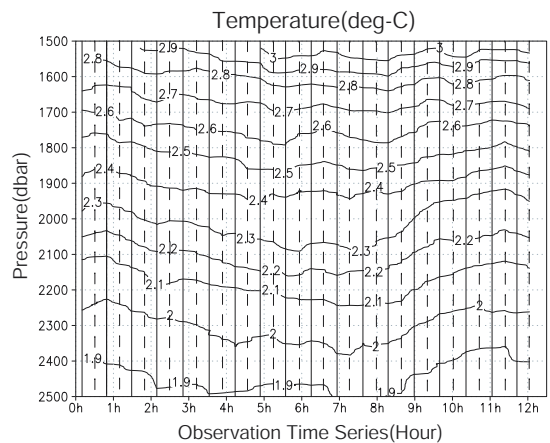
1500～2500dbar間の上げと下げにかかる時間は各々ほぼ20分間で、連続観測にかかった総観測時間は約12時間、観測深度の中心である2000dbarを通過する時間間隔はほぼ一定だった。上昇時と下降時のデータ比較のため、CTD上昇時のデータに破線、下降時のデータに実線を引いた水温の時間鉛直断面図を第2図に示す。上昇時と下降時それぞれのプロファイルに共通する特徴的な違いはないことがわかる。このため、本報告では、上昇時と下降時のデータを区別することなく全36プロファイルを同等なものとして扱った。



第1図 2007年7月29日、北緯13度、東経137度での、凌風丸による12時間にわたる1500～2500dbar間の繰り返し観測の概要

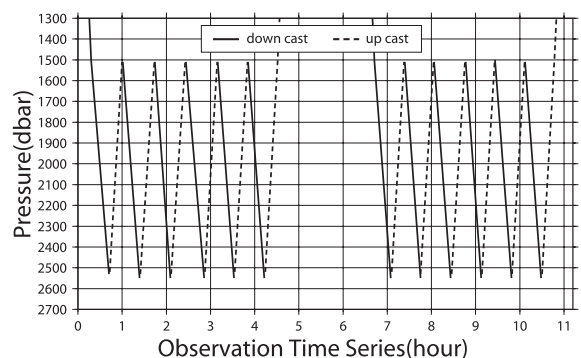
CTDの軌跡を時刻-深度グラフで示している。実線はCTD下降時、破線はCTD上昇時の軌跡である。

また、同じく凌風丸により2006年8月25日、北緯32度、東経137度、水深約4200mで、深さ1500～2500dbarの間で往復12回観測の観測を行い、合計24プロファイルのデータを得た。第3図にこの観測におけるCTDの軌跡を示す。この観測は、深さ1500～2500dbar間で12プロファイル(6往復)のデータを得たあと、いったん船上に揚収、約3時間後に再び投入し深さ1500～2500dbar間で6往復の観測を行っている。この観測においてもCTDの上昇時と下降時に共通する特徴的な違いはなかったため、全24プロファイルを同等なものとして扱った。



第2図 1500～2500dbar間の水温の12時間にわたる時間鉛直断面図(単位:℃)

直線でCTD下降時、点線でCTD上昇時の水温プロファイルを示している。上昇時と下降時のプロファイルに特徴的な差はない。



第3図 2006年8月25日、北緯32度、東経137度での、凌風丸による11時間にわたる1500～2500dbar間の繰り返し観測の概要

CTDの軌跡を時刻-深度グラフで示している。実線はCTD下降時、破線はCTD上昇時の軌跡である。

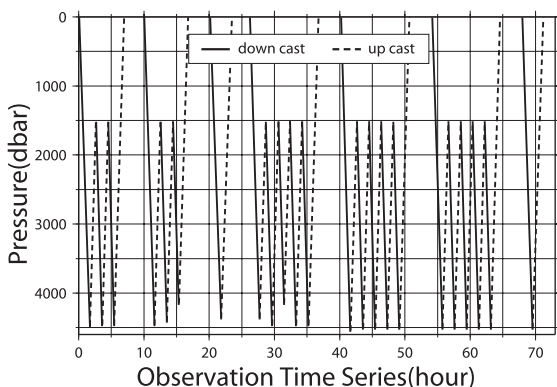
啓風丸では、2007年11月19～22日にかけて北緯30度、東経137度、水深約4600mにおいて、1500dbarから海底近くまで往復23回観測を行い、合計46プロファイルのデータを得た。第4図にこの観測におけるCTDの軌跡を示す。啓風丸の観測では、CTDを何度か上げ下げを繰り返した後、いったん船上に揚収し、しばらく時間をあけて再びCTDを投入し上下させる観測を行っており、凌風丸の観測とは深さや往復の時間間隔が一定でないという違いがある。また、啓風丸の観測でもCTDの上昇時と下降時に共通する特徴的な違いは認められなかったため、全プロファイルを同等のデータとして扱った。

ここで、本報告での平均値 (\bar{A}) とは、等圧面における各観測要素 (A) を、全プロファイルについて平均した値のことである。また、偏差 (A') とは等圧面上の各要素の観測値と平均値との差であり、全プロファイル数を N 、各プロファイル番号を i とおくと平均値と偏差は次式で表される。

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \quad (1)$$

$$A'_i = A_i - \bar{A} \quad (2)$$

凌風丸の観測では、2007年7月がN=36、2006年



第4図 2007年11月19～22日、北緯30度、東経137度での、啓風丸による72時間にわたる繰り返し観測の概要

CTDの軌跡を時刻-深度グラフで示している。実線がCTD下降時、破線がCTD上昇時を示している。

8月はN=24、啓風丸の観測ではN=46である。

また、凌風丸での観測がおよそ1500～2500mの往復、啓風丸の観測は海面から海底の4500m付近までであるため、ポテンシャル水温、ポテンシャル密度のリファレンス深度は2000dbarとしている。

また、凌風丸と啓風丸のCTDの各センサーの分解能は水温0.0002℃、塩分0.0007psuである。

2.2 気候値データ

今回の調査で用いた過去の観測とは、1dbarごとの各層観測データが存在する1990年以降のデータを用いている。現在のSea-Bird社製のCTDを用いて観測を開始したのは、凌風丸では2003年春季、啓風丸では2001年春季以降である。1990年からの観測データのSDと2001年以降の、Sea-Bird社製のCTDによる観測データのSDを比較すると、比較的変動が小さく、気象庁の定期観測の最深層であり、またアルゴデータの最深層でもある2000dbarにおいて水温では0.001℃、塩分では0.001psu程度の差が見られた。水温のSDの差は全体のSDと比較すると十分小さい。また、塩分のSDは全体の1～2割に相当する差があったが、塩分は塩分検定の手法などでも値が変わるため、観測測器の違いによる差とはいえない。よって今回の調査で用いた気候値データセットとは、1990年からの全CTD観測データを指している。なお、過去の観測は深さ2000dbarまでのものが多く、SDは海面から2000dbarまでしか求めていない。

3. 観測・解析結果

3.1 観測結果

凌風丸の繰り返し観測における、水温、塩分、ポテンシャル水温、現場密度及びポテンシャル密度の平均場のプロファイルを第5図に示す。

1500～2500dbarでの各要素の平均勾配は、

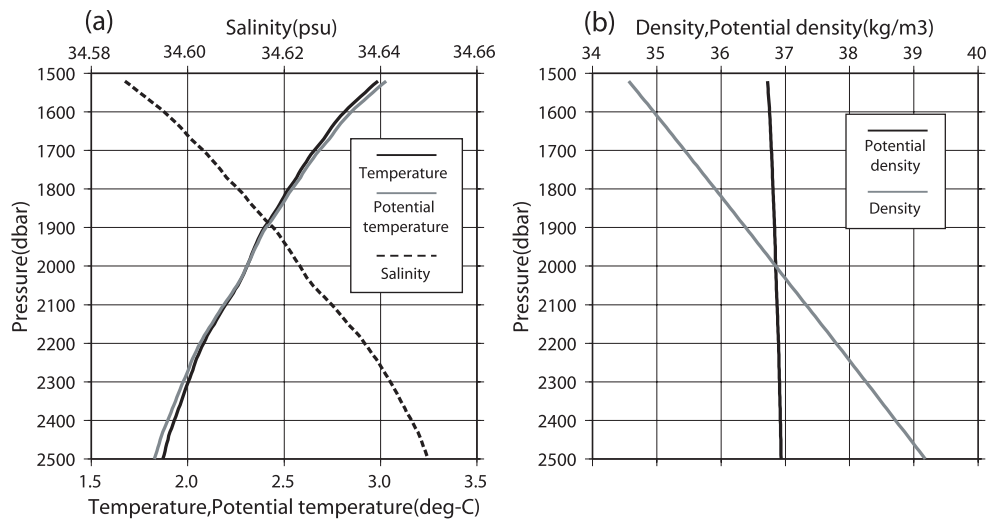
水温	ポテンシャル水温	-0.011 °C / dbar
塩分		+0.000064 psu / dbar
現場密度		+0.0047 kg / (m ³ · dbar)
ポテンシャル密度		+0.00022 kg / (m ³ · dbar)

であった。

次に、水温偏差と塩分偏差の時間鉛直断面図(第6図)と、見やすくするため36プロファイルのうち3プロファイルおきに9プロファイルを選択して水温偏差と塩分偏差の鉛直プロファイル(第7図)を示す。水温偏差の時間鉛直断面図(第6図(a))を見ると、観測開始時と約12時間後に大きな負偏差、観測開始から約6時間後は大きな正偏差になっている。塩分偏差の時間鉛直断面図(第6図(b))も正負逆だがほぼ同じ変動をしている。また、深度ごとに見ると、2000~

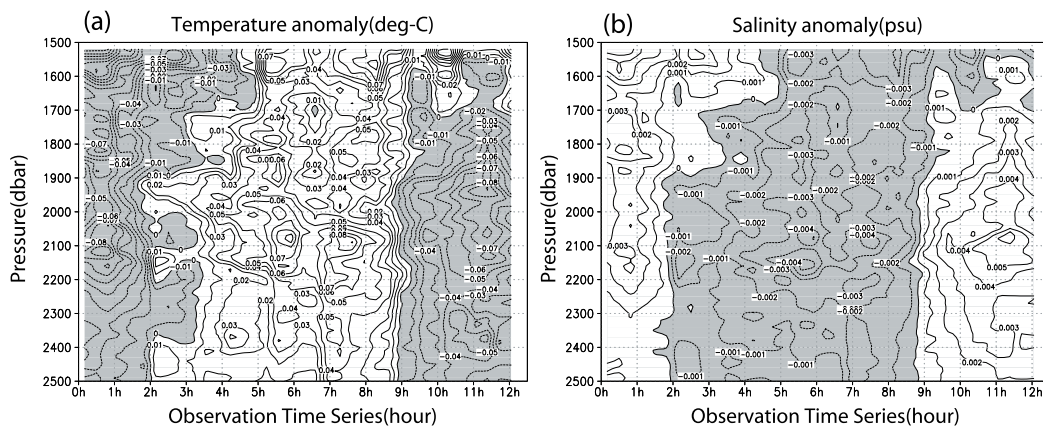
2200dbar 付近での変動量が最も大きく、水温は +0.08 ~ -0.08℃, 塩分は +0.005 ~ -0.004psu の変動が見られた。これらの図では位相が上下方向に伝播しているようには見えない。第7図を見ると、水温偏差、塩分偏差ともに2000~2200dbar で偏差の分布範囲が大きく、1700dbar 付近と2500dbar 付近では変動量は比較的小さい。

繰り返し観測で観測された各深度での変動の大きさを見るため、凌風丸の繰り返し観測で得られた全36プロファイルのSDと同点、同季節の



第5図 凌風丸で観測した各要素の平均場のプロファイル

平均場とは全36プロファイルの各圧力における平均値である。(a)の横軸下:水温(黒実線),ポテンシャル水温(灰実線)(単位:℃),横軸上:塩分(破線)(単位:psu),(b)ポテンシャル密度(黒実線),現場密度(灰実線)(単位:kg/m³)

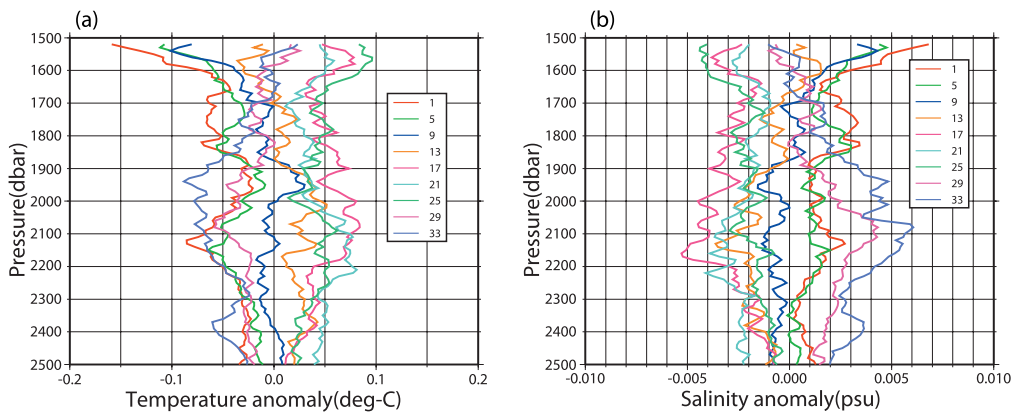


第6図 凌風丸で観測した全プロファイルの平均値からの偏差の時間鉛直断面図,(a)水温偏差(単位:℃),(b)塩分偏差(単位:psu)

水温偏差は0.01℃,塩分負偏差には0.001おきに等値線を引き、負偏差に陰影をつけている。水温(塩分)偏差は、観測開始と約12時間後に大きな負(正)偏差となっている。

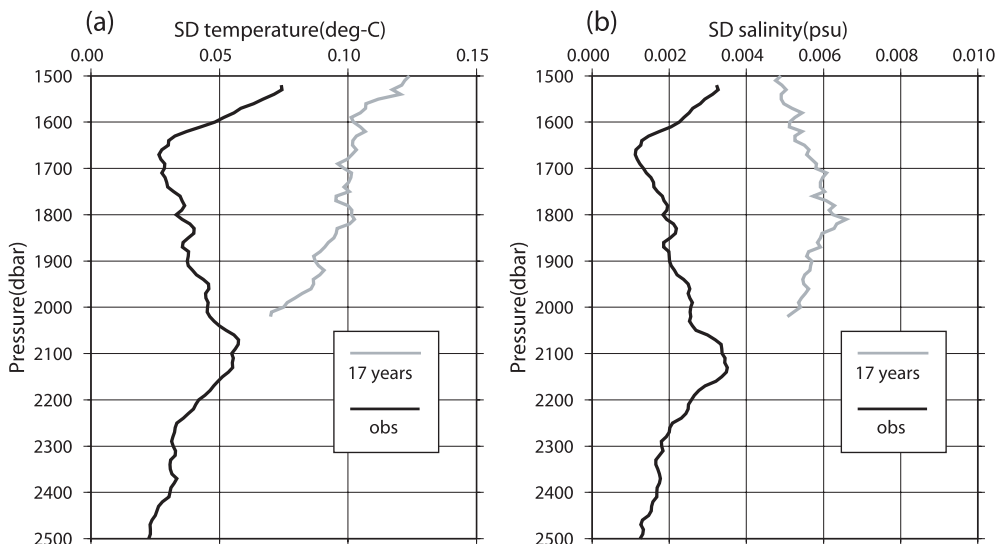
気象庁における CTD 観測の気候値 SD (1990 - 2007 年の 17 回, 2002 年は観測していない) について鉛直分布を見た (第 8 図). 凌風丸の繰り返し観測の SD は気候値 SD の 3 分の 1 から 2 分の 1 に相当する大きさであった. 気候値で比較の変動が小さい 2000dbar の SD を見ると, 水温の SD は繰り返し観測 0.045°C, 気候値 0.074°C, 塩分の SD は繰り返し観測 0.0026psu, 気候値 0.0046psu

であった. 気候値 SD が繰り返し観測の SD の 2 ~ 3 倍あるということは, 周期 12 時間以上の変動も短期変動と同程度の大きさであることを示唆している. 定期観測の CTD データやアルゴフロートデータ等から長期変動を論じる場合, 数時間から 1 日程度の時間規模の短期変動による観測誤差は無視できない大きさであることがわかる.



第 7 図 (a) 凌風丸で観測した全プロファイルの平均値からの偏差の鉛直プロファイル, (a) 水温偏差 (単位: °C), (b) 塩分偏差 (単位: psu)

36 プロファイルのうち, 3 プロファイルおきに 9 プロファイルを選択し, プロファイル番号ごとに色分けしている. 水温偏差, 塩分偏差とも 1700dbar, 2500dbar 付近で偏差の分布範囲が小さく, 2100dbar 付近で大きくなっている.



第 8 図 凌風丸での繰り返し観測と同点・同季節の CTD 観測 (17 回) の標準偏差 (SD) の比較, (a) 水温 (単位: °C), (b) 塩分 (単位: psu)

繰り返し観測の SD (黒実線) は, 過去の SD (灰実線) の 3 分の 1 から 2 分の 1 に相当する.

3.2 解析結果

3.2.1 周期の推定

繰り返し観測で観測された短期変動は、海洋内部波に起因していると考えられる (3.2.2 節)。ブラントバイサラ振動数 (N) は、

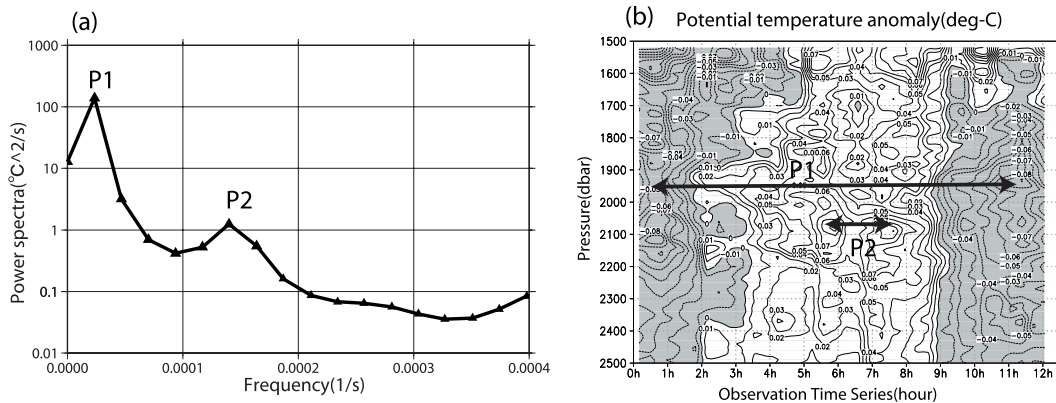
$$N = g \sqrt{\frac{\partial \sigma}{\partial p} - \frac{1}{C_s^2}} \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 g , σ , p , C_s はそれぞれ重力加速度、現場密度、圧力、音速である。2000dbar の観測値をそれぞれ代入すると、ブラントバイサラ振動数は 0.00127 (rad/s) となった。浮力周期 $2\pi/N$ は約 1.3 時間、慣性周期は約 53 時間で、存在する海洋内部波の周期は 1.3 ~ 53 時間の範囲にある。次に、2000dbar のポテンシャル水温偏差時系列 (36 点) を用いて MEM 法によるスペクトル解析から周期を推定した。ただし、サンプリング時間間隔 (ΔT) は CTD が 2000dbar を通過した時間間隔の平均とし 1221 秒、ナイキスト周波数 ($1/2\Delta T$) は $0.00041(1/s)$ である。MEM 法により求めたスペクトル (第 9 図 (a)) を見ると、スペクトルの明りようなピークは 2 か所現れた。スペクトルの大きいピークを P1、小さいピークを P2 とすると、それぞれ周期は P1 は約 11.9 時間、P2 は約 2 時間、大きさを比較すると P1 は P2 の約 100 倍 (振幅では 10 倍) であった。ポテンシャル水温偏差の時間鉛直断面図 (第 9 図 (b)) で 2000dbar 深付近の変動の様子を見る

と 1500 ~ 2200dbar ではおおむね同様の変動をしていて、特に 2000 ~ 2200dbar では偏差の大きさも同程度である。観測開始時と約 11 時間後に見られる大きな負偏差 (変動の大きさは約 $0.15^\circ C$ 、図中の長い矢印) に P1 が、観測開始から約 6 ~ 8 時間後に見られる正偏差の変動 (変動の大きさは約 $0.02^\circ C$ 、図中の短い矢印) に P2 が、それぞれ対応していると考えられる。それぞれの周期はほぼ合っており、変動の大きさの比も同じオーダーであるため、P1、P2 は第 9 図 (b) の矢印に対応する変動だと考えられる。今回観測された短期変動の大部分は周期約 11 ~ 12 時間の変動によるものであることがわかる。また、Garrett & Munk によると海洋内部波の周波数スペクトルは周波数の -2 乗に比例するとされているが、今回の観測データは周波数分解能が粗く確認できなかった。

3.2.2 海水の鉛直運動

短期変動に伴い、海水は水平方向にも鉛直方向にも運動する。ここでは短期変動による偏差は運動の鉛直成分 (以下、上下運動と呼ぶ) によってもたらされるというモデル (鉛直 1 次元の移流モデル) を想定し、海水の上下運動を考える。まず、各要素 A での各観測時間の鉛直変位 η_A (dbar) を、偏差 A' と平均値 \bar{A} の圧力勾配 $\partial \bar{A} / \partial p$ を用いて、次式から推定した。



第 9 図 (a) 2000dbar でのポテンシャル水温偏差を用いて求めた MEM 法による周波数スペクトル (単位: $^\circ C^2/s$)、(b) ポテンシャル水温偏差の時間鉛直断面図 (単位: $^\circ C$)

(a) の 2 つのピーク (P1: 周期約 11.9 時間, P2: 周期約 2 時間) に対応する変動に時間鉛直断面図 (b) 中に矢印を付けている。(b) の負偏差に陰影をつけている。

$$\eta_A = \frac{A'}{\frac{\partial A'}{\partial p}} \quad (4)$$

水温や現場密度は断熱圧縮，膨張を考慮する必要があるので，熱膨張係数 β を用いて

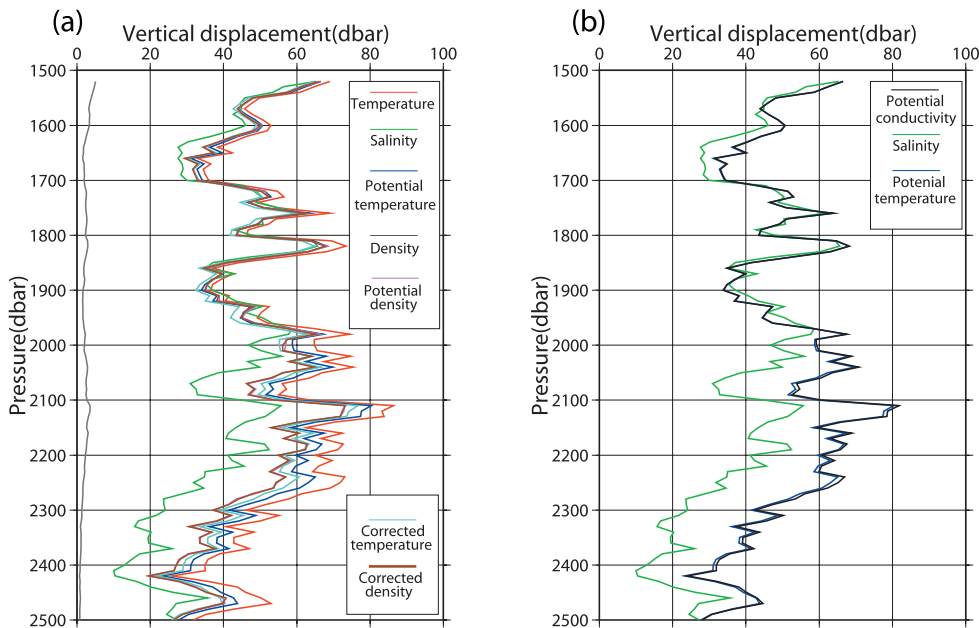
$$\eta_T = \frac{T'}{\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{g\beta T}{C_p}}, \quad \eta_\sigma = \frac{\sigma'}{\frac{\partial \sigma}{\partial p} - \frac{1}{C_s^2}} \quad (5)$$

(T : 水温(°C), β : 熱膨張係数(1/deg), C_p : 定圧比熱(J/(kg·K)),
 σ : 現場密度(kg/m³), C_s : 音速(m/s))

と表される補正式を用いた。例として比較的偏差が大きい第3プロファイルを選び，各要素を使って求めた鉛直変位のプロファイルを第10図に示す(この深度では海水の圧縮性が無視できないことを示すため第10図には水温と現場密度から，補正を行っていない(4)式で求めたもの(それぞれ赤と灰色の実線)も描いている)。第10図(a)を見ると，断熱圧縮補正を行わずに現場密度から計算した鉛直変位 ($\hat{\eta}_\sigma$, 灰色)を除き，鉛直変位はほぼ同じ値となっており，求めた上下運動が

実体のあるもののように見える。 $\hat{\eta}_\sigma$ がほかの要素に比べて1桁オーダーが小さいのは，先に述べた通り，この深度では海水の圧縮性が顕著な効果を及ぼしているからである。水温に対して補正効果は小さい(赤と薄青)。なお，ポテンシャル密度から求めた鉛直変位(紫)は，現場密度に補正を行った鉛直変位(茶色)とほぼ重なっている。

塩分から求めた鉛直変位 η_S (第10図(a)の緑)は2000dbar以深で，ほかの要素から求めたものより小さくなっている。塩分はCTDで計測された電気伝導度から UNESCO (1983) の式で計算されているが，その式では水温及び圧力も使っている。断熱的な変化を求めるには補正が必要であるが，ここではその代わりに電気伝導度に補正を加えたと考えられるポテンシャル電気伝導度 C_θ (付録1) を使って考察した。比較のため，第10図(b)にポテンシャル電気伝導度から求めた鉛直変位 η_{C_θ} と，塩分とポテンシャル水温から求めた鉛直変位のプロファイルを示す。ポテンシャル電気伝導度から求めた鉛直変位(黒)は，ポテ



第10図 各要素から求めた鉛直変位のプロファイル(単位:dbar)

(a)は，それぞれ(赤)水温，(緑)塩分，(青)ポテンシャル水温，(灰色)現場密度，(紫)ポテンシャル密度から(4)式を用いて求めた鉛直変位，(薄青)水温，(茶色)現場密度は補正式(5)を用いて求めた鉛直変位。現場密度の補正を行わずに求めた鉛直変位だけが1桁小さい。(b)は(黒)ポテンシャル電気伝導度，(緑)塩分，(青)ポテンシャル水温から(4)式を用いて求めた鉛直変位。ポテンシャル電気伝導度から求めた鉛直変位は，青ポテンシャル水温から求めた鉛直変位とほぼ一致している。

ンシャル水温から求めた鉛直変位（青）にほぼ合っている。塩分の断熱的な変化を計算する際の補正式を提案することは今後の課題である。

更に、観測された各要素の偏差が推定した鉛直変位からどの程度再現されているのかを調べるために、観測値 A から求めた鉛直変位 η_A を別の観測値 B の平均場 \bar{B} に適用し、偏差 B'' を推定した。例として第 10 図と同じ第 3 プロファイルを選択し、 A にポテンシャル水温を用いたときの、観測値と推定値の鉛直プロファイルを示す。塩分偏差（第 11 図 (a)）の推定値は $S'' = \eta_\theta \partial \bar{S} / \partial p$ 、現場密度偏差の推定値（第 11 図 (b)）は、音速 C_s による補正を加えて $\rho'' = \eta_\theta \left\{ \partial \bar{\rho} / \partial p - 1 / C_s^2 \right\}$ と推定している。塩分偏差の 2000dbar より浅い水深、現場密度偏差では全深度で観測値と推定値はよく合っている。また、塩分偏差を見ると深さ 2000dbar 以深で、推定値は観測値より約 25% 大きい。 A, B にほかの要素（補正していない現場密度）を用いた場合でも、推定値と観測値はよく合っていた（2000dbar 以深の塩分を除く）。このことから、観測された短期変動は、第 10 図のよ

うな海水の上下運動（鉛直 1 次元の移流モデル）で定量的に説明できることが確認できた。

3.2.3 海水のラグランジュ的な上下運動

海水の上下運動がわかったので、海水の鉛直断面内の軌跡を次のようにして、ラグランジュ的に追いかけてみた。これは推定鉛直変位の積分による誤差累積の程度を見るためである。ある時刻 t と Δt 後の海水の鉛直位置 P (dbar) の関係は、鉛直速度 w (dbar/s) を用いて

$$P(t + \Delta t) \approx P(t) + w_i \Delta t \quad (6)$$

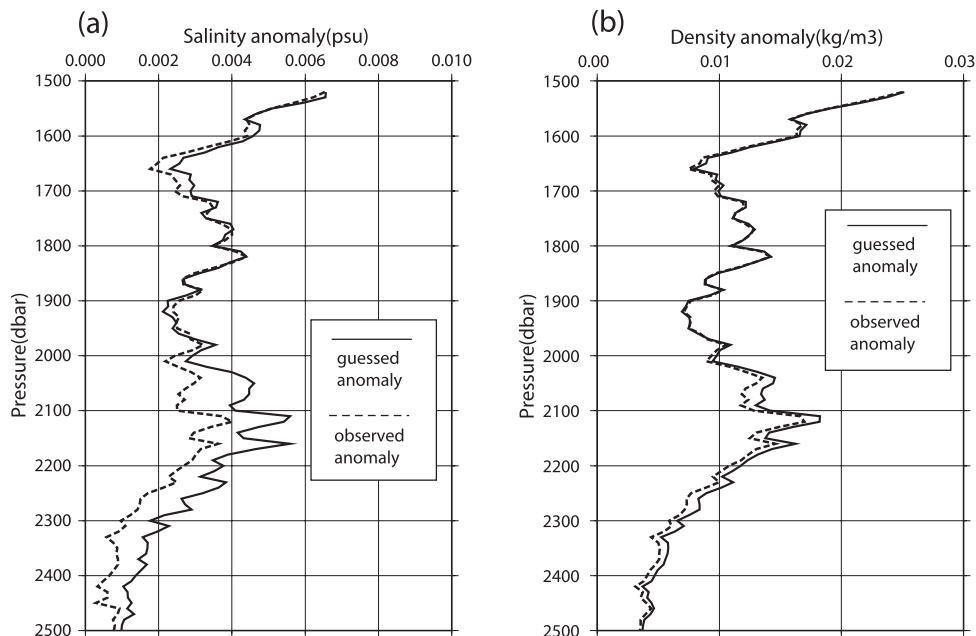
と表される。ここで、鉛直速度 w は鉛直変位 η (dbar) を用いて

$$w_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \quad (7)$$

であるため、時刻 t と Δt 後の鉛直位置 P は

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \left\{ \eta(t + \Delta t) - \eta(t) \right\} \quad (8)$$

となる。海水の軌跡を見るため、観測開始時 2000dbar にあった海水の位置をポテンシャル密度



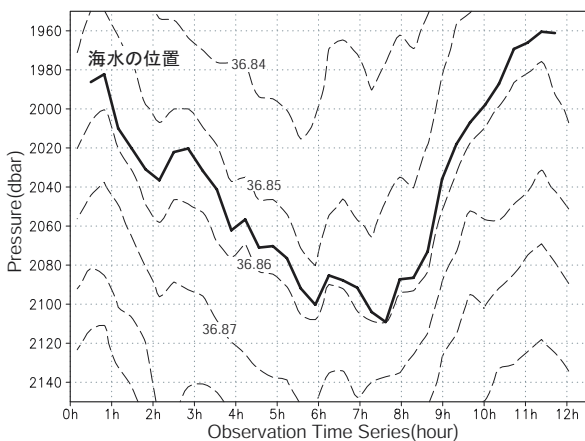
第 11 図 (a) 塩分偏差、(b) 補正を行った現場密度の偏差それぞれの推定値と観測値の鉛直プロファイル

塩分偏差の 2000dbar より浅い水深、また、補正を行った現場密度偏差では全深度で観測値と推定値はよくあっている。また、塩分偏差では深さ 2000dbar 以深で推定値が観測値より約 25% 大きい。

から求めた鉛直変位 η_{σ_0} を用いてラグランジュ的に追った軌跡を第 12 図に示す. 海水の軌跡はポテンシャル密度の等値線によく一致しており, 海水がポテンシャル密度の等値線に沿った運動をしていることがわかる. また, 海水が再び 2000dbar に戻ってくる時間は 10 ~ 11 時間でスペクトル解析の結果 (11 ~ 12 時間) とほぼ合っている. ほかの観測値 (補正していない現場密度を除く) から求めた鉛直変位を用いて海水の軌跡を追った場合もほぼ同じ結果が得られた.

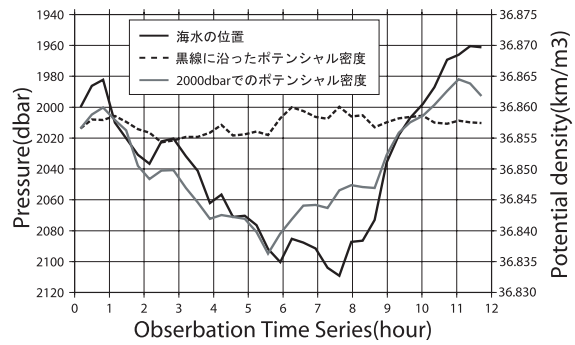
次に, 観測開始時 2000dbar にあった海水のポテンシャル密度の変動をラグランジュ的に追った場合とオイラー的に追った場合を比較した (第 13 図). オイラー的に追った場合のポテンシャル密度は観測期間に約 0.03 kg/m^3 の変化を経験している. ラグランジュ的に追うと, 海水の経験する密度変化は約 0.005 kg/m^3 と 1 桁小さい. これは解析誤差だと考えられる.

今回の得られた 2000dbar での卓越周期 = 11.9 時間 (プラントバイサラ振動数 $0.00127(\text{rad/s})$) を次式 (13) の内部慣性重力波の分散関係式に代入する.



第 12 図 観測開始時に 2000dbar にあった海水をラグランジュ的に追って求めた軌跡

実線は海水の軌跡 (鉛直位置の単位: dbar), 破線はポテンシャル密度 (単位: kg/m^3) の等値線. 海水は 10 ~ 11 時間かけて, 等値線に沿った運動をしながら元の位置 (2000dbar) に戻っている.



第 13 図 観測開始時に 2000dbar にあった海水のポテンシャル密度の時間 - 鉛直断面図

黒実線はラグランジュ的に追った海水の位置 (単位: dbar), 点線は実線に沿ったポテンシャル密度 (単位: kg/m^3), 灰実線は 2000dbar におけるポテンシャル密度 (単位: kg/m^3). 灰実線の (オイラー的な) 変化量は約 0.03 kg/m^3 である.

$$\omega^2 = \frac{f^2 k_z^2 + N^2 k_H^2}{k_H^2 + k_x^2} \quad (9)$$

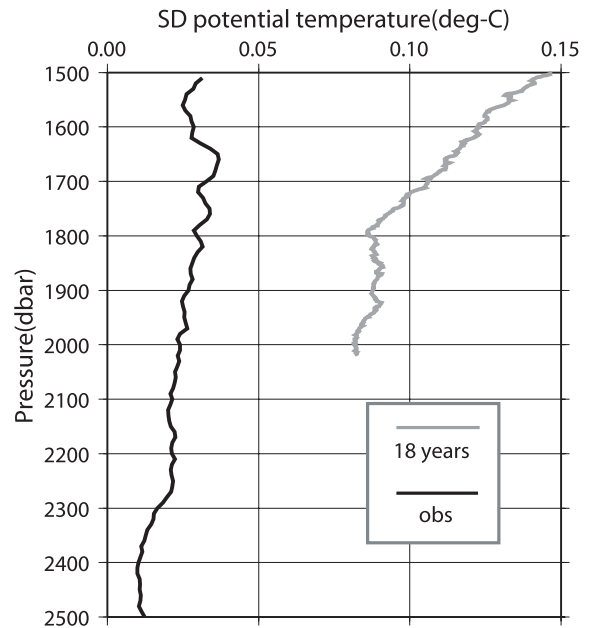
(ω : 角振動数 (rad/s), k_H : 水平波数 (m^{-1}), k_z : 鉛直波数 (m^{-1}), f : コリオリパラメータ (rad/s), N : プラントバイサラ振動数 (rad/s))

分散関係式より水平波長は鉛直波長の約 10 倍で, 時間鉛直断面図の偏差の分布から, 鉛直波長を 1km 程度と見積ると水平波長はおよそ 10km となる.

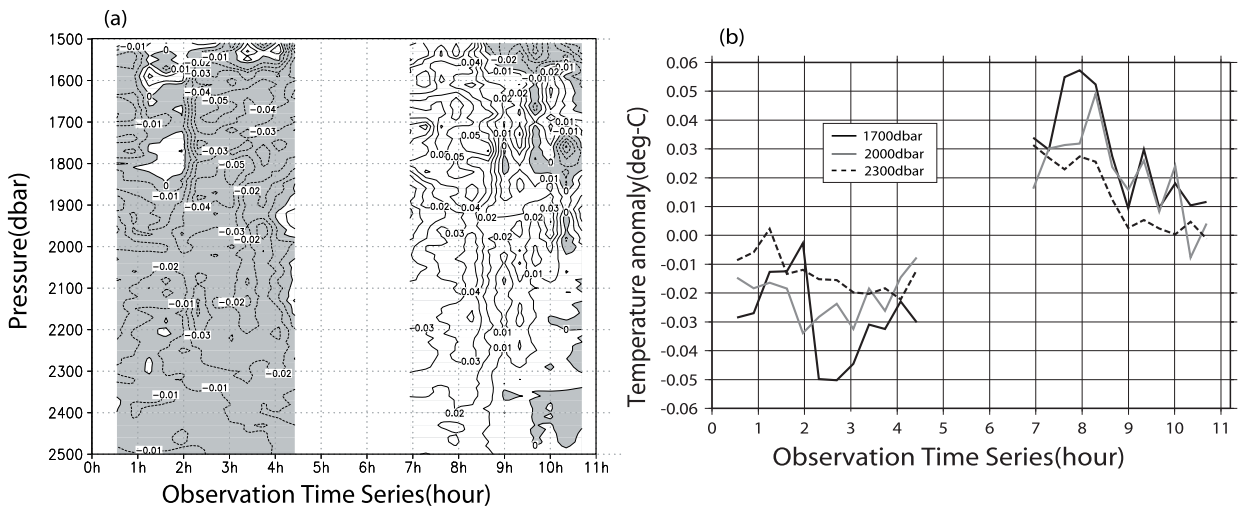
3.3 2006年8月, 凌風丸による観測結果について

2006年8月25日, 凌風丸による北緯32度, 東経137度での合計24プロファイルの観測結果について述べる. 第14図にポテンシャル水温について, この繰り返し観測で得られたSDと, 同点, 同季節の気候値(1990~2007年の18回)SDの鉛直分布を示す. 深さ1800dbar以深において繰り返し観測におけるSDは気候値SDの約3分の1に相当する大ききであることがわかる.

第15図(a)にポテンシャル水温偏差の時間鉛直断面図, 第15図(b)に1700dbar, 2000dbar及び2300dbarのポテンシャル水温偏差の時系列図を示す. 第15図(a)から, 1700dbarで観測開始から約2~3時間後に負偏差が最も大きくなり, 約8時間後に正偏差が最も大きくなることがわかる. また, 第15図(b)を見ると, 1700dbarと2000dbarでは変動の様子がよく似ており, 約5~6時間が2分の1周期に相当しているとみられる. 2300dbarでは偏差が小さく周期的な変動は明りょうではない. 第15図(a)においても位相の鉛直伝播は見られない.



第14図 2006年8月凌風丸での繰り返し観測と, 同点・同季節のCTD観測(18回)でのポテンシャル水温標準偏差(SD)の比較(単位:°C) 繰り返し観測のSD(黒実線)は過去のSD(灰実線)の3分の1に相当する.



第15図 (a)ポテンシャル水温偏差の時系列断面図, (b)1700(黒実線)・2000(灰実線)・2300(点線) dbarにおけるポテンシャル水温偏差の変化(単位:°C)

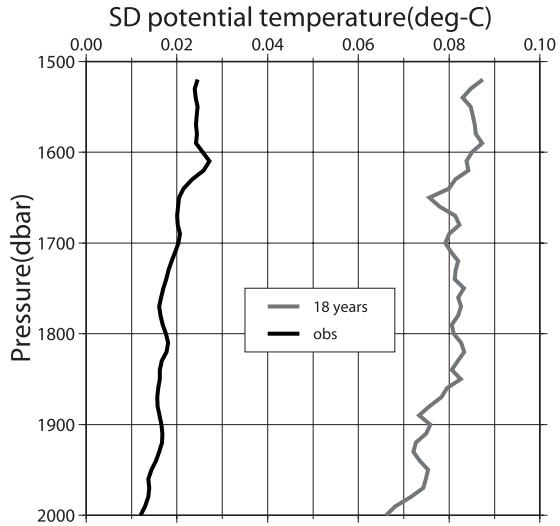
(a)の陰影部は負偏差を示し, 等値線の間隔は0.01°Cである. 約5~6時間で負偏差から正偏差の極値をとっている.

3.4 啓風丸による観測結果について

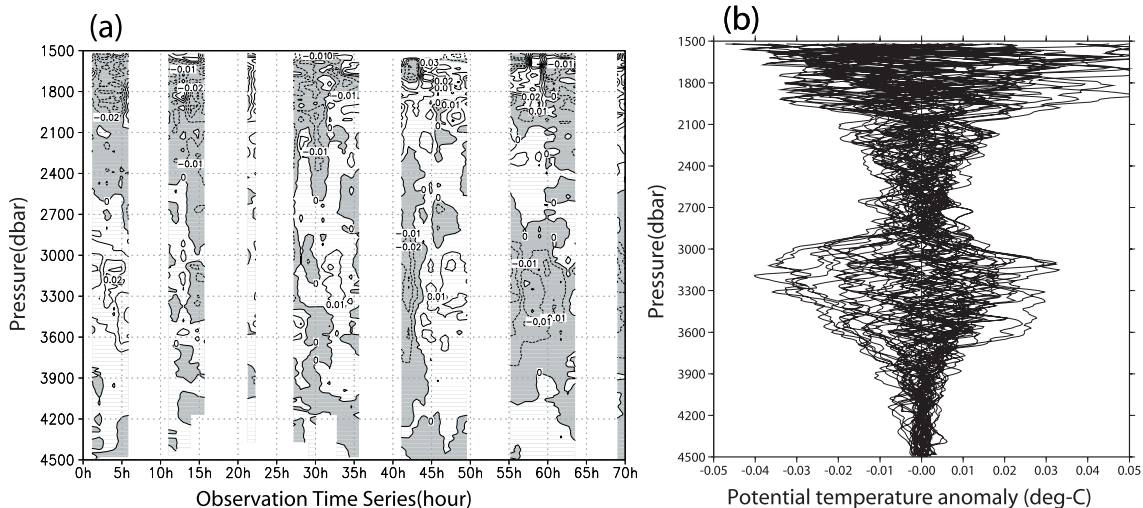
啓風丸による北緯 30 度，東経 137 度での合計 46 プロファイルの観測結果について述べる．第 16 図にポテンシャル水温について，啓風丸の繰り返し観測で得られた SD と，同点，同季節の気候値（1990～2007 年の 18 回）の SD の鉛直分布を示す．啓風丸で観測された短期変動は過去の観測 18 回分の SD の約 1/5～1/4 に相当する大きさである．

変動の短期変動の全体的な特徴を見るため，第 17 図にポテンシャル水温偏差について，時間鉛直断面と 46 プロファイルのすべてを重ねてプロットした鉛直分布を示す．ポテンシャル水温偏差の時間鉛直断面図（第 17 図 (a)）から，啓風丸の観測結果ほど明りょうではないが，1600dbar と 3000dbar 付近で比較的大きい周期的な変動をとらえている．全プロファイルの鉛直分布図（第 17 図 (b)）から，1500～1800dbar 付近と 3000～3500dbar 付近で変動が大きく，2400～2800dbar 付近，4000dbar 以深で変動が小さくなっていることがわかる．鉛直方向の位相の伝播は見られないことと，振幅の包絡線が海底に向かって直線的に小さくなっていることから，観測された周期的な短期変動は鉛直方向に定在波をなしていると思われる．ここで，2800dbar と 4000dbar 付近が定在

波の節だとすると，節から節は約 1200m，鉛直波長はその 2 倍で 2500m 程度である．水平波長を鉛直波長の約 10 倍（水平波長は約 25km）と仮定し，変動の大きい 3300dbar でのブラントバイサラ振動数 $0.001(\text{rad}/\text{s})$ を用いて分散関係式（式 (13)）に代入すると，周期はおおよそ 14 時間と見



第 16 図 啓風丸での繰り返し観測と，同点・同季節の CTD 観測（18 回）でのポテンシャル水温標準偏差（SD）の比較（単位：℃）
繰り返し観測の SD（黒実線）は過去の SD（灰実線）の 5 分の 1～4 分の 1 に相当する．



第 17 図 (a) 啓風丸の観測でのポテンシャル水温偏差の時間鉛直断面図（単位：℃），(b) ポテンシャル水温偏差全 46 プロファイル（単位：℃）

(a) 陰影部は負偏差を示しており等値線の間隔は 0.01°C である．1600，3300dbar 付近で変動が大きいが，2800dbar 付近で極小，3500dbar 以深では海底に向かって漸減している．

積もることができる。

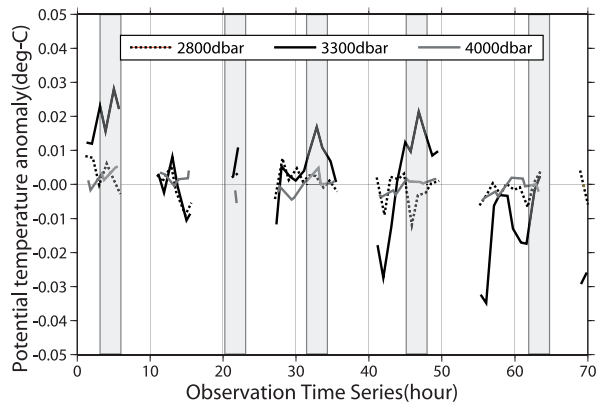
ポテンシャル水温偏差の時系列を使って変動の周期性を確認する。ポテンシャル水温偏差の変動が大きい 3300dbar と、変動の小さい 2800 dbar と 4000dbar のポテンシャル水温偏差を時系列にした (第 18 図)。変動の大きい 3300dbar の偏差の極大点とみられる時間帯を網掛けにしている。ポテンシャル水温偏差の極大点とみられる時間帯は 10 ~ 17 時間の間隔で見られ、この時間間隔はおおむね一定である。この結果は分散関係式から推定した 14 時間の周期と整合している。

3.5 断熱保存量について

短時間の変動ならば、ポテンシャル水温やポテンシャル密度は断熱保存量であり、現場密度は断熱保存量ではないことが確認できた。したがって圧力の代わりに断熱保存量を独立変数(縦軸)にするとほかの断熱保存量の偏差は小さくなることが予想できる。そこでポテンシャル水温、ポテンシャル密度、現場密度それぞれを縦軸にしたときの塩分の SD の分布を作ってみた(凌風丸の観測, 第 19 図)。ポテンシャル水温やポテンシャル密度に対する塩分 SD (実線) は、圧力座標での対応する塩分 SD (灰実線) の 1/10 ~ 1/3 程度小さくなっている (a と b)。大きいところでも 0.001psu 程度で測器分解能と同じ大きさにまで小さくなっ

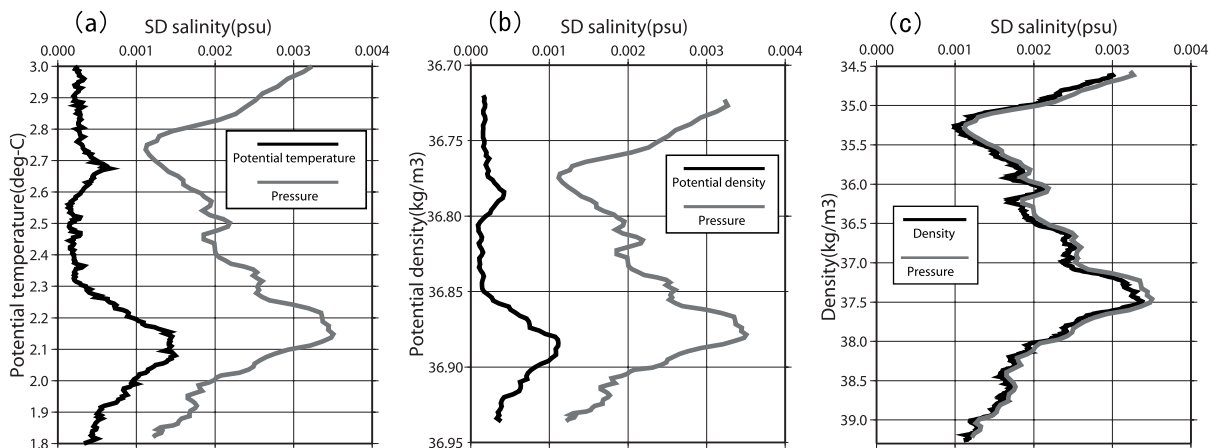
ている。現場密度に対する塩分 SD は圧力座標の SD とほぼ同じだった (c)。

内部波に起因すると思われる短期変動での断熱保存量の保存性の良さは、観測時に計測できるスケールで内部波の碎波が起きていなかったから、と考えることができる。長期に海水を追跡する場合に断熱保存量は重要な役割を果たしているのであるが、その非保存性、すなわち鉛直拡散過程は非常に小さいか間欠的であり、後者ならば±50dbar 程度の鉛直スケールを持つものであろうと予想できる。



第 18 図 ポテンシャル水温偏差の時系列図 (単位: °C)

2800dbar (灰実線), 3300dbar (黒実線), 4000dbar (点線) の変動で、3300dbar での極大点とみられるところを網掛けしている。極大点は約 70 時間の観測で 5 つ見られた。



第 19 図 塩分標準偏差の分布 (単位: psu)

縦軸をそれぞれ (a): ポテンシャル水温, (b): ポテンシャル密度, (c): 現場密度にした塩分 SD で、黒実線は軸に対応する塩分 SD, 灰実線は軸に対応する圧力座標での塩分 SD。ポテンシャル水温・ポテンシャル密度を縦軸にとると、圧力座標に比べ SD が小さくなっているが、現場密度と圧力座標の SD はほぼ同じである。

3.6 アルゴフロートデータについて

中層の十数時間以上の変動に観測誤差の検討範囲を拡大することは難しい。観測船による観測データがないからである。ところが2000年以降、2000dbarまでの水温、塩分及び圧力を自動観測するアルゴフロートが展開され、そのデータがリアルタイムで入手可能になった。アルゴフロートが鉛直プロファイルを観測する間隔は標準で10日であるので、特に周期が10日以上の変動を検出できる可能性がある。これを見るために、WMOの識別番号が5900499のアルゴフロートを選択し、同様の解析を試みた。このフロートを選択した理由は、約3年間の稼働範囲が北緯17～20度、東経163～170度と狭く、ほかのフロートに比べ比較的水平移動が少ないためである。また、凌風丸による2007年7月の観測海域の緯度と海流系（北赤道海流）が大きく違わないということもこのフロートを選択した理由の一つである。

2004年2月～2007年7月の約3年半の間に得られた127プロファイルのデータを使用した。プロファイルのサンプリング間隔は10日、鉛直方向には1000dbar以深では2000dbar付近まで約50dbar間隔である。改良akima法（Akima, 1991）を用いて1dbarごとのデータに鉛直内挿し、等圧面上の値を解析に用いた。MEM法によるスペクトル解析を行ったが、明りょうなピークは見られなかった。これについては、10日～200日程度の周期の変動のパワーが小さい可能性や、鉛直内挿誤差が変動をつぶしている可能性が考えられる。また、アルゴフロートデータが観測している変動の特徴を知るために、鉛直変位から偏差の推定を試みた。偏差の推定値と観測値は各深度で傾向は合っていたが、その差は凌風丸と啓風丸の繰り返し観測の場合と比べて10倍程度大きかった。

4. まとめと考察

海洋内部の短期変動により、海水は鉛直変位にして±50dbar程度の上下運動をすること、及び、この上下運動による観測値 A の偏差 δA は鉛直変位 η を用いて

$$\delta A = \eta \frac{\partial \bar{A}}{\partial p} \quad (10)$$

で推定できることがわかった。この観測値の偏差 δA こそが、単発のCTD観測やアルゴフロートデータに付随する周期1日程度までの短期変動による観測誤差である。短期変動による観測誤差の推定には、鉛直変位の分布を推定することが必要であるが、今回の観測からその一般的な方法を見出すことはできなかった。しかしながら、海域や水深を変えた観測結果から鉛直変位は少なくとも±50dbar程度あることがわかったので、観測値に付随する最低限の観測誤差の見積りとしては観測値の鉛直勾配に±50dbarを掛けた値が挙げられる。

鉛直変位の分布の把握には内部波の構造を知る必要がある。啓風丸の観測結果は、海水の上下運動は鉛直方向には定在波となっていることを示唆している。凌風丸の全36プロファイルの偏差は、2100dbar付近で大きく、1700dbar付近と2500dbar付近が小さい。鉛直定在波だと仮定すると鉛直波長は1600m、水平波長は16km程度となる。また、今回の観測結果から、数時間～十数時間程度の時間規模の自然変動のうちで、卓越するのは周期約12時間の海洋内部波とみられる変動であった。このような海洋内部波は海洋中のどこにでも、いつでも存在するものと思われる。

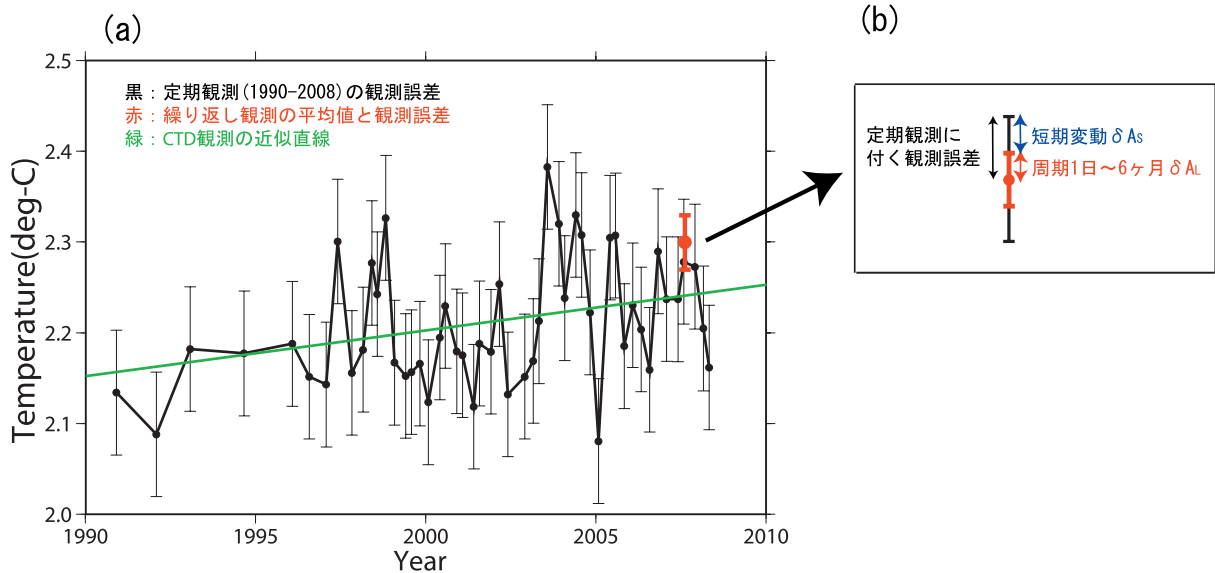
気象庁の定期観測ではこのような短期変動の観測は行われないため、ほとんどの解析ではこの変動は観測誤差の一部となる。今回の観測と通常観測の結果の違いを明らかにしておく。第20図(a)に北緯13度、東経137度での定期CTD観測(56回)による2000dbarでの水温時系列図を示す(観測値:黒丸, エラーバー:黒線)。これに今回の繰り返し観測結果を加えた(赤丸と赤線)。この図には2つの注意が必要である。まず、定期CTD観測の観測値に付いているエラーバー(黒線)は全56回の観測値のSDとしている。定期観測の時間間隔は約3か月で、これが時系列解析の分解能であるから、本来付けるべきエラーバーはサブグリッドスケールの変動の大きさである(詳しく言うと、観測誤差は周期12時間以上6か月以下の観測誤差 δA_L と今回観測された12時間以下の短期変動による観測誤差 δA_S と測器誤差(1桁以上小さいので無視している)を加えたもの)。しかしその値を知らないで、ここでは本来の(6

か月以上の) 変動分も含んでしまうが SD で代用している。

2 つ目は、時系列に加えた今回の繰り返し観測結果は、往復 18 回の観測で得られた 36 個のデータの平均値である。繰り返し観測により分解できた周期 12 時間以下の短期変動は平均操作によってキャンセルしあうから、平均値に付くエラーバー (赤線) は、 δA_s (青線) だけ小さくなる。代わりに平均によっても短期変動が完全にはキャンセルしてないことを示す平均値のゆらぎ δA_{ave} (付録 2) が加わる。この観測誤差がキャンセルされる様子を第 20 図 (b) (模式図) に示す。なお、 δA_{ave} は小さいため無視している。それぞれ値は、定期 CTD 観測値の SD = 0.069°C, 短期変動の大きさ $\delta A_s = 0.045^\circ\text{C}$ であるから $\delta A_L \approx 0.024^\circ\text{C}$, すなわち繰り返し観測のデータ点の観測誤差は半分以下に小さくできた。

例えば観測値から求めた近似直線 (緑) を使っ

て、この時系列から気候変動を論じる場合、この近似直線は黒線のエラーバー内にあり、有意性はほとんどないが、赤点のような小さいエラーバーを持つ点が時系列上に何点かあれば十分に有意となるかも知れない。このように時間解像度が粗い長期時系列の解析では観測誤差が大きく、どの信頼度レベルで解析しているのか、その定量的な位置付けを決定するのは観測誤差の大きさである。短期変動は其中で無視できない寄与をしており、観測誤差を小さくするためにはそれを解像する観測を行うことが極めて有効である。しかしながら実際の観測において、短期変動による観測誤差の把握のために全測点で繰り返し観測を行うことは不可能である。そこで、例えば、緯 (経) 度にして 5 度又は 10 度おきにモニター一点を設定し、約 1 日かけて 4 ~ 12 回繰り返し CTD 観測を行い、短期変動による観測誤差をキャンセルさせることは可能であると考える。



第 20 図 北緯 13 度，東経 137 度における 2000dbar での水温時系列図 (単位：°C)

(a) は過去の全 CTD 観測結果 (1990-2008 年, 56 回) と観測誤差 (黒), 今回の観測の結果の平均値と観測誤差 (赤), 過去の CTD 観測結果の近似直線 (緑). (b) は今回の観測平均値では短期変動 (青) 分がキャンセルしあつて、観測誤差はほぼ CTD 観測値 (黒) から短期変動 (青) 分をひいたもの、すなわち周期半日 ~ 6 か月の変動 (赤) となっていることを示している。(模式図)

参 考 文 献

- 分木恭朗・湊信也・藤村昌彦・三浦雄美利・中村哲也・有田真 (2008) : 繰り返し CTD 観測の解析, 日本海洋学会春季大会ポスター.
- Christopher Garret and Walter Munk (1972) : Space-Time Scales of Internal Waves, *Geophysical Fluid Dynamics*, 1972, vol.2, pp. 225-264.
- Hiroshi Akima (1991) : Algorithm 697: Univariate interpolation that has the accuracy of a third-degree polynomial, *ACM TOMS*, v.17 n.3, pp.341-366.
- 小林大洋・市川泰子・高槻靖・須賀利雄・岩坂直人・安藤健太郎・水野恵介・四電信行・竹内謙介 (2001): Hydrobase を用いたアルゴデータの修正法 I - ポテンシャル電気伝導度の導入 - . 海洋科学技術センター試験研究報告, 44, 115-124.
- Shinya Minato, Shigeki Hosoda and Noriyuki Matsuo (2004) : Observational error in Argo profiles and one-time shipboard CTD profiles, 2nd Argo Work Shop.
- UNESCO (1983) : Algorithms for computation of fundamental properties of seawater, Endorsed by Unesco/SCOR/ICES/IAPSO Joint Panel on Oceanographic Tables and Standards and SCOR Working Group 51.

付録 1 : ポテンシャル電気伝導度について

小林ら (2001) は, 測器で実際に計測した電気伝導度の圧力依存性を示し, 圧力依存性の除去のため, ポテンシャル電気伝導度 (C_θ) を導入している. 通常, (実用) 塩分はその観測位置の圧力 = P , 水温 = T , 電気伝導度 = C の関数として

$$S = sal78(P, T, C) \quad (A1.1)$$

で計算する (UNESCO, 1983). これを逆に解くと

$$C = cond78(P, T, S) \quad (A1.2)$$

(UNESCO, 1983). ポテンシャル電気伝導度とは, 水温とポテンシャル水温の関係にならば, 水粒子を観測位置 (圧力: P) から基準圧力 (P_{ref}) まで断熱的に移動させた場合の電気伝導度の値で, 基準圧力 (P_{ref}), ポテンシャル水温 (θ), 塩分 (S) を用いて次のように表すことができる.

$$C_\theta = cond78(P_{ref}, \theta, S) \quad (A1.3)$$

塩分 (S) は近似的に断熱保存量 (すなわち断熱過程で一定) として扱っている.

小林らによるとこのポテンシャル電気伝導度はポテンシャル水温の 1 次式で表されるとされている. 今回の観測値 ($P_{ref}=2000\text{dbar}$) からポテンシャル電気伝導度はポテンシャル水温を用いて $C_\theta = 0.807\theta + 29.731$ と表され 1 次式で近似できた (相関係数はほぼ 1). これは, $cond78$ の圧力項は観測範囲内で水温に対し 2 桁小さいことから無視でき, 電気伝導度の式は, 水温 t と塩分 S を用いて

$$C_t = C(35, 15, 0) \times (at + b) \times (cS + d) \quad (A1.4)$$

の形で表されるためである. ここで, $C(35, 15, 0)=42.914$ (定数), a, b は $cond78$ に基づき, $a=0.0200504$, $b=0.6766097$ また, c, d は観測値から求まり凌風丸の繰り返し観測では, およそ, $c=0.02565$, $d=0.1015$ であった. 塩分の変化量は約 0.07psu で水温変化量約 1.0°C の 10 分の 1 以下と水温に比べて小さいため, ほぼ水温に比例する結果であったと思われる. ここで塩分を一定値とし, (9) 式に代入すると, $C_t = 0.852t + 28.750$ で, 観測値にほぼ合っていることがわかる.

付録 2 : 繰り返し観測の平均値データに付随する標準偏差について

今回の繰り返し観測で得られた各種プロファイルの偏差は正規分布していない。したがって平均値のゆらぎはデータ数の平方根に反比例するとは限らない。ここでは平均値のばらつきの大きさをサブサンプリングによって見積もった。

データ数を N ($N=36$) とするとき、元データセットを $\{A_i : i=1,2,\dots,N\}$ とおくと、全データの平均値 \bar{A} と標準偏差 SD は

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i, \quad SD = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (A_i - \bar{A})^2} \quad (A2.1)$$

となる。

N 個のデータセットから k 個のデータを抜き出したサブセット $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$ を考える。データセットは $m = {}_N C_k$ 個作成できる。各サブセット内での平均値 a_{i_1, i_2, \dots, i_k} は

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \frac{1}{k} (A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}) \quad (A2.2)$$

for $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$

である。平均値の集合を作成すると、平均値集合内での平均値 \bar{a} 、標準偏差 SD_k は

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{m} \sum_{i_1=1}^{N-k+1} \sum_{i_2=i_1}^{N-k+2} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^N a_{i_1, i_2, \dots, i_k} \\ &= \frac{1}{k \cdot m} \sum_{i_1, \dots, i_k} (A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}) \end{aligned} \quad (A2.3)$$

$$\begin{aligned} SD_k &= \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i_1=1}^{N-k+1} \sum_{i_2=i_1}^{N-k+2} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^N (A_{i_1, i_2, \dots, i_k} - \bar{a})^2} \\ &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1}{m} (A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_k})^2} \end{aligned} \quad (A2.4)$$

となる。 (i_1, \dots, i_k) すべての組合せの和

$$\sum_{i_1=1}^{N-k+1} \sum_{i_2=i_1}^{N-k+2} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^N \sum_{i_1, \dots, i_k}$$

を \sum と書いた。

ここで、 B_j を A_j の任意の関数としたとき、 (i_1, \dots, i_k) すべての組合せの和に関する恒等式

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} (B_{i_1} + B_{i_2} + \dots + B_{i_k}) = {}_{N-1} C_{k-1} \sum_{j=1}^N B_j \quad (A2.5)$$

を用いると、平均値 \bar{a} は

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{km} \sum_{i_1, \dots, i_k} (A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}) \\ &= \frac{1}{km} {}_{N-1} C_{k-1} \sum_{i=1}^N A_i \\ &= \frac{N} {k} \frac{{}_{N-1} C_{k-1}} {N C_k} \bar{A} = \bar{A} \end{aligned} \quad (A2.6)$$

となり、標準偏差 SD_k は

$$\begin{aligned} SD_k^2 &= \frac{1}{k^2 m} \sum_{i_1, \dots, i_k} (A'_{i_1} + A'_{i_2} + \dots + A'_{i_k})^2 \\ &= \frac{1}{k^2 m} \sum_{i_1, \dots, i_k} (A_{i_1}^2 + A_{i_2}^2 + \dots + A_{i_k}^2) \\ &\quad + \frac{2}{k^2 m} \sum_{i_1, \dots, i_k} (A'_{i_1} A'_{i_2} + \dots + A'_{i_{k-1}} A'_{i_k}) \\ &= \frac{1}{k} SD^2 + \frac{2}{k^2 m} Cor \end{aligned} \quad (A2.7)$$

となる。ここで $Cor = \sum_{i_1, \dots, i_k} (A'_{i_1} A'_{i_2} + \dots + A'_{i_{k-1}} A'_{i_k})$ である。第 2 項は通常、 k が大きくなるにつれ、第 1 項に比べて小さくなってゆく。よって、 k が大きいところでは

$$\bar{a} = \bar{A}, \quad SD_k \approx \frac{1}{\sqrt{k}} SD \quad (A2.8)$$

となる。

2007 年 7 月の凌風丸による繰り返し観測では、2000dbar 水温を A_i ($i=1,2,\dots,36$) としたとき、平均値と標準偏差は、 $\bar{A} = 2.307096^\circ\text{C}$ 、 $SD = 0.044675^\circ\text{C}$ であった。任意に 35 個取り出して平均値を作った場合、そのゆらぎは $SD_{35} = 0.001276^\circ\text{C}$ であり、34 個の平均値のゆらぎは $SD_{34} = 0.0018315^\circ\text{C}$ であった。 $SD_{35} / SD = 1/35$ 、 $SD_{34} / SD \approx 1/24$ となっていた。標本数が大きく変動現象を十分に解像していれば、平均値のゆらぎ δA_{ave} は元の SD より十分小さくなっていることがわかる。