数値予報課報告・別冊第 60 号

次世代非静力学モデル asuca

平成 26 年 3 月
March 2014

気　象　庁　予　報　部

次世代非静力学モデル asuca

目　次

はじめに

第 1 章　概論　1

1.1　はじめに …… 1
1.2　気象庁における非静力学モデル・データ同化システムの開発…… 5
1.3　各国の非静力学モデル・データ同化システムの開発動向…… 8
1.4　asuca の開発理念 …… 19

第 2 章　力学過程　29

2.1　定式化…… 29
2.2　空間離散化…… 40
2.3　時間離散化…… 43
2.4　移流スキーム…… 53
2.5　側面・上部境界条件…… 57
2.6　理想実験を通じたドライモデルとしての評価…… 62
2.7　水平波数スペクトル分布の確認…… 88

第 3 章　データ同化システム　91

3.1　asuca 変分法データ同化システム …… 91
3.2　接線形・随伴モデルの実装…… 98

第 4 章　物理過程の実装　104

4.1　asuca における物理過程の組み込みの考え方 ……104
4.2　asuca における物理過程の実装の例 ……106
4.3　物理過程を含むモデルとしての asuca の評価……108

第 5 章　局地モデルとしての現状　113

5.1　はじめに……113
5.2　日々実験の仕様……113
5.3　事例検証……114
5.4　積雲対流発生の表現の課題……116
5.5　終わりに……118

第 6 章　全球モデルとしての利用　121

6.1　はじめに……121
6.2　重合格子法を用いた数値シミュレーションと Yin-Yang 格子モデル ……121
6.3　2 次元モデル試験 ……123
6.4　3 次元モデル asuca-Global……127
6.5　まとめ……131

第 7 章　大規模並列計算機向け対応　133

7.1　GPU 向け数値予報モデルの動向 ……133
7.2　スーパーコンピュータ「京」での asuca の実行 ……139

付録 A　システムデザイン **141**
A.1　並列化・高速化……141
A.2　新規にコードを組み込む際の考え方……146
A.3　変数……147

付録 B　電子計算室報告、同別冊、数値予報課報告・別冊 発行履歴 **150**

はじめに *

気象庁では数時間先の短時間予報から季節予報までその目的に応じ、多くのモデルを開発している。おおむね1日先までの防災気象情報や航空気象情報等に用いられる10 km以下の水平分解能を有する現業メソモデルとして、2001年3月に静力学メソモデルが、2004年9月には非静力学メソモデルが導入された。一方、その初期値作成に用いるデータ同化システムの開発も、3次元最適内挿法、4次元静力学変分法、4次元非静力学変分法、と予報モデルの高度化に沿って段階的に進められてきた。昨今、計算機の能力向上や観測データの充実を受けて、メソ解析・予報システムは巨大化する傾向にあり、少人数の開発から大人数による協働的開発への移行が不可欠となった。また、モデル開発を取り巻く環境も変化しており、プロダクトに対する利用者ニーズの多様化、高度化や、計算機の能力向上を実現するための新技術の開発が進んでいる。このようなモデル開発や外部環境の変化に積極的に対応するために、新しいモデルを導入することとした。本号では「次世代非静力学モデルasuca」と題し、2007年以来開発を続け、ようやく現業レベルに達しつつある新しいモデルについて、その詳細な解説を行う。非静力学メソモデル導入以来の大幅改定となるこのモデルは、計算効率、計算安定性、物理量の保存性、計算精度の他にも、プログラムの高い保守性、モデル開発と同化開発のシームレス化、側面境界における不連続が緩和できる全球モデルへの統合可能性、幅広いアーキテクチャの計算機に適用可能な可搬性、さまざまな機関で研究用に開発されているモデルとのモデル部品の置換を容易にする相互利用性など、優れた特徴を持っている。平成26年3月現在、asuca版の局地モデルは現業化間近となっている。その後、メソモデルについてもNHM版からasuca版に置き換えられる計画である。プログラムコードが整理されたasucaの導入によりさらに開発速度が増すとともに、将来想定される新しいタイプの計算機への対応も容易になると期待される。また、現在NHMは国内外の現業・研究利用に供されているが、可搬性に優れるasucaの導入により、部外での利用がさらに広がることも期待している。本号は人間なら還暦となる記念すべき第60号であるが、それにふさわしく新しい時代の幕開けを告げられる内容になったのは喜ばしい限りである。局地モデルおよびメソモデルの現業・研究利用者、気象庁内外の高解像度大気モデルの開発者に広く活用いただきたい。

* 竹内 義明

第1章　概論

1.1　はじめに [1]

数値予報モデルは、気象庁の予報業務における技術基盤の中核であり、その予測精度は気象庁が発表する様々な気象情報の精度に直結する、要の技術である。このため、現業数値予報モデルとして、安定的に運用するとともに、そのプロダクトの精度検証を着実に行えるシステムを構築することが重要である。また現業の数値予報モデルの改良を効果的に進めていくためには、開発・研究用にも幅広く利用されるとともに、その最先端の成果を現業モデルに速やかに反映できるよう、数値予報モデルの維持や開発に関わる調整がされている必要がある。多くの開発者・研究者による将来の様々な拡張、特に物理過程を改良した場合の精度検証に耐え、かつ今後様々な変革が予想される次世代スーパーコンピュータのアーキテクチャに適したソフトウェアデザインが求められる。

これまで、防災情報・短期予報から週間天気予報までの時間空間スケールを対象とする主たる数値予報モデルとして気象庁で運用開発されてきたものが、気象庁全球モデル (Global Spectral Model: GSM) と気象庁非静力学メソモデル (JMA Non-Hydrostatic Model: JMA-NHM; 気象庁予報部 2003) である。GSM は 1988 年に、当時現業モデルであった北半球モデルを発展させる形で現業化され、その後の高解像度化や物理過程の改良を重ね、短期・週間天気予報、台風予報を支援する基盤モデルとして、台風進路予報や数日先の顕著現象の予測精度向上を支えてきた。また JMA-NHM は後述するように 2004 年に、当時の領域静力学メソモデルを置き換える形で現業化され、集中豪雨等のメソスケール現象の予測精度向上に寄与している。

このようにこれまでの数値予報モデルは、基礎的な研究開発を経て現業化され、その後の高解像度化、物理過程の高度化を遂げて、長く維持管理されることにより大きな成果を上げてきた。しかしながらここへ来て、将来のさらなる高解像度化・高度化にあたり、モデルの拡張に制約がある、今後の省電力型スーパーコンピュータへの対応に課題があるなど様々な問題も浮かび上がってきている。これらを解決し今後の数値予報モデルの発展につなげていくためにも、次世代の数値予報モデルの開発が望まれていた。

本報告でとりあげる asuca (Asuca is a System based on a Unified Concept for Atmosphere の略。再帰的略称を用いている。) は、こうした事情を背景に現在数値予報課で開発されている次世代数値予報モデルである。

数値予報モデルの方程式系やその離散化手法は力学コアと呼ばれ、モデルの基盤をなしている。asuca の力学コアは、水平離散化として従来のスペクトル法 (GSM)、有限差分法 (JMA-NHM) に代わり、近年数値流体力学分野で広く用いられている有限体積法を採用し、また時間積分法にルンゲクッタ法を導入するなど、最新の計算手法を取り入れている。力学コアは数値予報モデルの、建造物でいういわば屋台骨であり、その新規開発は容易ではない。asuca は当面はメソ数値予報システム及び局地数値予報システムの後継モデルとして開発を進めるが、一方で力学コアの設計検討、開発にあたっては、様々な座標系で対応できるようにすることにより、領域モデルのみならず今後の全球モデルへの拡張も視野においている。

また、物理過程については、これまでの成果を継承することを考慮して、従来の数値予報モデルの物理過程をライブラリ化した「物理過程ライブラリ (原 2012)」の利用を前提としている。本次世代モデルの開発は力学過程の開発を中心としていることから、asuca とは広義には物理過程全体も含めた数値予報モデルを指すが、狭義には新規に開発した力学コアを指す。本報告の解説は主として狭義の意味での asuca を対象とするが、一部の章では広義の意味での asuca について取り上げる。

本節ではまず、asuca の力学コアの検討に当たって考慮した、全球・領域モデルの非静力学化、データ同化技術、および計算機技術の動向について示す。

全球・領域モデルの非静力学化

20 世紀においては、スーパーコンピュータの性能の限界から、日本のみならず各国の数値予報センターにおいても、全球モデル・領域モデルの予測対象は総観スケールの現象であった。総観スケールの現象に対しては静力学近似が成り立つためプリミティブ方程式系が用いられてきた。静力学近似が成り立つのは運動の水平スケールが鉛直スケールより十分大きいときであり、両者のスケールが近づいてくると近似が成り立たなくなる。防災上重要な豪雨をもたらすメソ対流系ではこの近似が成り立たないので、それらを精度よく予測して防災に資するためには静力学近似を用いない非静力学モデルが必要となる。気象庁ではスーパーコンピュータの更新のたびに、数値予報モデルの水平分解能を向上させてきており、2001 年から運用した第 7 世代の計算機において、水平格子間隔 10 km の領域静力学モデルによりメソモデル (MSM) の運用を開始したのに続き、2004 年 9 月に MSM に非静力学モデルを導入した。その後も、2006 年・2012 年とスーパーコンピュータを更新し、現在は第 9 世代の計算機において水平格子間隔 2 km の局地モデル (LFM) の運用に至っている。しかしながら、LFM をもってしても、豪雨等

[1] 石田 純一、室井 ちあし

の予測精度は十分ではなく、今後も計算機能力の向上に伴い、領域モデルの分解能の更なる向上が必要である。また、これまでのスーパーコンピュータの能力向上が続くと仮定すると、第11世代の計算機では全球モデルを10 km以下の水平格子間隔で運用する事も可能になると考えられるので、全球モデルの非静力学モデル化も今後の重要な課題となる。現時点では、全球モデルと領域モデルに求められる予測対象が異なる、即ちふさわしい方程式系が異なることからそれぞれ別の力学コアを使用している。しかしながら、全球モデルが非静力学化されると、力学コアの統一が可能となる。数値予報モデルは複雑化の一途をたどるが、力学コアを統一できれば、その分効率的な開発を行えるようになるだろうと期待される。

データ同化技術

数値予報の精度向上のためには数値予報モデルの高度化だけでなく、データ同化手法の高度化も欠かせない。全球解析・メソ解析で用いられている4次元変分法においては、数値予報モデルから非線形モデル、接線形モデル及び随伴モデルを構築してデータ同化を行う。気象庁のメソ解析において4次元変分法が導入されたのは2002年3月である。これは、領域解析としては世界で初めてのことである。前述の通り、4次元変分法の構築は数値予報モデルに基づいて行われる。2002年時点のメソ解析における4次元変分法の基となる数値予報モデルは当時のMSMで用いられていた領域静力学モデルであった。一方、当時既にJMA-NHMは領域静力学モデルを置き換えて現業化することを目標に開発を行う段階に達していた。そこで、2002年にはJMA-NHMに基づく4次元変分法 ("JMA Nonhydrostatic model"-based Variational Data Assimilation: JNoVA; 気象庁予報部 2010) の開発に着手し、2009年4月に現業化した。4次元変分法では数値予報モデルで表現される力学的バランスを考慮するために、予報計算で用いる予報モデルとデータ同化で用いる予報モデルとが整合していることが望ましい。現在、JNoVAはJMA-NHMを基にしているものの、モデルのバージョンが異なるために細部に違いがある状態で運用されている。数値予報モデルの改良をデータ同化システムに直接反映できるよう、今後は両者のフレームの統一的な開発が必要となる。

計算機技術

これまでのスーパーコンピュータの発展を振り返る。数値予報の精度がスーパーコンピュータの更新とともに向上していることは前述の通りだが、スーパーコンピュータのアーキテクチャは世代ごとに異なっている。1987年に導入した第5世代のスーパーコンピュータ (HITAC S-810) は単一のベクトルプロセッサによる計算機であったのに対し、第6世代 (1996-2001年) のスーパーコンピュータ (HITACHI S-3800) は4ベクトルプロセッサによる並列計算機（メモリは共有）であった。さらに第7世代 (2001-2006年) では擬似ベクトルプロセッサによる並列計算機（分散メモリ）となった。第8世代 (2006-2012年) にはスカラプロセッサによる並列計算機となり、メモリを共有する複数のプロセッサをノードとし、そのノードを複数持つ階層構造を成した計算機となった。現在の第9世代では階層構造はさらに複雑となっている。今後の計算機の動向として、B/F値[2]は下がる傾向にあり、より並列度が増していく傾向がある。一方で、GPGPU[3]のような新たな技術が開発される可能性がある。アーキテクチャが異なる計算機に数値予報モデルを移植することを考えると、動作させるだけであれば比較的容易であるが、そのままではなかなか計算効率が上がらないのが実状である。筆者の経験から、少しチューニングをするだけで計算効率が数割向上することもまれではなく、極端な場合には、性能が数倍向上することもある。このようなことから、計算効率を高めるために、コーディングレベルのチューニングとしてソースコードの全部あるいは主要部分を全面的に書き換えることや（数値計算を行う分野は幅広いが、全部書き換えることが当然視されている分野もある）、アルゴリズムレベルのチューニングとして計算手法そのものを見直すことがしばしば行われる。気象庁において、限られた開発時間でどこまで対応するかの判断は難しいが、数値予報モデルの力学コアは定式化・離散化において様々な手法があり、その選択次第で計算効率は大きく変わりうることから、今後の計算機の動向を念頭においた計算手法の開発が必要である。また、ソースコードをコンパクトなものにすることにより、コーディングレベルのチューニングの効率化を図ることも重要である。そして、アルゴリズムレベル・コーディングレベルの対応を円滑に進めるため、新たな技術動向について調査を行っていくことが重要だと考えている。

以上の事情を勘案すると、新しい力学コアの開発においては、単なる領域モデルの力学コアに留まらず、全球モデルへの拡張やデータ同化システムとの統合を最初から念頭におく必要がある。2007年に始まったasucaの開発は、このような事情を踏まえて、2009年に全球モデルへの拡張 (asuca-Global) を念頭においた開発にも着手し、さらに2011年にはasucaベースの解析システム (asuca-Var) の開発に着手したところである。現時点では、まずはJMA-NHM及びJMA-NHMをベースとしたJNoVA 3D-Varで構成されている局地数値予

[2] メモリバンド幅と浮動小数点演算性能の比。この値が小さいとメモリを効率的に活用する技術が必要となる。

[3] General-Purpose computing on GPUsの略。GPUとはグラフィック表示の処理を行うプロセッサであるが、CPUより省電力かつ高速化を図っていることから、グラフィック表示のみならず、科学技術計算に用いるように進化しつつある。

報システムを asuca 及び asuca-Var に置き換えることを目標に開発を行っている段階であり、全ての目標が達成できている訳ではないが、開発における方向性と現時点での進捗を報告して、今後のさらなる開発の進展につなげたいと考えている。

本章では asuca, asuca-Var および asuca-Global の概略を述べる。第 1.2 節 で気象庁における非静力学モデル・データ同化システムの開発の歴史について述べ、第 1.3 節で各国の非静力学モデル・データ同化システムの開発動向について報告する。上述の技術動向と併せて、他機関の開発動向をレビューし、取り入れるべき技術を取捨選択することが、信頼性の高い数値予報システムの構築に役立つと考えている。引き続き、第 1.4 節では asuca の開発理念を述べる。例えば、方程式系の予報変数の決め方や離散化には様々な手法があり、その選択には任意性がある。最終的な採否の判断においては何らかの基準が必要となる。ここでは、その判断基準としての開発理念を述べる。日々進歩している技術事項の取捨選択においては、直接的・最終的には数値予報システムで試験を行い、検証スコア等によりその採否が決定されるが、開発に着手するかどうかの判断、想定どおりに開発が進捗しない場合の方向性の判断においては開発理念を含む大局的な方向性に沿うべきである。

第 2 章は力学過程についての解説であり、第 1.4.2 項で述べた理念の具現化に係る詳細について報告する。数値予報モデルとしての asuca は JMA-NHM の後継であり、物理過程については物理過程ライブラリという形で JMA-NHM と同等のスキーム [4] を用いるが、力学コアの観点からは異なっている部分が多々ある。そこで、第 2 章では定式化 (第 2.1 節) に始まり、離散化 (第 2.2 節, 第 2.3 節)、移流スキーム (第 2.4 節)、側面・上部境界条件 (第 2.5 節) と解説する。これは、データ同化で必要となる予報・非線形・接線形・随伴モデル (第 3.2 節を参照) の観点で分類すると予報モデルについての解説とも見做すことができる。その後に asuca で行ってきた実験結果を報告する。力学コアの構築では理想実験による評価が欠かせないことから、複数の理想実験を行ってきた。その結果を第 2.6 節に示す。また、力学コアの構築においては計算安定性の確保を念頭においており、高波数成分の制御が必要となる。物理過程を導入した実事例の実験で高波数成分をどのように制御できているか調査した結果を第 2.7 節で示す。

第 3 章では asuca に基づくデータ同化システム (asuca-Var) の報告を行う。第 1.4.3 項で述べた通り、データ同化システムの開発工程として、3D-Var の開発に始まり、力学のみの 4D-Var の開発、4D-Var への物理過程の組み込みという順序で取り組んでいる。現在は、上記のうち、3D-Var を局地解析に導入するための開発が進んでおり、さらに、力学のみの 4D-Var の導入に向けた検討と実装が行われ、力学過程の接線形・随伴モデルが概ね完成した段階である。そこで、まず第 3.1 節ではこれら全体を見渡すために asuca-Var の構成要素について述べた後、asuca-Var コアとして、変分法解析システムの最も基本的な部分について述べる。開発工程を考える場合、予報モデルから非線形・接線形・随伴モデルを導出する手順上、開発工程としては非線形モデルの開発が先行し、その後に接線形・随伴モデルの開発を行うことになり、この点に注意が必要である。また、今後も予報モデルの開発を続けていくことからその改良に伴う接線形・随伴モデルの変更は適宜行っていく必要がある。第 3.2 節では今後の開発に資するため、接線形・随伴モデルの開発方針の策定にあたって検討したこと、及び実際の開発工程やその実際について述べる。

第 4 章では asuca における物理過程の取扱いについて報告する。冒頭で述べた通り、asuca の物理過程は物理過程ライブラリで取り扱う。力学過程・物理過程を含めた複数の過程による時間変化率の相互の取扱いには任意性があり、時間積分の手法が異なってくる。また、力学コアから見ると、物理過程ライブラリは、予報変数とは限らない物理量を入力とし、予報変数とは限らない物理量の時間変化率を出力として返す。そのため、予報変数からライブラリに与える物理量へ変換し、ライブラリから受け取った物理量の時間変化率を予報変数の時間変化率へ変換する。これらのうち、予報変数と物理量の変換そのものは検討の余地は少ないが、時間積分においては仮の時間積分を行い、そこで求めた仮の予報値で時間変化率を求める手法等もあり、どの物理過程をどのタイミングで計算するかが計算安定性や精度に影響を及ぼす。第 4.1 節では、これらの扱いを中心に解説し、それに基づく物理過程の実装について第 4.2 節で述べる。また、物理過程を組み込んだモデルとしての評価も必要であるため理想実験を行っている。これは、物理過程を含むフルモデルとして実データで実験を行う前の評価として重要である一方、組み込みそのものにバグがないかチェックするためにも必要である。これらの実験結果について第 4.3 節で述べる。なお、第 4 章では物理過程そのものについては触れない。

第 5 章では短期的課題として取り組んでいる局地数値予報システムへの asuca の導入に向けた開発結果を報告する。本報告執筆時点ではまさに導入に向けた最終調整に入ったところであり、細かい問題点の修正や現業向けに必要な入出力の整備等を行っている段階である。ここまで、日々実験を通じて精度を確認しており、現時点での実験結果を報告する。また、asuca の現業化へ向けて開発してきた中で、LFM に内在していた積雲対流表現についての課題が明確になってきているので、そのことについて報告する。

[4] 物理過程ライブラリは JMA-NHM の移植の後に独自に開発を行っているため、そこで差異が生じることはありうる。

第 6 章は全球モデルとしての asuca の利用について述べる。格子点法による全球モデルの開発は世界各国で行われている。領域モデルと大きく異なる点として全球を覆うための格子配置の手法に係る課題があげられる。Yin-Yang 格子、正 20 面体格子、立方体格子等、種々の手法が考案されているものの、現時点では決定打と言えるものはない状況である。現在は、Yin-Yang 格子による asuca の全球モデルとしての利用に向けた開発しているところであり、第 6 章ではその進捗について報告する。

第 7 章では大規模並列計算機向けの対応について説明する。並列計算機においては並列化手法が実効性能の鍵を握る。第 7.1 節では前述の GPU(GPGPU) 向け数値予報モデルの動向についてまとめた。また、新たなアーキテクチャへの適応事例として、スーパーコンピュータ「京」による実行があり、第 7.2 節で報告する。

最後に、付録 A でシステムデザインについてまとめた。ここで述べるシステムデザインとは、プログラム本体やその周辺ツール等のシステムにおける実装やその考え方等を意味する。第 1.4 節 で述べる通り、計算機の趨勢に合わせた改良としてコーディングレベルの最適化が必要となり、そのために実装面で工夫した点を紹介する。また、実際に開発を行うために注意すべき事項は多い。それら全てを網羅するわけにはいかないものの、いくつか特筆すべき事項についてまとめている。

本報告は著者等がこれまでに検討を行ってきた開発理念及びそれに沿って開発を進めてきた asuca, asuca-Var, asuca-Global の現状についての集大成である。数値予報における予測が完全なものにならない以上、開発の手を緩めることなく精度向上を図っていく必要がある。本報告が現在及び将来の開発者にとって開発の助けになれば幸いである。

参考文献

原旅人, 2012: 物理過程ライブラリの開発. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 205–208.

気象庁予報部, 2003: 気象庁非静力学モデル. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 194pp.

気象庁予報部, 2010: 非静力学メソ 4 次元変分法. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 106pp.

1.2 気象庁における非静力学モデル・データ同化システムの開発 [1]

1.2.1 非静力学モデルの開発の歴史

ここでは、asucaの開発に着手するまでの気象庁における非静力学モデルの開発の歴史について述べる。なお、2003年までの開発経緯については斉藤 (2003) が詳しいので、そちらも併せてご覧いただきたい。また、“JMA-NHM” という名称は後述する数値予報課と気象研究所による統一的な開発になって以降の名称であるため、それ以前の名称については本節では単に “NHM” と呼ぶことにする [2]。

非静力学モデルはその開発の歴史から見て、対流等の現象解明を目的として、対流雲を陽に扱う雲解像非静力学モデルと、それより広い領域の予報を対象とするメソスケール非静力学モデルとに分けられる。前者の開発は詳細な雲物理過程等を含んでいるものの、マップファクターを含まない、地形を必ずしも扱えない等の制限がある状態から出発し、徐々に拡張していくというアプローチが想定される。後者のモデルは現業モデルの拡張としての意味合いがあり、マップファクターや地形を含んでいる状態のモデルから方程式系を非静力学化し、さらに詳細な物理過程を導入するといったアプローチが想定される。

気象庁におけるNHMの開発は1980年代から気象研究所において開始されており、前者のアプローチを取っている (Ikawa and Saito 1991)。気象研究所における開発当初は、非弾性対流モデルからスタートし、準圧縮方程式系、完全圧縮方程式系と徐々に方程式系の近似を排除していった。また、物理過程として乱流モデルと雲物理過程を組み込んでおり、その後、放射過程、地表面過程等を段階的に組み込んでいった。

一方、数値予報課では、後者のアプローチを取り、NHMとは異なる非静力学モデルの開発を行った。まず、郷田・栗原 (1991) による開発では、当時の現業領域モデルでも用いられていたスペクトル法を採用しており、当初から、マップファクター、地形、コリオリ項を考慮していた。続いて、室井 (1998) による開発では、郷田・栗原 (1991) から7年の歳月の間に様々な機関で行われた非静力学モデルの成果を取り込むとともに、計算機の動向を踏まえた新たなモデルとして構築を行っている。

その後、NHMに数値予報課の開発成果を取り込む形で気象研究所／数値予報課統一非静力学モデルが1999年に完成し (Saito et al. 2001)、さらに、2001年からはJMA-NHMとしての開発が始まり、前述の通り2004年に現業化されるに至っている。(Saito et al. 2006)。

次に、2004年以降の開発について、力学過程を主として述べる。現業モデルとしての重要な課題は計算安定性向上のための開発と方程式系の高度化であった。計算安定性につながる開発としては、格子スケールの対流による強い上昇流をどのように制御するかが懸案事項となり、適応水蒸気拡散 (Saito et al. 2006) の導入、さらに4次の線形拡散や非線形拡散のパラメータの調整、発散抑制フィルタのパラメータの調整を行った (斉藤ほか 2008)。その後も、計算安定性向上のための開発は必要となり、上昇流が強いカラムで鉛直移流スキームを拡散性の強い風上1次差分スキームに切り替える手法の導入などが進められた。一方、方程式系の高度化としては鉛直ハイブリッド座標 (石田 2008) の開発が行われ、2007年に現業化された。

これまで述べてきた通り、JMA-NHMは長い開発の歴史を有し、その歴史において開発したオプションの多くを保持している。気象庁予報部 (2003) の付録にはJMA-NHMのモデルパラメータ一覧が掲載されており、2003年の時点で既に多数のオプションがあったことが分かる。新規開発においては、これらのオプションに対する整合を取る必要がある。一方で、力学コアは前述の通り数値予報モデルのいわば屋台骨であり、それを変更した場合の影響は様々な範囲に及び、整合を取るための確認に多大な時間を要することとなる。そのため、JMA-NHMの力学コアの改良は困難を極めた。その例として、上記の開発と並行して、並列計算機向けのsemi-implicit法や鉛直4次差分スキーム等の開発が行われたものの、残念ながら現業化までには至らなかったという状況がある。

計算安定性と予測精度の両立と、高い計算効率の達成に対して課題となったのは、様々な人為的な数値拡散やフィルタの存在であった。これらのパラメータには任意性があるため、最適なパラメータを決定するためには複数の組み合わせについて、様々な事例に対する計算安定性を確認する必要があり、決して効率的な開発とは言えない。また、水平方向の数値拡散を計算するときには、並列計算機においてはデータ通信が必要となり計算効率を低下させる要因となっていた。さらに、開発効率の向上のためにコード・オプションの整理も必要であった。特に、第1.4節で述べる開発理念への対応のいくつかは大規模なコードの改良を伴うことから、既存のオプションとは整合が取れないことが懸念された。

asucaは、JMA-NHMの多くを引き継ぎつつ、気象庁における非静力学モデルの開発の歴史において判明した課題の修正を図っているところである。

---

[1] 石田 純一 (第1.2.1項)、藤田 匡 (第1.2.2項)

[2] JMA-NHM以前においても、時期により名称が異なる。詳細については斉藤 (2003) をご覧いただきたい。

1.2.2 データ同化システムの開発

本項では、気象庁の現業領域データ同化システムであるメソ解析 (MA) と局地解析 (LA) システムのこれまでの開発について述べる。

気象庁では現在、JMA-NHM による現業数値予報モデルとして MSM、LFM を運用している。その予報初期値はそれぞれ 4 次元変分法 (4D-Var) による MA、3 次元変分法 (3D-Var) による LA で作成される (本田・澤田 2009; 永戸ほか 2012)。このうち MA では、現業領域解析として世界初の 4D-Var である静力学 4D-Var を 2002 年に導入して以来 (石川・小泉 2002)、高度なデータ同化手法である 4D-Var による運用を行っている。

4D-Var では、数値予報モデルによる時間発展そのものを拘束条件として解の最適化を行い、数値予報モデルのバランスに整合した予報初期値を作成する。その計算過程では、時間の前方積分による摂動の時間発展の評価 [3] と、後方積分による摂動起源の探索を繰り返し実行する（4D-Var については、露木 (1997) などに詳しい)。このようなシステムの開発の過程では、通常接線形・随伴モデルを実装する。これらは、予報モデルのプログラムコードの各行にそれぞれ線形化 [4]、さらに転置を適用して実装されるため、開発には膨大な作業を要する。また、適用が必要な内容は各数値予報モデルプログラムに固有のものであるため、新しいモデルへの移行に伴い、新たに開発し実装する必要もある。

静力学 4D-Var の接線形・随伴モデルは、当時の MSM で用いられていた静力学スペクトルモデルに基づいて実装された。その後、2004 年に MSM の予報モデルが JMA-NHM に更新され、予報モデルに整合した新たな 4D-Var への移行が必要となった。この必要性は早くから認識され、JMA-NHM が現業化される前の 2002 年より JMA-NHM に基づく変分法データ同化システム JNoVA(Honda et al. 2005; 本田・澤田 2010) の開発が始まった。その後、接線形・随伴コードの開発を経て、業務化に向けた性能向上のための様々な改良を施し、2009 年 4 月に MA に JNoVA を導入した。さらに、JNoVA 4D-Var の現業化後にも、観測データの利用拡充をはじめとする様々な改良、また予報モデル JMA-NHM の改良などを継続的に行った結果、MSM の予報精度は着実に向上している。

一方、これまでの予報モデル更新に伴う 4D-Var の開発・運用を通して、4D-Var の開発・維持管理に関する課題も明らかになってきた (本田 2010a)。予報モデル JMA-NHM では、MSM としての運用の過程で様々な改良がなされてきたものの、これらは必ずしも JNoVA の接線形・随伴モデルに反映されておらず、両者の間の乖離が大きくなっている。JMA-NHM の改良を JNoVA に反映させるためには、その都度接線形・随伴モデルにこの改良を実装する必要があり、特に大規模な予報モデルの変更に追従し続けることは簡単ではない [5]。しかし、これはデータ同化システムの高度化にとって重要な課題である。4D-Var の運用にあたり、予報モデルと 4D-Var の接線形・随伴モデルの間の乖離を抑え、両者の整合性を保ちつつ運用する体制を整備することが求められている。

また、今後の予報モデルの高度化、高解像度化のため、物理過程の接線形・随伴モデルの開発が重要な課題となってくると考えられる (石川・藤田 2013)。物理過程では、大気の安定度や相転移などに応じた条件分岐や複雑な現象を近似する非線形な定式化がしばしば扱われる。このような場合、線形近似が成立する範囲が著しく制限され、非線形モデルを機械的に線形化して得られる接線形モデルでは予報精度が保てない恐れがある。また、高度で複雑な物理過程では計算コストがかかることも課題となる [6]。従って物理過程の振る舞いを適切に把握し、効率の良い線形モデルによって摂動の時間発展を適切に近似することがより重要になると考えられる。4D-Var の運用には、予報モデルの更新に対応した効率のよい開発スケジュールの設定や予報モデルの理解に基づいた実装の検討など、データ同化開発者と予報モデル開発者が緊密に連携し、接線形・随伴モデルの高度化を継続的に行う体制を作ることが重要である（詳細については 第 3.2 節を参照のこと)。

このような状況の中で、JMA-NHM の後継として次世代非静力学モデル asuca の開発が進み、この新しいモデルに基づく変分法データ同化システム asuca-Var の構築を 2011 年に開始した。本開発においては、上述のようなこれまでの 4D-Var の運用経験を通して得られた知見を生かす取り組みを目指しているところである。詳細については第 3 章を参照いただきたい。

[3] 第一推定値の修正による影響の伝播を評価する。具体的な実装では、接線形モデルによる摂動の時間発展により評価する手法、非線形モデルによる摂動を含んだ予報値と含まない予報値との差分により評価する手法、さらに、解像度を落としたり簡略化したりした線形または非線形モデルを用いて計算コストを抑えつつ評価する手法など様々な手法が用いられる（Courtier et al. (1994) など参照)。

[4] 非線形性が強く線形近似が著しく悪化する部分などを除外して部分的に線形化を行う場合もある。

[5] JMA-NHM コードの広範囲にわたる変更のうち JNoVA で追従していないものとして、領域 2 次元分割による並列化の導入 (荒波・石田 2008) や、第 1.2 節に挙げた鉛直座標の z*座標からハイブリッド座標への方程式系の高度化 (石田 2008) などが挙げられる。

[6] 本田 (2010b) は、JNoVA に雲物理過程を導入する検討を行い、雲物理過程を組み込んだ 4D-Var により、現業メソ解析で用いられている実観測データの同化に成功した。雲物理過程は非線形性が強く、検討に用いた接線形・随伴モデルでは、線形化を適用する部分の選別など、工夫を行っている。一方で、極小値探索の際の解の収束に悪化が見られたこと、計算時間が増大したことも報告している。

参考文献

荒波恒平, 石田純一, 2008: 並列化と高速化. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 58–65.

Courtier, P., J.-N. Thépaut, and A. Hollingsworth, 1994: A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **120**, 1367–1387.

永戸久喜, 藤田匡, 原旅人, 2012: 局地モデルの本運用. 平成 24 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 72–86.

郷田治稔, 栗原和夫, 1991: 非静力学モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 37 号, 気象庁予報部, 67–82.

本田有機, 澤田謙, 2009: 非静力学メソ 4 次元変分法の現業化. 平成 21 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 65–71.

Honda, Y., M. Nishijima, K. Koizumi, Y. Ohta, K. Tamiya, T. Kawabata, and T. Tsuyuki, 2005: A pre-operational variational data assimilation system for a non-hydrostatic model at the Japan Meteorological Agency: Formulation and preliminary results. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 3465–3475.

本田有機, 澤田謙, 2010: 非静力学メソ 4 次元変分法. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 7–37.

本田有機, 2010a: 将来計画. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 4–5.

本田有機, 2010b: 雲物理を考慮した 4 次元変分法. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 84–87.

Ikawa, M. and K. Saito, 1991: Description of a non-hydrostatic model developed at the Forecast Research Department of the MRI. *Tech. Rep. MRI*, **28**, 238pp.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

石川宜広, 小泉耕, 2002: メソ 4 次元変分法. 数値予報課報告・別冊第 48 号, 気象庁予報部, 37–59.

石川宜広, 藤田匡, 2013: 4 次元変分法の開発と物理過程の課題. 数値予報課報告・別冊第 59 号, 気象庁予報部, 152–187.

気象庁予報部, 2003: 気象庁非静力学モデル. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 194pp.

室井ちあし, 1998: 非静力モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 44 号, 気象庁予報部, 25–41.

Saito, K., T. Kato, H. Eito, and C. Muroi, 2001: Documentation of the Meteorological Research Institute / Numerical Prediction Division Unified Nonhydrostatic Model. *Tech. Rep. MRI*, **42**, 133pp.

斉藤和雄, 2003: 概論. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 1–15.

Saito, K., T. Fujita, Y. Yamada, J. Ishida, Y. Kumagai, K. Aranami, S. Ohmori, R. Nagasawa, S. Kumagai, C. Muroi, T. Kato, H. Eito, and Y. Yamazaki, 2006: The operational JMA Nonhydrostatic Mesoscale Model. *Mon. Wea. Rev.*, **134**, 1266–1298.

斉藤和雄, 石田純一, 荒波恒平, 中山寛, 2008: 計算安定性向上のための開発. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 52–57.

露木義, 1997: 変分法によるデータ同化. 数値予報課報告・別冊第 43 号, 気象庁予報部, 102–165.

1.3 各国の非静力学モデル・データ同化システムの開発動向 [1]

1.3.1 非静力学モデル

本項では世界各国における非静力学モデルの開発及びその運用に係る動向を述べる。第 1.2.1 項 で述べたように、研究用の雲解像非静力学モデルは比較的長い歴史を有している。これは、計算機資源に応じて予報領域を設定でき、少ない計算機資源でも利用可能であるためであり、様々な機関で開発が行われてきた。これら全てを網羅することは難しいことから、ここでは、主に国家気象機関における開発状況について述べる。

近年では、現業及び研究の双方で利用可能である数値予報モデルを複数の機関が共同して開発する動きが広まっている（このように開発された数値予報モデルをコミュニティモデルと呼ぶ）。特に、欧州においてはその動きが活発であり、フランスを中心とする ALADIN(**A**ire **L**imitée **A**daptation dynamique **D**éveloppement **I**nter**N**ational)、ドイツを中心とする COSMO(**Co**nsortium for **S**mall-scale **Mo**delling)、北欧を中心とする HIRLAM(**HI**gh **R**esolution **L**imited **A**rea **M**odel)、中欧を中心とする LACE(Limited Area modelling in Central Europe) など、いくつかのコンソーシアム [2] が形成されている。また、英国気象局 (United Kingdom Met Office: UKMO) は明示的にはコンソーシアムとはしていないが、いくつかの気象機関と協力関係がある。これらの国際的な協力関係図を図 1.3.1 に示した。以下では、各国のモデル開発の動向を述べる。なお、欧州においては、コンソーシアムとしての開発が多いことから、コンソーシアムと関連付けて述べることとする。なお、本項で示したウェブサイトの URL は 2014 年 1 月末の時点で利用可能であることを確認している。

(1) 米国

米国では米国大気研究センター (National Center for Atmospheric Research: NCAR) が中心となる力学コアの開発と、米国環境予測センター (National Centers for Environmental Prediction: NCEP) による力学コアの開発が行われている。そして、この両者の力学コアを統合した枠組みとして WRF(Weather Research and Forecasting model [3]) というモデルがある。この枠組みにおいて、NCAR は第 5 世代メソスケールモデル (The Fifth-Generation NCAR / Penn State Mesoscale Model: MM5) の改良版として WRF-ARW(ARW は Advanced Research WRF の略) と呼ばれる力学コアを開発する一方、NCEP は WRF-NMM(NMM は Non-hydrostatic Mesoscale Model の略) と呼ばれる力学コアを開発している。WRF では数値予報モデルの物理過程のみならず力学コアについても複数の選択肢が利用できるようになっており、前述の WRF-ARW と WRF-NMM は全く異なる力学コアでありながら、いずれかを選択できるようになっている (ただし、物理過程は完全に独立に選択できる仕様ではない)。NCEP においては WRF-ARW, WRF-NMM のいずれの力学コアも現業モデルで利用されている。

WRF-ARW の力学コアの最新ドキュメント (Skamarock et al. 2008) は上記ウェブサイトから利用可能であり、asuca の開発において大いに参考にしている。例えば、WRF-ARW の力学コアと asuca の類似点として、Arakawa C 格子 (Arakawa and Lamb 1977) を用いること、ドライモデルの場合に予報変数として $\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho\theta$ (ただし、ρ は密度、u, v, w は風速の 3 成分、θ は温位をそれぞれ表す) を用いること、時間積分法に 3 段階ルンゲクッタ法 (Wicker and Skamarock 2002) を用いること [4]、音波や重力波は split-explicit 法 (Klemp et al. 2007) で扱うこと、などがあげられる。もちろん、asuca の開発目標は WRF-ARW と同一の力学コアを作ることではなく、JMA-NHM の後継モデルを作ることであり、両者の力学コアは同一ではない。WRF-ARW の力学コアで asuca と異なる点として、移流スキームは 2 次精度から 6 次精度までを選択可能であること、移流により負の値が生じた際に Skamarock and Weisman (2009) による補正を行っていること、鉛直座標として気圧準拠の Laprise (1992) による hydrostatic-pressure coordinate を用いていること、水平にはマップファクターを用いて直交する座標系のみを用いていること、などがあげられる。

また、全球非静力学モデルの開発も研究ベースでは行われており、例えば、ボロノイ格子 [5] を用いた MPAS(Model for Prediction Across Scales; Skamarock et al. 2012) の開発が行われている。これは WRF-ARW の方程式系の多くを引き継いだ上で、高度準拠の鉛直座標への変更や、全球モデル向けの新たな水平格子系などを採用している。また、直交座標でない格子系において Arakawa C 格子を利用するために Thuburn et al. (2009) の手法を採用するとのことである。

(2) 欧州中期予報センター (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts: ECMWF)

ECMWF は全球モデルのみを運用するセンターであり、現時点では非静力学モデルは運用していない。しかしながら、将来の非静力学モデルの利用も念頭において開発が進められている。現在運用中のスペクトル

[1] 石田 純一 (第 1.3.1 項)、藤田 匡 (第 1.3.2 項)

[2] コンソーシアムとは上記のコミュニティモデルを開発するための組織を指す。

[3] `http://www.wrf-model.org/index.php`

[4] WRF-ARW はオプションとして 2 段階ルンゲクッタ法も利用可能である。

[5] 任意に配置された点に対して、隣接する 2 点を結ぶ直線の垂直 2 等分線により領域を分割することにより生成された格子。

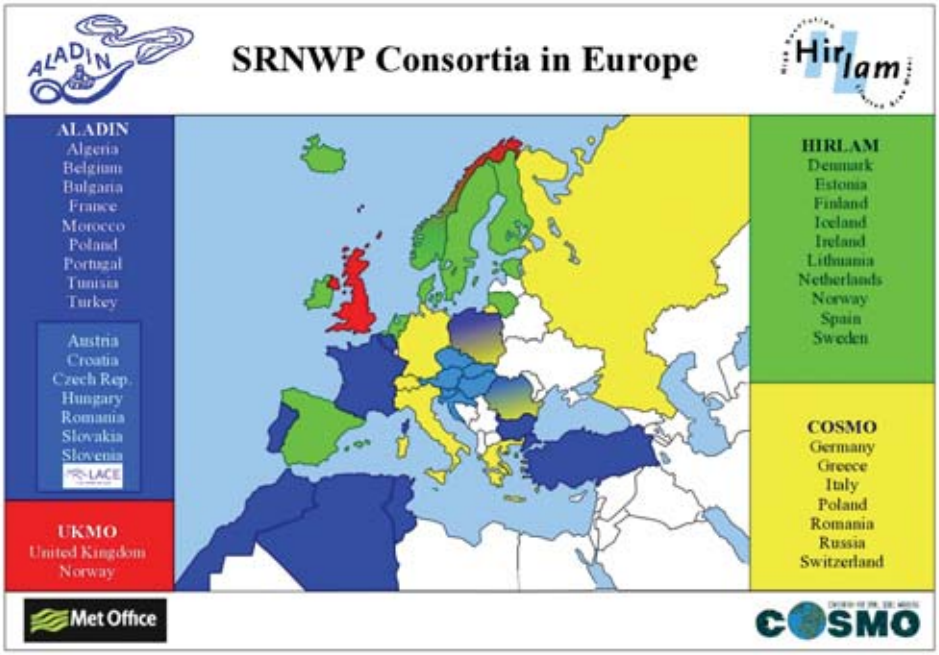

図 1.3.1 欧州における非静力学モデル開発の協力関係図（2012 年現在）。http://www.eumetnet.eu/c-srnwp より引用。

モデルによる静力学モデルをそのまま非静力学化することを目標に、高速ルジャンドル変換の開発等が進められている (Wedi et al. 2013)。

(3) 英国: UKMO

UKMO では、1990 年代には UKMO mesoscale model を用いていたが、その後、Unified Model として全球モデルと領域モデルの一本化を行った。UKMO で現在現業モデルとして用いられている力学コアは New Dynamics(Davies et al. 2005) と呼ばれるものであり、緯度経度座標を用いた格子モデルである。移流にはセミラグランジュ法を用いて、積分時間間隔を伸ばすとともに、音波に対しては semi-implicit 法を用いて安定化を図っている。Unified Model は UKMO だけでなく、ノルウェー気象局、オーストラリア気象局、韓国気象局、米国空軍などで用いられている [6] 。

これの後継となる力学コアが ENDGame (Even Newer Dynamics for General atmospheric modelling of the environment) である。これは New Dynamics を基としており、方程式系や上述のセミラグランジュ法、semi-implicit 法を維持しつつ、SLICE(Zerroukat et al. 2004) と呼ばれる保存性を高めたセミラグランジュ移流スキームの採用、semi-implicit 法で必要とされる連立方程式の離散化の変更、連立方程式を解く際の前処理の変更、といった改良を加えている [7] 。2013 年 8 月上旬にリリースされた Unified Model のバージョンから標準ジョブの力学コアが New Dynamics から ENDGame に切り替わり、現業化も間近な状況である (荒波、私信)。

当面の現業モデルとしては、上述の ENDGame が導入される段階であるが、UKMO ではさらに次のプロジェクトとして GungHo (Globally Uniform Next Generation Highly Optimised の略) [8] が開始されている。このプロジェクトは、現在 UKMO で運用中の緯度経度座標による格子モデルを高分解能化した場合に、極の問題が顕在化することから、様々な格子配置について比較を行った後に実際に採用するものを決定するためのものである。これは UKMO 単独のプロジェクトではなく、大学等の研究機関と共同で行っており、UKMO の力学部門と計算機部門から 5FTE [9]、バース大学、エクセター大学、インペリアルカレッジ、リーズ大学、マンチェスター大学、レディング大学から合計 5FTE、STFC(Science and Technology Facilities Council) から 2FTE の合計 12FTE による開発を行っている [10]。5ヶ年のプロジェクトとして、2011 年に開始され、最初の 2 年は調査を行い、次の 3 年は開発を行うとされている。このプロジェクトにおいて、力学コアにとっ

[6] http://srnwp.met.hu/Annual_Meetings/2013/download/monday/Mike_Bush.pdf

[7] http://srnwp.met.hu/Annual_Meetings/2013/download/monday/posters/Mike_Bush.pdf

[8] https://puma.nerc.ac.uk/trac/GungHo

[9] Full-Time Equivalent の略。フルタイムの職員に換算して何人分の職員に相当するかを表すもの。例えば、開発に 5FTE とはフルタイムを週 5 日とした場合に、週に 25 人・日の開発が行われることを指す。この場合、開発に従事する職員が 5 名とは限らず、例えば、10 名の職員が週に 2.5 日ずつ開発に従事するといった場合も含む。

[10] http://www.metoffice.gov.uk/media/pdf/9/i/PresentationMOSAC_16.10_Wood.pdf

て望ましい要件を検討し、その要件に基づいて様々な格子に対するレビュー (Staniforth and Thuburn 2012) を行っている。また、UKMO でこれまでに用いてきた直交座標である緯度経度座標から非直交座標への変更も念頭におくようになるため、Arakawa C 格子の非直交座標への適用について検討している。

(4) フランス: ALADIN

フランス気象局 (Météo France) では水平格子間隔 5〜10km 向けの ALADIN と、さらに高分解能の 2〜3km 向けの AROME(**A**pplications of **R**esearch to **O**perations at **ME**soscale) の開発を行っている [11]。なお、ALADIN は予報モデルの名称でもあるが、欧州を中心としたコンソーシアム (1990 年設立) の名称としても用いられる場合がある。力学コアの開発は ECMWF と共同で行っている。このモデルは、移流にはセミラグランジュ法を、音波の安定化には semi-implicit 法を用いるスペクトルモデルである。

また、コンソーシアム全体として HIRLAM との連携を強化している。現時点でモデルやソースコードを共通化しているところであり、今後は管理体制の共通化も図っていく予定である [12] 。近年の力学コアの開発課題として、鉛直有限要素法の導入に取り組んでいる。

(5) ドイツ: COSMO

COSMO はドイツ気象局 (Deutscher Wetterdienst: DWD) が中心となって開発しているモデルであるが、イタリア、スイスの気象機関も開発に積極的に参加している。DWD では JMA-NHM や MM5 と同様の力学コアを持つ LM(Lokal-Modell) を開発・運用していたが、2000 年代には新たな数値予報モデルとして COSMO の開発を開始しており、力学コアも改良が加えられている [13]。COSMO は DWD のみならず各国の気象機関で現業運用されている。COSMO は格子モデルであり、時間積分法には 3 段階ルンゲクッタ法を用い、音波に対しては split-explicit 法を用いるなど asuca や WRF-ARW の力学コアと近いものがある。

COSMO はコンソーシアムの名称でもあり、1998 年に設立されている。COSMO は領域モデルのコンソーシアムであるが、DWD は全球モデル (正 20 面体格子による静力学モデル) の運用も行っており、正 20 面体格子による全球非静力学モデル ICON(ICOsahedral Nonhydrostatic model) の開発をドイツ・マックスプランク研究所と共同して行ってきた。この開発が進み現業モデルとしての利用の目処がたってきたこと、及び領域モデル版の運用が可能となったことから、DWD の全球モデルを ICON へ移行すると共に、これまでに COSMO が独自に開発・運用してきた領域モデルを ICON の領域モデル版に置き換えるための検討を行う方針が 2013 年にコンソーシアムとして決定された [14]。これによると、DWD では既に導入を予定しており、その他の機関でも 2020 年までに現業モデルとしての評価を行った後に順次移行していく計画である。ICON への移行後も COSMO コンソーシアムとしての活動は継続し、ICON の領域モデル版の運用に責任を持つことになる。

(6) カナダ

カナダ環境省 (Environmental Canada) のカナダ気象センター (Canadian Meteorological Center: CMC) における現業全球非静力学モデル GEM(Global Environmental Multiscale operational model) は緯度経度座標による格子モデルであり、移流にはセミラグランジュ法を、音波の安定化には semi-implicit 法を用いている [15]。現在、Yin-Yang 格子による全球非静力学モデルを開発中である (Qaddouri and Lee 2011)。これは、GEM が緯度経度座標を用いており、将来的に極の問題に直面すると考えられることから、その拡張を念頭においたものである。

(7) 北欧: HIRLAM

HIRLAM は北欧を中心としたコンソーシアムであり、欧州のコンソーシアムの中では設立がもっとも古く 1985 年である。近年は ALADIN との連携を深め、モデルやソースコードの共通化を図っている。なお、新たな力学コアの開発は行っていない。

(8) 中欧: LACE

LACE は中欧を中心としたコンソーシアムである。ALADIN の内部コンソーシアムのような側面もあり、LACE の参加機関は全て ALADIN の参加機関でもある。力学コアは ALADIN と共用化している。

力学コアの設計には様々な自由度があり、各機関・コンソーシアムの力学コアの違いとなって現れている。それぞれの力学コアの改良に際しては、開発・運用から得られた知見を踏まえて、改良すべき点と維持すべき点を見極めて方向性を選択していると考えられる。例えば、ECMWF はスペクトルモデルによるセミラグランジュ法と semi-implicit 法を維持するために高速ルジャンドル変換の開発を行っている。UKMO においては、高分解能化した際の緯度経度座標の極の問題を改善すべき点と考え、様々な格子を検討しつつ、これまでに運用してきた Arakawa C 格子に対する開発も行っている。いずれの機関もそれまで培ってきた実績から

[11] ドキュメントは
http://www.cnrm.meteo.fr/arome/doc/arodoc.pdf
から入手可能。

[12] http://srnwp.met.hu/Annual_Meetings/2013/download/monday/Piet_Termonia.pdf

[13] 力学コアのドキュメントは
http://www.cosmo-model.org/content/model/documentation/core/cosmoDyncsNumcs.pdf
から利用可能。

[14] http://srnwp.met.hu/Annual_Meetings/2013/download/monday/Michal_Ziemianski.pdf

[15] http://collaboration.cmc.ec.gc.ca/science/rpn/publications/pdf/GEM4.1.pdf

かけ離れた開発は行わないようである。

また、全球静力学モデルから非静力学モデルへの拡張、あるいは将来の高分解能化で問題となりうる極の問題を回避するための改良が行われている。

asuca の開発においても、気象庁における利用をふまえてその改良すべき点・維持すべき点を精査し、その上で開発の方向性を定めていく必要がある。その際、各機関の動向について幅広く着目していく必要があるものの、asuca の力学コアとの類似点を考えると、WRF-ARW と COSMO の動向への着目が特に重要であろう。また、asuca-Global は Yin-Yang 格子を採用していることから、カナダ気象センターの動向も着目すべきところである。

1.3.2 データ同化システム

引き続き、各国におけるデータ同化システムの開発への取り組みについて述べる。データ同化で使われる技術やその開発課題は、全球モデルと領域モデル、非静力学モデルと静力学モデルの初期値作成で共通する部分や、関連している部分も多いため、これらを含めた全般的な動向について記述する。なお、本項で示したウェブサイトの URL は 2014 年 1 月末の時点で利用可能であることを確認している。

(1) 米国

NCEP では、全球解析 GDAS (Global Data Assimilation System) をデータ同化システム GSI (Gridpoint Statistical Interpolation) の 3D-Var で運用している。2012 年に 3D-Var の制御変数を拡張するとともに、EnKF（Ensemble Kalman Filter; 三好 (2006) などを参照）とのハイブリッドデータ同化を現業化した (Wang et al. 2013b) [16]。また、領域モデルとして水平格子間隔 12 km の NAM (North American Mesoscale Forecast System) を北米大陸を中心とする領域で運用している (Rogers et al. 2009)[17]。初期値作成はデータ同化システム NDAS (NAM Data Assimilation System) により、全球予報値を第一推定値とし、GSI 3D-Var による解析と 3 時間予報を交互に繰り返す 12 時間解析サイクルで行われている [18]。また、全球 EnKF のアンサンブル摂動を用いたハイブリッド化が計画されている [19]。さらに、北米域を対象とする水平格子間隔 13 km の領域モデル RAPv1 (Rapid Refresh version 1) を毎時実行している [20]。RAPv1 の初期値は水平格子間隔 27 km の 3D-Var と Radar DFI (Radar Digital Filter Initialization; Weygandt et al. 2008; Benjamin et al. 2004, 2008) によるレーダー反射強度の同化により作成している。同時に、NOAA の地球システム研究所 (Earth System Research Laboratory: ESRL) では、RAPv2 (RAP version 2) として、RAPv1 に改良を加えたシステムを試験的に運用しつつ高度化を進めている。RAPv2 では、2013 年に全球 EnKF のアンサンブル摂動を用いて 3D-Var の制御変数拡張によるハイブリッド化を行った (Hu et al. 2013)。これは、2014 年初めに NCEP に移植され、現業運用される予定である。さらに、開発中であるが、米国を覆う水平格子間隔 3 km の HRRR (High Resolution Rapid Refresh) をリアルタイムで毎時実行している [21]。HRRR では、水平格子間隔 12 km の 3D-Var と Radar DFI で初期値を作成している。

また、米国では研究機関においていくつか領域モデルの 4D-Var が開発されている。Sun et al. (1991) は主に NCAR における研究で、雲解像モデルに基づく 4D-Var による高解像度レーダーデータ同化システム VDRAS (Variational Doppler Radar Analysis System) を開発した (Sun and Crook 1997, 1998; Sun 2005; Sun and Zhang 2008; Sun et al. 2010)。また、コミュニティモデル WRF に基づく 4D-Var (Huang et al. 2009; Zhang et al. 2013) が NCAR により開発され、WRFDA (WRF model's Community Variational/Ensemble Data Assimilation System) の一部として公開されている (Barker et al. 2012; Sun and Wang 2013)。WRFDA は、制御変数を拡張し、ハイブリッドデータ同化にも対応している (Wang et al. 2008a,b)。

(2) ECMWF

ECMWF では、1997 年より 4D-Var による全球解析を運用している (ECMWF 2013; Rabier et al. 2000; Mahfouf and Rabier 2000; Klinker et al. 2000)。運用開始後にも様々な改良がなされ、精度向上を図っている。この中で、物理過程の接線形・随伴モデルの高度化も行われており、接線形・随伴モデルの継続的な開発に成功している例として注目される (Janisková and Lopez 2012)。さらに、背景誤差の作成手法の高度化も進めており、2010 年より、EDA（Ensemble of Data Assimilations: 解析システムの不確定性の起源に対応する摂動を加えた複数の 4D-Var 解析サイクルによるアンサンブル）から評価した背景誤差分散を使用することにより、流れへの依存性を考慮している (Bonavita

[16] さらに、接線形・随伴モデルを用いないデータ同化手法である 4D-EnVar(Liu et al. 2008, 2009; Buehner et al. 2010a,b) への拡張の開発を研究機関、大学などと共同で進めている (Kleist 2013; Wang et al. 2013a)。これと並行して接線形、随伴モデルによる 4D-Var の構築も進めているものの、計算コストが課題となっている (Rancic et al. 2012)。

[17] NAM の領域内のいくつかの狭領域でネスティングによるより高解像度のモデルも実行している。

[18] NAM、NDAS については `http://www.emc.ncep.noaa.gov/NAM` に解説がある。

[19] 2013 年 12 月時点で計画されている更新に関して `http://www.emc.ncep.noaa.gov/mmb/mmbpll/misc/MMB_NAM+HIRESW_NPSR2013.ppt` に解説がある。

[20] RAPv1/v2 については、`http://rapidrefresh.noaa.gov/` に解説がある。

[21] HRRR については、`http://ruc.noaa.gov/hrrr/` に解説がある。

et al. 2011, 2012; Isaksen et al. 2010)[22]。EnKF をはじめ接線形・随伴モデルを必要としないアンサンブルデータ同化手法の検討も見られるものの (Hamrud and Bonavita 2012)、引き続き接線形・随伴モデルによる 4D-Var に重点を置いており、さらなる高度化に向けた開発を進めている (Fisher et al. 2011; Fisher and Gürol 2013; Isaksen et al. 2013; Trémolet 2013)。

(3) 英国

UKMO では、全球解析 (Rawlins et al. 2007; Stiller and Ballard 2009; Stiller 2009) のほか、北大西洋から欧州域を対象とする NAE (North Atlantic and European regional model) で 4D-Var（インナーループ水平格子間隔 36 km）を運用している (Macpherson 2005; Lorenc 2006)。第 1.3.1 項で述べたように、UKMO では全球モデルと領域モデルが Unified Model として一本化されている。これを生かして、NAE では全球解析と概ね同様の接線形･随伴モデルを使用している。このほか、高解像度のモデルとして、英国を覆う領域を対象として水平格子間隔 1.5 km の UKV を 2010 年より運用している。UKV の初期値は 3D-Var（水平格子間隔 3 km）と降水強度の潜熱ナッジングによって作成される (Macpherson et al. 1996; Jones and Macpherson 1997; Dixon et al. 2009)。さらに、2012 年のロンドンオリンピックに合わせて、数値予報モデルに基づいたナウキャストの試みとして、英国南部域を対象に、水平格子間隔 1.5 km のモデルを毎時実行するシステムを開発し、試験的なリアルタイム実行を行った (Nowcasting Demonstration Project: NDP; Ballard and Lean 2012; Ballard et al. 2012; Pierce et al. 2012)。このシステムの予報初期値作成には、水平格子間隔 3 km、同化ウィンドウ 1 時間の 4D-Var が用いられた[23]。4D-Var の計算実行時間は 3〜10 分と、効率の良いシステムとなっている。現在、現業化に向け改良をさらに進めており (Hawkness-Smith et al. 2012)、毎時運用可能な高解像度 4D-Var を実現した例として注目される。なお、全球解析では、制御変数拡張による 4D-Var の全球アンサンブル予報システム[24] とのハイブリッド化を 2011 年に現業化した (Clayton et al. 2013)。また、NDP に見られるように接線形・随伴モデルに基づいた 4D-Var の開発を進めている一方で、全球に関しては、接線形・随伴モデルを用いず、アンサンブル摂動の統計によって背景誤差の時間相関を評価する 4D-EnVar(Liu et al. 2008, 2009; Buehner et al. 2010a,b) の検討も同時に進めている (Flowerdew et al. 2013; Lorenc et al. 2013)。

(4) フランス

Météo France では全球モデル Arpège (Action de Recherche Petit Ehelle Grande Echelle) を運用しており、4D-Var により初期値を作成している (Veersé and Thépaut 1998)。ECMWF と共同開発を行っており、全球モデル、変分法データ同化のコードの多くの部分を ECMWF の全球モデル、同化システム IFS (Integrated Forecasting System) と共有している (Yessad 2013)。2008 年より、全球 4D-Var に、ECMWF 同様 EDA による流れに依存する背景誤差分散を導入しており (Raynaud et al. 2011)、高度化に向けた開発を進めている (Raynaud et al. 2012)。また、領域数値予報のための拡張を行い、水平格子間隔 2.5 km の非静力学モデル AROME をフランス域で運用しており[25]、3D-Var による初期値作成を行っている (Seity et al. 2011; Brousseau et al. 2008)。6 時間ごとの予報初期値は、3 時間同化ウィンドウの 3D-Var データ同化サイクル 2 回で作成される[26]。また、気候学的背景誤差として、3D-Var による AROME のアンサンブルデータ同化により評価したものを用いている (Brousseau et al. 2011)。さらに、AROME アンサンブル予報による流れへの依存性の検討 (Brousseau et al. 2012)、特に降水域など気象条件に応じた背景誤差特性に注目した背景誤差の検討 (Montmerle 2012) など、背景誤差の設計を高度化するための検討を重点的に進めている。

(5) ドイツ

DWD では、全球モデル GME (Global Model for Europe) の初期値作成を 3D-Var で行っている (Anlauf et al. 2012, 2011; Majewski et al. 2012)。また、領域モデルとして COSMO モデルにより、欧州域を対象とする水平格子間隔 7 km の COSMO-EU (COSMO Europe) と、ドイツ域を対象とする水平格子間隔 2.8 km の COSMO-DE (COSMO Deutschland) を運用しており、これらのモデルの初期値作成はいずれもナッジングに基づいている (Schraff and Hess 2012; Baldauf et al. 2011; Schraff 1996, 1997)。COSMO-DE では、潜熱ナッジングによって、レーダーによる降水強度も利用している (Klink and Stephan 2004; Stephan et al.

[22] さらに、2013 年 6 月時点の計画では 2013 年 11 月に背景誤差共分散についても EDA による流れへの依存性の導入が予定されている (Isaksen 2013)。

[23] 潜熱ナッジングによるレーダー降水強度の同化も併用している。

[24] MOGREPS (the Met Office Global and Regional Ensemble Prediction System; Bowler et al. 2008) の全球部分。 ETKF (Ensemble Transform Kalman Filter; Bishop et al. 2001; Wang et al. 2004) によって初期摂動を作成している。

[25] Arpège に基づく領域モデル ALADIN（現在はフランス海外県、海外領土でのみ運用）と、静力学部分のコードの大部分を共有している。物理過程については、フランスの研究コミュニティ非静力学モデルである Meso-NH の高解像度予報に適した物理過程を多く使用している (Yessad 2013)。`http://www.cnrm.meteo.fr/arome/`

[26] 1 時間ウィンドウでの同化について、DFI (Digital Filter Initialization)、IAU(Incremental Analysis Updates; Bloom et al. 1996) など、同化サイクルでの解析値のバランスを確保する手法の併用も含めて試みているが、予報精度の低下が見られ今のところ採用されていない (Seity et al. 2011; Montmerle 2013)。

2008)。DWD では、将来の方向性として LETKF (Local Ensemble Transform Kalman Filter; Hunt et al. 2007) によるデータ同化システムの高度化を行う方針をとっている (Reich et al. 2011; Schraff 2012a,b, 2013)。全球解析については、LETKF の開発を進め 3D-Var とのハイブリッド手法を目指している。また、水平格子間隔 1〜3 km 程度の高解像度アンサンブル予報を目標に、COSMO-DE に LETKF を適用した高解像度領域データ同化システムの開発も進めている。

(6) カナダ

CMC では、2005 年より全球モデルの初期値作成を 4D-Var で行っている (Gauthier et al. 2007)。また、全球アンサンブル予報初期値作成のために、2005 年より EnKF の運用も行っている (Houtekamer and Mitchell 2005)。領域モデルとしては、北米から北極域を覆う領域で水平格子間隔 10 km のモデルを運用しており、全球予報と共通のモデルを用いている (Fillion et al. 2010)。2012 年より、領域モデルについても初期値作成は 4D-Var で実行している (Tanguay et al. 2012)。インナーモデルは水平格子間隔 100 km である。さらに、水平格子間隔 2.5 km の高解像度領域モデルを 5 つの狭領域で実行しているが [27]、初期値の作成においてデータ同化は行わず、領域モデルからダウンスケーリングする手法を採用している [28]。

CMC では、全球データ同化システムとして運用している 4D-Var と EnKF、さらにこれらのハイブリッド手法の比較に積極的に取り組んでいる (Buehner et al. 2010a,b)。現在、接線形・随伴モデルを必要としない 4D-EnVar への移行を目指して、このデータ同化手法の精度調査を進めている (Buehner et al. 2013)。

(7) 北欧

北欧を中心とする HIRLAM コンソーシアムでは、4D-Var を開発・運用している (Gustafsson et al. 2012, 2006; Huang et al. 2002)。力学の接線形・随伴モデルは HIRLAM 領域スペクトルモデルに基づいている [29] が、物理過程の接線形・随伴モデルについては、HIRLAM モデルの物理過程を線形化したもの (Yang 2002) のほか、Buizza (1993) (ECMWF) や Janisková et al. (1999) (Météo France) によるパッケージなども適用可能である。この開発成果はスウェーデン、フィンランド、アイルランドの領域解析で現業化されている (Gustafsson et al. 2012)。第 1.3.1 項で述べたように、HIRLAM は近年フランスを中心とするコンソーシアム ALADIN との連携を深め、コードを共通化したモデル、データ同化システム HARMONIE (HIRLAM ALADIN Regional/Meso-scale Operational NWP in Europe) の構築を進めており、この中で HARMONIE4D-Var の開発にも取り組んでいる (Lindskog et al. 2011)。また、HIRLAM コンソーシアムは ETKF(Bishop et al. 2001) を HIRLAM モデルに適用するシステムを開発し (Bojarova et al. 2011)、これに基づいた 4D-EnVar の検討も行っている (Gustafsson and Bojarova 2013)。

全体的なデータ同化システムの開発動向としては、次のような点が挙げられる。

1. 4D-Var によるデータ同化の豊富な運用実績を持つセンターでは、接線形・随伴モデルの高度化に引き続き重点を置いて開発が進められている。

2. 変分法の背景誤差に、アンサンブル摂動による流れへの依存性を考慮するハイブリッド手法が、広く用いられている。制御変数拡張による実装法 (Lorenc 2003; Buehner 2005; Wang et al. 2008a) は、比較的低いコストで実現でき、多くの既存の変分法システムに導入されている。

3. 4D-EnVar が注目されている。これは、接線形・随伴コードの維持管理が不要なこと、大規模並列計算に対応しやすく高解像度化などにも有利であること、非線形モデルによる摂動の時間発展を用いることなどによる [30]。一方で、局所化の扱い（解析場のバランスへの影響、シグナルの移流への対応）、気候学的背景誤差を動的に扱うのが困難であること、モデルバイアスによる影響を受けやすいことなど、未解決の課題も残されている。

今後、気象庁においても、以上で述べたような世界的な動向に注目し、高い性能が期待される手法を取り入れつつ運用に最適なデータ同化システムを構築していくことが重要と考えられる。

参考文献

Anlauf, H., D. Pingel, and A. Rhodin, 2011: Assimilation of GPS radio occultation data at DWD. *Atmos. Meas. Tech.*, **4**, 1105–1113.

Anlauf, H., A. Rhodin, H. Frank, and A. Engel, 2012: The impact of satellite data on GME short-range forecasts – A case study. *DWD Internal Report*, DWD, 21 pp.

Arakawa, A. and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the

[27] このうち 1 つが現業運用、4 つは試験的な運用（うち 1 つは季節を限定した運用）である。

[28] `http://weather.gc.ca/grib/grib2_HRDPS_HR_e.html` に解説がある。

[29] HIRLAM では、格子点モデル、スペクトルモデル両方のモードが利用できる (Gustafsson and Huang 1996)。

[30] EnKF も同様の特徴を持ち広く研究が行われている。EnKF との比較では、4D-EnVar の手法的な観点からの特徴としては、背景誤差のハイブリッド化や解析値のバランスを考慮する拘束条件を組み込みやすいことなどが挙げられる。今後、現業運用の観点からの各手法の特徴も明らかになってくるものと思われる。

UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, Academic Press, Vol. 17, 173–265.

Baldauf, M., J. Förstner, S. Klink, T. Reinhardt, C. Schraff, A. Seifert, and K. Stephan, 2011: Kurze Beschreibung des Lokal-Modells Kürzestfrist COSMO-DE (LMK) und seiner Datenbanken auf dem Datenserver des DWD (in German, Short description of the convection resolving model COSMO-DE and its databases on the data server of DWD). DWD, 81 pp.

Ballard, S. and H. Lean, 2012: Nowcasting and high resolution forecast development. *MOSAC paper*, **17.14**, UK Met Office, Exeter, UK, 9 pp.

Ballard, S., Z. Li, D. Simonin, H. Buttery, C. Charlton-Perez, N. Gaussiat, and L. Hawkness-Smith, 2012: Use of radar data in NWP-based nowcasting in the Met Office. *IAHS Publ.*, **351**, 336–341.

Barker, D., X.-Y. Huang, Z. Liu, T. Auligné, X. Zhang, S. Rugg, R. Ajjaji, A. Bourgeois, J. Bray, Y. Chen, M. Demirtas, Y.-R. Guo, T. Henderson, W. Huang, H.-C. Lin, J. Michalakes, S. Rizvi, and X. Zhang, 2012: The Weather Research and Forecasting Model's Community Variational/Ensemble Data Assimilation System: WRFDA. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **93**, 831–843.

Benjamin, S., S. S. Weygandt, J. M. Brown, T. Smirnova, D. Devenyi, K. Brundage, G. Grell, S. Peckham, W. R. Moninger, T. W. Schlatter, T. L. Smith, and G. Manikin, 2008: Implementation of the Radar-Enhanced RUC. *Preprints 13th Conf. Aviation, Range and Aerospace Meteorology, January 2008, New Orleans, LA, Amer. Meteor. Soc.*, 7 pp.

Benjamin, S. G., D. Dévényi, S. S. Weygandt, K. J. Brundage, J. M. Brown, G. A. Grell, D. Kim, B. E. Schwartz, T. G. Smirnova, T. L. Smith, and G. S. Manikin, 2004: An hourly assimilation-forecast cycle: The RUC. *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 495–518.

Bishop, C. H., B. J. Etherton, and S. J. Majumdar, 2001: Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I: Theoretical aspects. *Mon. Wea. Rev.*, **129**, 420–436.

Bloom, S. C., L. L. Takacs, A. M. da Silva, and D. Ledvina, 1996: Data Assimilation Using Incremental Analysis Updates. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 1256–1271.

Bojarova, J., N. Gustafsson, Å. Johansson, and O. Vignes, 2011: The ETKF rescaling scheme in HIRLAM. *Tellus A*, **63**, 385–401.

Bonavita, M., L. Isaksen, and E. Hólm, 2012: On the use of EDA background error variances in the ECMWF 4D-Var. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **138**, 1540–1559.

Bonavita, M., L. Raynaud, and L. Isaksen, 2011: Estimating background-error variances with the ECMWF Ensemble of Data Assimilations system: some effects of ensemble size and day-to-day variability. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 423–434.

Bowler, N. E., A. Arribas, K. R. Mylne, K. B. Robertson, and S. E. Beare, 2008: The MOGREPS short-range ensemble prediction system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 703–722.

Brousseau, P., L. Berre, F. Bouttier, and G. Desroziers, 2011: Background-error covariances for a convective-scale data-assimilation system: AROME-France 3D-Var. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 409–422.

Brousseau, P., L. Berre, F. Bouttier, and G. Desroziers, 2012: Flow-dependent background-error covariances for a convective-scale data assimilation system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **138**, 310–322.

Brousseau, P., F. Bouttier, G. Hello, Y. Seity, C. Fischer, L. Berre, T. Montmerle, L. Auger, and S. Malardel, 2008: A prototype convective-scale data assimilation system for operation: The AROME-RUC. *HIRLAM Tech. Rep.*, **68**, 23–30.

Buehner, M., 2005: Ensemble-derived stationary and flow-dependent background-error covariances: evaluation in a quasi-operational NWP setting. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 1013–1043.

Buehner, M., P. L. Houtekamer, C. Charette, H. L. Mitchell, and B. He, 2010a: Intercomparison of Variational Data Assimilation and the Ensemble Kalman Filter for Global Deterministic NWP. Part I: Description and Single-Observation Experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 1550–1566.

Buehner, M., P. L. Houtekamer, C. Charette, H. L. Mitchell, and B. He, 2010b: Intercomparison of Variational Data Assimilation and the Ensemble Kalman Filter for Global Deterministic NWP. Part II: One-Month Experiments with Real Observations. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 1567–1586.

Buehner, M., J. Morneau, and C. Charette, 2013: Four-dimensional ensemble-variational data assimilation for global deterministic weather prediction. *Nonlin. Processes Geophys.*, **20**, 669–682.

Buizza, R., 1993: Impact of simple vertical diffusion

scheme and of the optimization time interval on optimal unstable structures. *ECMWF Tech. Memo.*, **192**, ECMWF, Reading, UK.

Clayton, A. M., A. C. Lorenc, and D. M. Barker, 2013: Operational implementation of a hybrid ensemble/4D-Var global data assimilation system at the Met Office. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **139**, 1445–1461.

Davies, T., M.J.P Cullen, A.J. Malcolm, M.H. Mawson, A. Staniforth, A.A. White, and N. Wood, 2005: A new dynamical core for the Met Office's global and regional modelling of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 1759–1782.

Dixon, M., Z. Li, H. Lean, N. Roberts, and S. Ballard, 2009: Impact of data assimilation on forecasting convection over the United Kingdom using a high-resolution version of the Met Office Unified Model. *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 1562–1584.

ECMWF, 2013: Part II: Data Assimilation. *IFS Documentation Cy38r1*, ECMWF, Reading, UK, 176 pp.

Fillion, L., M. Tanguay, E. Lapalme, B. Denis, M. Desgagne, V. Lee, N. Ek, Z. Liu, M. Lajoie, J.-F. Caron, and C. Pagé, 2010: The Canadian Regional Data Assimilation and Forecasting system. *Wea. Forecasting*, **25**, 1645–1669.

Fisher, M. and S. Gürol, 2013: Time-parallel algorithms for 4D-Var. *presentation at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Fisher, M., Y. Trémolet, H. Auvinen, D. Tan, and P. Poli, 2011: Weak-Constraint and Long-Window 4D-Var. *ECMWF Tech. Memo.*, **655**, ECMWF, Reading, UK, 49 pp.

Flowerdew, J., S. Pring, P. Jermey, A. Lorenc, N. Bowler, and A. Clayton, 2013: Initial Trials of 4D-Ensemble-Var. *poster at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Gauthier, P., M. Tanguay, S. Laroche, S. Pellerin, and J. Morneau, 2007: Extension of 3DVAR to 4DVAR: Implementation of 4DVAR at the Meteorological Service of Canada. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 2339–2354.

Gustafsson, N. and J. Bojarova, 2013: HIRLAM 4DEnsVar – discussion and first results. *presentation at Joint 23rd ALADIN Workshop and HIRLAM All Staff Meeting, April 2013, Reykjavik, Iceland.*

Gustafsson, N. and X.-Y. Huang, 1996: Sensitivity experiments with the spectral HIRLAM and its adjoint. *Tellus A*, **48**, 501–517.

Gustafsson, N., X.-Y. Huang, X. Yang, K. Mogensen, M. Lindskog, O. Vignes, T. Wilhelmsson, and S. Thorsteinsson, 2012: Four-dimensional variational data assimilation for a limited area model. *Tellus A*, **64**, 14 985.

Gustafsson, N., E. Källén, and S. Thorsteinsson, 2006: Sensitivity of forecast errors to initial and lateral boundary conditions. *Tellus A*, **50**, 167–185.

Hamrud, M. and M. Bonavita, 2012: EnKF for global NWP: The experience at ECMWF. *presentation at the 5th EnKF Workshop. May 2012, Carey Meeting Center, Rensselaerville, NY.*

Hawkness-Smith, L., N. Gaussiat, H. Buttery, C. Charlton-Perez, and S. Ballard, 2012: Variational assimilation of radar reflectivity data at the Met Office. *extended abstract for the Seventh European Conference on Radar in Meteorology and Hydrology (ERAD2012), June 2012, Toulouse, France*, 6 pp.

Houtekamer, P. L. and H. L. Mitchell, 2005: Ensemble Kalman filtering. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 3269–3289.

Hu, M., D. Dowell, S. Weygandt, S. Benjamin, J. Whitaker, and C. Alexander, 2013: Improving GSI 3DVAR-Ensemble Hybrid Data Assimilation System for Mesoscale Application with the Rapid Refresh. *poster at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Huang, X.-Y., X. Yang, N. Gustafsson, K. S. Mogensen, and M. Lindskog, 2002: Four-Dimensional Variational Data Assimilation for a Limited Area Model. *HIRLAM Technical Report*, **57**, 44 pp., URL `http://hirlam.org/`.

Huang, X.-Y., Q. Xiao, D. M. Barker, X. Zhang, J. Michalakes, W. Huang, T. Henderson, J. Bray, Y. Chen, Z. Ma, J. Dudhia, Y. Guo, X. Zhang, D.-J. Won, H.-C. Lin, and Y. H. Kuo, 2009: Four-Dimensional Variational Data Assimilation for WRF: Formulation and Preliminary Results. *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 299–314.

Hunt, B. R., E. J. Kostelich, and I. Szunyogh, 2007: Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter. *Physica*, **D230**, 112–126.

Isaksen, L., 2013: The Operational Data Assimilation System. *presentation at ECMWF Training Course: Numerical Weather Prediction, Data Assimilation*

and Use of Satellite Data. June 2013, ECMWF, Reading, UK.

Isaksen, L., M. Bonavita, R. Buizza, M. Fisher, J. Haseler, M. Leutbecher, and L. Raynaud, 2010: Ensemble of Data Assimilations at ECMWF. *ECMWF Tech. Memo.*, **636**, ECMWF, Reading, UK, 48 pp.

Isaksen, L., M. Bonavita, and E. Holm, 2013: The ECMWF Hybrid 4D-Var and Ensemble of Data Assimilations. *presentation at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Janisková, M. and P. Lopez, 2012: Linearized physics for data assimilation at ECMWF. *ECMWF Tech. Memo.*, **666**, ECMWF, Reading, UK, 26 pp.

Janisková, M., J.-N. Thépaut, and J.-F. Geleyn, 1999: Simplified and regular physical parameterizations for incremental four-dimensional variational assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 26–45.

Jones, C. D. and B. Macpherson, 1997: A latent heat nudging scheme for the assimilation of precipitation data into an operational mesoscale model. *Meteorological Applications*, **4**, 269–277.

Kleist, D., 2013: Hybrid Variational-Ensemble Data Assimilation at NCEP. *presentation at Workshop on Probabilistic Approaches to Data Assimilation for Earth Systems. February 2013, Banff International Research Station, Banff, Alberta, Canada.*

Klemp, J. B., W. C. Skamarock, and J. Dudhia, 2007: Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 2897–2913.

Klink, S. and K. Stephan, 2004: Assimilation of Radar Data in the LM at DWD. *COSMO Newsletter*, **4**, 143–150.

Klinker, E., F. Rabier, G. Kelly, and J.-F. Mahfouf, 2000: The ECMWF operational implementation of four-dimensional variational assimilation. III: Experimental results and diagnostics with operational configuration. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1191–1215.

Laprise, R., 1992: The Euler Equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 197–207.

Lindskog, M., O. Vignes, N. Gustafsson, T. Aspelien, R. Randriamampianina, M. Hortal, U. Andræ, P. Dahlgren, B. Chapnik, O. Rivière, C. Fischer, G. Bölöni, F. Meier, B. Strajnar, A. Bucanek, and V. Kovač, 2011: 4D-Var HARMONIE Developments. *HIRLAM Newsletter*, **58**, 2–7.

Liu, C., Q. Xiao, and B. Wang, 2008: An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part I: Technical formulation and preliminary test. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 3363–3373.

Liu, C., Q. Xiao, and B. Wang, 2009: An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part II: Observing System Simulation Experiments with the Advanced Research WRF (ARW). *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 1687–1704.

Lorenc, A., 2006: Global and Regional Data Assimilation Progress and Plans. *MOSAC paper*, **11.7**, UK Met Office, Exeter, UK, 10 pp.

Lorenc, A., N. Bowler, A. Clayton, D. Fairbairn, J. Flowerdew, and S. Pring, 2013: Diagnosis of implicit covarinaces in 4DEnVar. *presentation at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Lorenc, A. C., 2003: The potential of the ensemble Kalman filter for NWP – a comparison with 4D-Var. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **129**, 3183–3203.

Macpherson, B., 2005: Regional 4D-Var. *MOSAC paper*, **10.2**, UK Met Office, Exeter, UK, 10 pp.

Macpherson, B., B. J. Wright, W. H. Hand, and A. J. Maycock, 1996: The impact of MOPS moisture data in the U.K. Meteorological Office mesoscale data assimilation scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 1746–1766.

Mahfouf, J.-F. and F. Rabier, 2000: The ECMWF operational implementation of four-dimensional variational assimilation. II: Experimental results with improved physics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1171–1190.

Majewski, D., H. Frank, D. Liermann, and B. Ritter, 2012: Kurze Beschreibung des Globalmodells GME (20 km / L60) und seiner Datenbanken auf dem Datenserver des DWD (in German; Short description of the global model GME and its databases on the data server of DWD). DWD, 80 pp.

三好建正, 2006: アンサンブル・カルマンフィルタ～データ同化との融合～. 数値予報課報告・別冊第 52 号, 気象庁予報部, 80–99.

Montmerle, T., 2012: Optimization of the Assimilation of Radar Data at the Convective Scale Using Specific Background Error Covariances in Precipitation. *Mon. Wea. Rev.*, **140**, 3495–3506.

Montmerle, T., 2013: Forecast errors at convective scale. *presentation at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Pierce, C., A. Seed, S. Ballard, D. Simonin, and Z. Li,

2012: Nowcasting. *Doppler Radar Observations - Weather Radar, Wind Profiler, Ionospheric Radar, and Other Advanced Applications. eds. J. Bech and J. L. Chau, InTech*, 97–142.

Qaddouri, A. and V. Lee, 2011: The Canadian Global Environmental Multiscale model on the Yin-Yang grid system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 1913–1926.

Rabier, F., H. Järvinen, E. Klinker, J.-F. Mahfouf, and A. Simmons, 2000: The ECMWF operational implementation of four-dimensional variational assimilation. I: Experimental results with simplified physics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1143–1170.

Rancic, M., R. Todling, and D. Kleist, 2012: Development of a 4DVAR Version of GSI at NCEP. *presentation at 16th Symposium on IOAS-AOLS. January 2012, New Orleans, LA.*

Rawlins, F., S. P. Ballard, K. J. Bovis, A. M. Clayton, D. Li, G. W. Inverarity, A. C. Lorenc, and T. J. Payne, 2007: The Met Office global four-dimensional variational data assimilation scheme. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **133**, 347–362.

Raynaud, L., L. Berre, and G. Desroziers, 2011: An extended specification of flow-dependent background error variances in the Météo-France global 4D-Var system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 607–619.

Raynaud, L., L. Berre, and G. Desroziers, 2012: Accounting for model error in the Météo-France ensemble data assimilation system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **138**, 249–262.

Reich, H., A. Rhodin, and C. Schraff, 2011: LETKF for the nonhydrostatic regional model COSMO-DE. *Consortium for Small-Scale Modelling (COSMO) News Letter*, **11**, 27–31.

Rogers, E., G. DiMego, T. Black, M. Ek, B. Ferrier, G. Gayno, Z. Janjic, Y. Lin, M. Pyle, V. Wong, W.-S. Wu, and J. Carley, 2009: The NCEP North American Mesoscale Modeling System: Recent Changes and Future Plans. *presentation at 23rd Conference on Weather Analysis and Forecasting/19th Conference on Numerical Weather Prediction. June 2009, Omaha, NE.*

Schraff, C., 1996: Data assimilation and mesoscale weather prediction: A study with a forecast model for the Alpine region. Publication No. 56, Swiss Meteorological Institute, Zürich, Switzerland.

Schraff, C., 1997: Mesoscale data assimilation and prediction of low stratus in the Alpine region. *Meteor. Atmos. Phys.*, **64**, 21–50.

Schraff, C., 2012a: Status of KENDA, plans on DA at DWD. *presentation at COSMO General Meeting, September 2012, Lugano, Switzerland.*

Schraff, C., 2012b: Status Overview on PP KENDA: Km-scale ENsemble-based Data Assimilation. *presentation at COSMO General Meeting, September 2012, Lugano, Switzerland.*

Schraff, C., 2013: Status Report PP KENDA. *presentation at COSMO General Meeting, September 2013, Sibiu, Romania.*

Schraff, C. and R. Hess, 2012: A Description of the Nonhydrostatic Regional COSMO-Model, Part III: Data Assimilation. *Core documentation of the COSMO-model*, 99 pp., URL `http://www.cosmo-model.org/`.

Seity, Y., P. Brousseau, S. Malardel, G. Hello, P. Bénard, F. Bouttier, C. Lac, and V. Masson, 2011: The AROME-France Convective-Scale Operational Model. *Mon. Wea. Rev.*, **139**, 976–991.

Skamarock, W. C., J. B. Klemp, J. Dudhia, D. O. Gill, D. M. Barker, M. G. Duda, X. Y. Huang, W. Wang, and J. G. Powers, 2008: *A Description of the Advanced Research WRF Version 3.* NCAR TECHNICAL NOTE, 113pp.

Skamarock, W. C. and M. L. Weisman, 2009: The Impact of Positive-Definite Moisture Transport on NWP Precipitation Forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 488–494.

Skamarock, W. C., J. B. Klemp, M. G. Duda, L. D. Fowler, S. H. Park, and T. D. Ringler, 2012: A Multiscale Nonhydrostatic Atmospheric Model Using Centroidal Voronoi Tesselations and C-Grid Staggering. *Mon. Wea. Rev.*, **140**, 3090–3105.

Staniforth, A. and J. Thuburn, 2012: Horizontal grids for global weather and climate prediction models: a review. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **138**, 1–26.

Stephan, K., S. Klink, and C. Schraff, 2008: Assimilation of radar-derived rain rates into the convective-scale model COSMO-DE at DWD. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 1315–1326.

Stiller, O., 2009: Efficient moist physics schemes for data assimilation. II: Deep convection. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **135**, 721–738.

Stiller, O. and S. P. Ballard, 2009: Efficient moist physics schemes for data assimilation. I: Large-scale clouds and condensation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **135**, 707–720.

Sun, J., 2005: Initialization and numerical forecasting of a supercell storm observed during STEPS. *Mon.*

Wea. Rev., **133**, 793–813.

Sun, J., M. Chen, and Y. Wang, 2010: A frequent-updating analysis system based on radar, surface, and mesoscale model data for the Beijing 2008 forecast demonstration project. *Wea. Forecasting*, **25**, 1715–1735.

Sun, J. and N. A. Crook, 1997: Dynamical and microphysical retrieval from Doppler radar observations using a cloud model and its adjoint. Part I: model development and simulated data experiments. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 1642–1661.

Sun, J. and N. A. Crook, 1998: Dynamical and microphysical retrieval from Doppler radar observations using a cloud model and its adjoint. Part II: retrieval experiments of an observed Florida convective storm. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 835–852.

Sun, J., D. W. Flicker, and D. K. Lilly, 1991: Recovery of three-dimensional wind and temperature fields from simulated single-Doppler radar data. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 876–890.

Sun, J. and H. Wang, 2013: WRF-ARW Variational Storm-Scale Data Assimilation: Current Capabilities and Future Developments. *Advances in Meteorology*, **2013**, 13 pp.

Sun, J. and Y. Zhang, 2008: Analysis and prediction of a squall line observed during IHOP using multiple WSR-88D observations. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 2364–2388.

Tanguay, M., L. Fillion, E. Lapalme, and M. Lajoie, 2012: Four-Dimensional Variational Data Assimilation for the Canadian Regional Deterministic Prediction System. *Mon. Wea. Rev.*, **140**, 1517–1538.

Thuburn, J., T.D. Ringler, W.C. Skamarock, and J.B. Klemp, 2009: Numerical representation of geostrophic modes on arbitrarily structured C-grids. *J. Comp. Phys.*, **228**, 8321–8335.

Trémolet, Y., 2013: Towards a Longer Assimilation Window in the IFS 4D-Var. *presentation at 6th WMO Symposium on Data Assimilation. October 2013, University of Maryland, College Park, MD.*

Veersé, F. and J.-N. Thépaut, 1998: Multiple-truncation incremental approach for four-dimensional variational data assimilation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **124**, 1889–1908.

Wang, X., D. M. Barker, C. Snyder, and T. M. Hamill, 2008a: A hybrid ETKF-3DVAR data assimilation scheme for the WRF model. Part I: Observing system simulation experiment. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 5116–5131.

Wang, X., D. M. Barker, C. Snyder, and T. M. Hamill, 2008b: A Hybrid ETKF-3DVAR Data Assimilation Scheme for the WRF Model. Part II: Real Observation Experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 5132–5147.

Wang, X., C. H. Bishop, and S. J. Julier, 2004: Which is better, an ensemble of positive-negative pairs or a centered spherical simplex ensemble? *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 1590–1605.

Wang, X., T. Lei, J. Whitaker, and D. Kleist, 2013a: Recent development and research on GSI based hybrid ensemble-variational data assimilation system for GFS. *presentation at 17th Conf. on IOAS-AOLS. January 2013, Austin, TX.*

Wang, X., D. Parrish, D. Kleist, and J. Whitaker, 2013b: GSI 3DVar-Based Ensemble-Variational Hybrid Data Assimilation for NCEP Global Forecast System: Single-Resolution Experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **141**, 4098–4117.

Wedi, N. P., M. Hamrud, and G. Mozdzynski, 2013: A Fast Spherical Harmonics Transform for Global NWP and Climate Models. *Mon. Wea. Rev.*, **141**, 3450–3461.

Weygandt, S. S., S. G. Benjamin, T. G. Smirnova, and J. M. Brown, 2008: Assimilation of radar reflectivity using a diabatic digital filter within the Rapid Update Cycle. *Preprints, 12th Conf. on IOAS-AOLS. January 2008, New Orleans, LA.*, 11 pp.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

Yang, X., 2002: Physical adjoint in HIRLAM 4DVAR. *HIRLAM Workshop on Variational Data Assimilation and Remote Sensing, January 2002, FMI, Helsinki, Finland.*, URL `http://hirlam.org/`.

Yessad, K., 2013: Basics About ARPEGE/IFS, ALADIN and AROME in the Cycle 40 of ARPEGE/IFS. Météo France, 63 pp.

Zerroukat, M., N. Wood, and A. Staniforth, 2004: SLICE-S: A Semi-Lagrangian Inherently Conserving and Efficient scheme for transport problems on the Sphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 2649–2664.

Zhang, X., X.-Y. Huang, and N. Pan, 2013: Development of the Upgraded Tangent Linear and Adjoint of the Weather Research and Forecasting (WRF) Model. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, **30**, 1180–1188.

1.4 asuca の開発理念 [1]

1.4.1 はじめに

第 1.1 節で述べた通り、asuca の開発においては、現業数値予報モデルとして必要な計算安定性と精度を確保しつつ、計算機能力の向上から将来考えられる全球モデルと領域モデルの力学コアの統合、また、データ同化手法の発展により必要性を増した予報・非線形・接線形・随伴モデルの統一的な開発を行うことを目指している。既に述べた通り、asuca の開発は 2007 年に開始された。そのきっかけとして、第 9 世代のスーパーコンピュータ導入の検討に際して、特に局地数値予報システムにおける JMA-NHM の計算効率が懸念されたことである。超並列計算においては、並列計算効率が低いといくらプロセッサ数を増やしても実行速度が頭打ちになる。現業数値予報においては定められた時間内に計算を終える必要があることから、低い並列計算効率は致命的である。特に並列計算効率を左右するのは力学コアであり、力学コアの改良には時間がかかることから早急な対応が必要であった。

一方、JMA-NHM は長年の改良が続けられており、当面の現業数値予報システムを支える数値予報モデルとしては十分な性能を有している。しかし、上に述べた目標を達成するためには抜本的な対策が必要であった。特に、開発効率をあげるためには現在及び将来の数値予報モデルとして必要な機能を残し、不要な機能は削除するなどの精査が重要である。現業数値予報システムの開発と並行して数値予報モデルを順次更新する必要性から、JMA-NHM の改良すべき点は改良し、引き継ぐべき点は引き継いでいくことを念頭に開発を進める必要があった。

このような目標を達成するための方法として、既存の JMA-NHM のコードを変更する方法と新たに一からコードを書き起こす方法の 2 種類が考えられる。前者であれば、変更しない部分（例えば、物理過程等）についてはそのまま利用できるメリットがある（ただし、その場合でもリファクタリング [2] が必要）一方で、既存のユーザーの利用に影響を与えないように注意する必要がある。後者の場合はメリット・デメリットは正反対となり、JMA-NHM から必要なものを移植する必要がある一方で、既存の利用形態に囚われずに開発することが可能となる。asuca の構築にあたっては、後述の通り、最適化を行うためにスキームの見直しやコーディングの見直しといった大幅な変更が必要となったために、後者の方法を選択し、コードを一から開発することとした。懸案となった物理過程の移植については物理過程ライブラリの成果もあり、順調に開発を進められている。

本節では、具体的に asuca, asuca-Var, asuca-Global の開発において念頭においている開発理念について述べる。第 1.4.2 項では、力学コアの改良における開発理念を、当面の目標である局地数値予報モデルとしての現業化のための計算精度と計算効率の両立だけでなく、将来的な領域モデルと全球モデルの力学コアの統合も含めて示す。第 1.4.3 項では asuca-Var の開発理念を示す。asuca-Var の当面の目標は JNoVA 3D-Var の置き換えであるが、4D-Var やアンサンブルデータ同化も念頭においており、これらを俯瞰したシステム構成を示す。第 1.4.4 項では、今後の計算機の発展を念頭においた最適化について述べる。計算効率を損なわないスキームを導入するといったアルゴリズムレベルの最適化から、コードの実装方法にいたるまでの基本的概念について述べる。第 1.4.5 項ではコードの整理についての開発理念を示す。第 1.4.6 項では開発管理の実例について述べる。開発工程管理の必要性は以前から認識しており、asuca の開発と並行して検討を行ってきた。ここでは、その現状と今後の見通しを述べる。

1.4.2 力学コアの改良-方程式系及び離散化手法の改良-

JMA-NHM と asuca の力学コアの諸元の違いを表 1.4.1 に示す。各諸元の違いの詳細については第 2 章で述べることとし、本項では、異なるスキームを用いた理由やその狙いについて述べる。asuca の力学コアにおいては、現業数値予報モデルとして必要な保存性の向上、計算安定性の向上、計算精度と計算効率の両立、人為的な数値拡散の排除を目標としており、各項目について以下で説明する。なお、それぞれの目標に向けたスキームの選択において計算効率についても検討を行っている。

(1) 保存性の向上

数値予報モデルの力学コアにおいて保存性への要請は強く、特に乾燥大気の質量保存は第一に確保すべきものと考えられる。全球モデルにおいては乾燥大気の総質量が保存されるべきことは自明であり、また、長期積分においてはわずかな誤差が積み重なる恐れがあるため、質量保存については細心の注意を払う必要がある。領域モデルにおいては領域が限られており側面境界を通じて質量の流出入があるため [3]、全球モデルほどには厳密な保存性は実用上は求められないものの、質量の誤差は気圧場の誤差につながり予測に悪影響を与えるため、意図しない誤差は避ける必要がある。また、意図しない誤差はモデル開発における誤差の特定に悪影響を及ぼすことにも注意が必要である。

2000 年代より前の非静力学モデルにおいては、密

[1] 石田 純一、藤田 匡

[2] プログラムの動作を変えずにソースコードの中身を整理すること。

[3] 領域モデルの場合は側面境界値を与える、例えば全球モデルの同領域の質量と同じにすることにより質量を調整することが可能である。しかし、例え全球総質量が保存されていたとしても局所的には誤差があり得る。

表 1.4.1 asuca と JMA-NHM の力学コアの比較。違いがある部分を**太字**で示している。

	asuca	JMA-NHM
支配方程式	完全圧縮非静力学方程式系 **（フラックス形式）**	完全圧縮非静力学方程式系 **（準フラックス形式）**
予報変数	$\rho u, \rho v, \rho w, \boldsymbol{\rho\theta_m}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho q_\alpha}$	$\rho u, \rho v, \rho w, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q_\alpha}$
空間離散化	**有限体積法**	**有限差分法**
時間積分法	**3 段階ルンゲクッタ法 (long)** **3 段階ルンゲクッタ法 (short)**	**リープフロッグ法にタイムフィルタを併用 (long)** **前方・後方差分法 (short)**
移流	**3 次精度差分を基本とする**	**水平に 4 次精度差分、鉛直に 2 次精度差分**
単調性の確保	**Koren (1993) による流束制限関数**	**Kato (1998) による移流補正スキーム**
座標系	**一般座標** または、 マップファクター＋鉛直ハイブリッド	マップファクター＋鉛直ハイブリッド
音波の扱い	**conservative split-explicit 法** **(Klemp et al. 2007)**	**split-explicit 法 (室井ほか 1999)**
重力波の扱い	**conservative split-explicit 法** **(Klemp et al. 2007)**	**split-explicit 法 (斉藤 2003)**
水物質の落下	**time-split スキーム**	**Box-Lagrangian スキーム (Kato 1995)**
人為的数値拡散	**なし**	**4 次の線形拡散と** **非線形拡散 (Nakamura 1978) の併用**

度の代わりに気圧もしくはエクスナー関数を予報変数とすることが主流であった。しかし、この方法では密度が予報変数でないために、連続の式で陽に密度（質量）の流出入として扱うことができず、質量保存が厳密には成り立たないという問題があった。そこで、2000 年代に入って、密度を予報変数として扱う方程式系の開発が行われてきた (Klemp et al. 2007; Ooyama 2001)。このような予報変数の取り方は国外においては WRF、COSMO 等で採用されており、また、国内では NICAM(Nonhydrostatic ICosahedral Atmospheric Model) が採用している。そこで、このような世界的な情勢をふまえ、asuca も密度を予報変数とする手法を採用することとした。また、その他の物理量においては連続の式と組み合わせることによりフラックス形式の方程式を導くことができる。これは、物理量の変化量を流出・流入を表すフラックスと生成・消滅項との組み合わせで表すものであり、後述の有限体積法と組み合わせることにより、保存則を成り立たせやすくなる手法である。

また、離散化の過程でも誤差が生じうる。有限差分法においてよく行われる手法として、計算領域全体の質量の総和を求め、誤差をキャンセルする補正項を追加するというものがある。計算手法として必ずしも悪いものではないが、計算領域全体の総和を求めることは並列計算効率を考えると不利になる。そこで、asuca では、有限差分法ではなく有限体積法を採用することとした。フラックス形式で書いた方程式で流出・流入量を計算することを考える。有限体積法とは領域をセルに分割し、そのセルを囲む面におけるフラックスを計算する手法であり、各面において計算されるフラックスは、面を共有する 2 つのセルにおいて、絶対値が等しい正負の値として計算される。そのため、2 つのセルの流入と流出は等しくなり保存則が厳密に成り立つことが保証される。一方、有限差分法では流入・流出と言う概念を導入することなく時間変化率を求めることができるため、有限体積法のように簡単に保存則は成り立たない。有限差分法においても、保存則が成り立つように計算をすることは可能であるが、そのためには複雑な方法を導入する際に細心の注意を払う必要がある。一方で、各面におけるフラックスを計算する有限体積法は原理的に保存が成り立つ手法である。

(2) 計算安定性の向上

3 段階ルンゲクッタ法 (Wicker and Skamarock 2002) と奇数次差分スキームに基づく移流スキーム

空間一次元で定義される物理量 ϕ が風速 c で移流するとした場合の一次元の移流方程式 (1.4.1) 式を考える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{1.4.1}$$

移流スキームにおいて偶数次精度の差分スキームを用いると、切断誤差が分散性を生み、奇数次精度の差分スキームを用いると、切断誤差が拡散性を生む。分散性とは波数により位相速度が異なる性質であり、このために波形が保たれず高波数成分がノイズとなって生じやすくなる。そのため、偶数次精度の差分スキームでは計算安定性を損ねやすい。そこで、計算安定性の問題を避けるためには、奇数次精度の差分スキームを用いれば良い。しかし、JMA-NHM の場合は時間積分

法にリープフロッグ法を用いているために、3 次精度や 5 次精度の奇数次差分スキームを用いるとクーラン数によらず不安定となることが知られている (Wicker and Skamarock 2002)。そのため、JMA-NHM では偶数次差分スキームと併用する形で、高周波成分を抑えるための数値拡散 (4 次の線形拡散と Nakamura (1978) による非線形拡散) を導入している。しかし、計算安定性を確保するためにどの程度の強さの数値拡散を適用すれば十分であるかは自明ではなく、経験的な手法を取らざるをえない。また、様々な高周波を制御するためのフィルタも必要となる。そこで、asuca では計算安定性の向上を目指して奇数次差分スキームを元にした移流スキームを導入する（ただし、前述の奇数次精度の移流スキームが持つ拡散性への対応は後述）ことを前提に、JMA-NHM のリープフロッグ法に代えて、Wicker and Skamarock (2002) が提唱した 3 段階ルンゲクッタ法を採用することとした。このスキームは 3 段階の計算を行うにもかかわらず、精度が 2 次しかないが、プログラミングが容易であり必要となるメモリが少なくてすむことや、計算安定性が高くリープフロッグ法よりも長い積分時間間隔を取れるといった利点がある。移流スキームには高周波成分を抑えることができる 3 次精度のスキームを基に、流束制限関数を適用した Koren (1993) によるスキームを用いている。

水物質の落下の扱い

また、水物質の落下は鉛直移流として取り扱う。しかし、水物質の落下速度は速く、特に地表付近で層の間隔が薄くなる場合には CFL 条件により積分時間間隔が制限される。そのため、水物質の落下には特別の扱いが必要となる。JMA-NHM では水物質の落下を CFL 条件の制約を受けないようにラグランジュ的に扱っているが、水物質の鉛直分布によってはノイズが生じることもある (Kato 1995)。また、大気の鉛直流による移流と水物質の落下とを別々に扱っているという問題がある。例えば、対流雲中で上昇流の大きさと形成された雨等の水物質の落下速度がほとんど釣り合っているような場合は、水物質はほぼ同じ高度に止まると考えられるが、両者を別々に取り扱っているために、上下に分離することが起こりうる。そこで、asuca では大気の鉛直流による移流と水物質の落下とを統一的に扱うこととした。さらに、両者を合わせた鉛直移流については、現在のところ他の物理量と同様に Koren (1993) のスキームを用いている。

単調性の確保

さて、これまでに奇数次精度の差分スキームにおいては高周波成分を抑えることができることを述べたが、元の物理量の分布が急に変化するところでは偽の極値を作り出してしまうことがありうる。このことにより、数値予報モデルにおいては、水物質の質量のように下限値がゼロである予報変数に対し、分布が急に変化しているような場所で差分計算の結果が負の値となるおそれがある。Godunov の定理によると、(1.4.1) 式に

$$\phi_i^{n+1} = \sum_k a_k \phi_{i+k}^n \tag{1.4.2}$$

の形をした (ここでは、タイムステップを上付き添字、格子点番号を下付き添字で表す) スキームを適用した場合に、2 次以上の高次精度を持ついかなるスキームでも単調性を維持できないことが分かっている。ここで、1 次精度のスキームを適用して単調性を確保すれば偽の極値が生じないようにできるが、奇数次差分に伴う拡散性があまりにも強く ϕ を減衰させるため実用的ではない。

この問題は以前から認識されており、解決策として、全体としては高次差分スキームを適用し、単調性が満たされなくなるような急に変化する場においては単調性を満たすように、フラックスもしくは移流項の調整を行う方法が考案されてきた。JMA-NHM においては Kato (1998) による移流補正スキームにより対策が行われている。このスキームでは、任意の高次差分スキームにより計算した移流項を用いて仮の時間積分を行って、単調性が満たされているかどうかを調べ、単調性が満たされない格子点のみ単調性を満たすように移流項の大きさを調整する、というものである。これは任意の差分スキームと組み合わせられるという長所があるが、差分スキームの計算のために必要なのりしろ領域の通信と、単調性を評価するために必要なのりしろ領域の通信とを 2 回に分ける必要が生じ、計算コストの増大につながる。また、有限差分法に基づいているために、実用上は問題がないとされているものの厳密には保存性が成り立たない問題もある。

そこで、asuca では上述の流束制限関数を適用した Koren (1993) によるスキームを用いている。これは、3 次精度の差分スキームを基にして、単調性が満たされない場においてのみ局所的にフラックスの調整を行う手法である。有限体積法に基づいてセル境界のフラックスを評価する際に、周辺の場を参照する（そのためにのりしろ領域の通信が必要となる）。この方法では、フラックスの局所的な調整を含めた計算を場の滑らかさの関数とし、周辺の場を参照して場の滑らかさを計算してフラックスを求める。これにより、フラックスの計算と調整を同時に行うことができ、Kato (1998) による移流補正スキームと比べてのりしろ領域の通信回数を減らすことに加えて保存性も確保できる。

音波・重力波の安定化

音波は非常に高速であり、また鉛直方向にも伝播することから、一般に鉛直層間隔の方が水平格子間隔より小さい現業数値予報では音波による CFL 条件の制限は非常に厳しいものとなる。また、重力波についても音波ほど厳しくないものの、積分時間間隔の制限がある。そこで、音波・重力波に関する項を安定に時間

積分するために、asuca も JMA-NHM と同様に split-explicit 法を用いている。ただし、asuca の予報変数は JMA-NHM と異なり、密度であるため、完全に同じ手法は採れない。JMA-NHM では気圧方程式と鉛直方向の運動方程式から気圧についての鉛直 1 次元楕円型方程式を導出するが、asuca の場合は、鉛直方向の運動量保存の式、温位の方程式、連続の式から鉛直風についての鉛直 1 次元楕円型方程式を導出する。時間積分法としてショートタイムステップにおいても 3 段階ルンゲクッタ法を用いている。これは計算量は増加するが、計算安定性確保の観点から必要な措置である。

重力波についても asuca、JMA-NHM 共に split-explicit 法を用いる。JMA-NHM の場合は歴史的経緯もあり、音波の安定化と重力波の安定化とを別々に行うことがソースコードの可読性を損ねる原因となっている。asuca の場合は、重力波の安定化と音波の安定化を split-explicit 法により同時に行うことから、ソースコードの可読性を高めることができている。

(3) 計算精度と計算効率の両立

時間積分法や移流項の精度と計算効率との両立について簡単に説明する。水平微分については水平方向に参照する範囲を広げることにより、高次精度差分スキームを構築することができる。また、ルンゲクッタ法については段階数を増やすことにより高精度化が可能となる。ここで、水平方向の参照範囲を広げることはのりしろ領域の通信量が増えることを意味し、段階数の増加は 1 タイムステップあたりの計算量の増加につながる。しかし、既に見てきた通り、物理量の分布が急に変化するような場では移流計算の精度を 1 次精度にせざるを得ない制限があり、音波・重力波に関する項のように陰解法で扱う場合には 1 次の精度しかない場合もある。さらに、物理過程まで含めた数値予報モデルとして考えると、精度を損なう要因は様々なところに存在する。このような状況を鑑み、現時点では asuca の一部のスキームのみを高次精度にすることは考えていない。予報精度への影響を見つつ、トータルとしてバランス良く精度を向上させていくことが必要である。

(4) 人為的な数値拡散の排除

(2) で計算安定性のための数値拡散について触れたが、数値拡散については更なる問題を含んでいる。Piotrowski et al. (2009) は、地表面が熱せられて成層不安定となっているような場に対して数値粘性のみを変更した比較実験を行ったところ、孤立した対流雲が点在するような結果と対流雲が線上に組織化された結果との違いが生じたこと、及び非等方的な粘性が実際とは異なるものの自然に見える構造を生み出すことから、粘性項、サブグリッドスケールの乱流スキーム、アドホックなフィルタ、及び数値スキームが内在する拡散性について注意する必要があることを述べている。また、対流のエントレインメント／デトレインメントを陽には表現できない分解能においては、その役割を水平拡散が補っている可能性もありうる。

asuca の開発着手の時点では、これらの状況に対する明確な認識はなかったものの、数値拡散の強さを変更することによりメソ対流系の予想に違いが生じることは経験則として知られていた。これらのパラメータは予測精度を確保するためのいわゆるチューニングパラメータとして最終的に調整することも考えられるが、計算安定性の確保のために人為的数値拡散を用いれば、そのために予測精度を犠牲にせざるを得ないジレンマに陥る可能性が、そうでない場合に比べて高い。asuca において人為的な数値拡散を排除した動機の一つはここにある。人為的な数値拡散を用いずとも安定に計算できる力学コアを導入した上で、予測精度に関係する点は物理過程の開発として対策を考えるというアプローチである。現時点では物理過程・力学過程を含めた数値予報モデルとしての取扱いは難しい課題であるが、今後も着実に解決を図っていきたいと考えている。

1.4.3 データ同化システム

asuca-Var は、従来の変分法による同化システムにとどまらず、アンサンブル予報技術との結合も視野に入れた統合的なデータ同化システムと予報モデルの一体となった構築を目指している（このような、asuca に基づくデータ同化システムを以下 asuca-DA と記す）。asuca-DA の概念図（図 1.4.1）に示すように、4D-Var の開発に必要となる接線形 (TL)・随伴 (AD) モデル [4] は、成長の大きい誤差パターンを求めることによりアンサンブル予報の初期摂動を生成する SV 法（特異ベクトル法）にも応用できる [5]。また、アンサンブル予報から評価される流れに依存した誤差を、従来の気候学的な背景誤差に加えて、3D-Var, 4D-Var の背景誤差に組み込む技術として、制御変数の拡張による背景誤差のハイブリッド化が確立してきている（第 3.1.10 項 (2) で、asuca-Var におけるハイブリッド変分法データ同化の取り組みについて述べる）。さらに、アンサンブル摂動を時間発展も含めて利用し背景誤差の時間相関を評価することで、接線形・随伴モデルの開発を必要としない、変分法による同化技術として EnVar(Liu et al. 2008, 2009; Buehner et al. 2010a,b) が挙げられる。EnKF（Ensemble Kalman Filter; 三好 (2006) などを参照）は EnVar と同様アンサンブル摂動の時間発展を直接用いるほか、解析誤差を反映してアンサンブル摂動の更新も行うアンサンブルデータ同化手法である。アンサンブルシステムと決定論的データ同化シス

[4] 図 1.4.1 で NL は、TL/AD を構築する際、線形化の対象となる非線形モデルを示す。第 3.2 節で詳しく述べるように、もとの予報モデルに変更（簡略化・正則化）を加えたものを NL として用いることがある。

[5] 現在、JNoVA の TL/AD に基づくメソ特異ベクトル法によるメソアンサンブル予報の開発が進められている (小野 2010)。

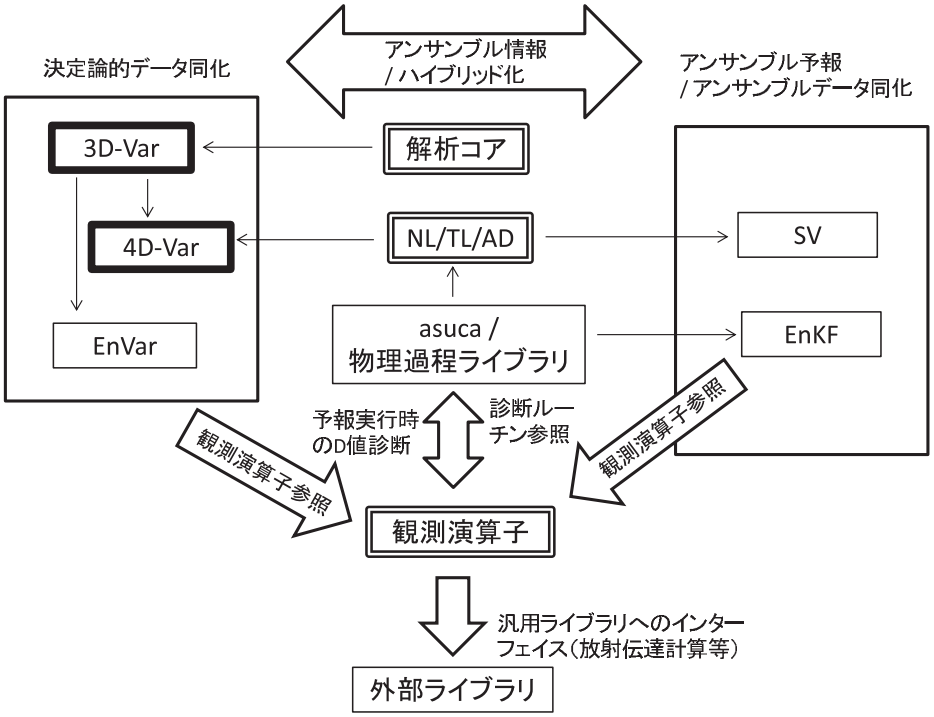

図 1.4.1　asuca に基づくデータ同化システム (asuca-DA) の概念図。実線矢印は開発の依存関係、白抜きの矢印は実行時の参照を示す。

テムの結合は、第 1.3.2 項で述べたように各国で取り組みがなされている。これは、前述の背景誤差のハイブリッド化によって決定論的データ同化でアンサンブル摂動を利用し、一方で、アンサンブル平均が決定論的データ同化の解析値に一致するようにアンサンブルを更新することにより、両システムの情報を相互に交換することで構成される。

このようなシステムの構築に向けて、まずは現在現業で用いられている JNoVA の後継として、現状の局地解析 (LA) 3D-Var、ついでメソ解析 (MA) 4D-Var に相当するシステムを整備することを目標とした（図 1.4.1 の左列で太線で囲んで示す）。ここでは、主に 3D-Var、4D-Var の開発にあたっての方針について述べる。

asuca-Var の開発では、これまでの気象庁での 4D-Var の運用での課題を踏まえ、開発、維持管理の効率性を重視した設計・開発方針をとっている。特に、予報モデルと整合性のとれたデータ同化システムの継続的な開発を実現するため、asuca との統一的な管理のもとで asuca-Var の開発を進めている。具体的には、開発が先行して行われている asuca に対して、これを参照してデータ同化を行うための asuca-Var の機能を追加し、システムを拡張する形で開発を進めている。図 1.4.1 の中列に、二重線で囲んで示したように、システム全体の主要な構成要素としては asuca 予報モデル本体、物理過程ライブラリに接線形・随伴モデル（詳細については第 3.2 節を参照のこと）が組み込まれるほか、以下で説明する解析コア、観測演算子（詳細については第 3.1 節を参照のこと）が新たに実装される。

(1)　解析コア

変分法による最適化に関連する処理を扱う。解析のメインルーチンには、3D-Var、4D-Var の処理全体の制御構造が組み込まれる。また、極小値探索の基本的な変数である制御変数やその誤差特性を示す背景誤差共分散に関する処理も含む。アンサンブル摂動による流れへの依存性を背景誤差に組み込むための制御変数拡張機能もこの部分に実装される。

(2)　観測演算子

モデル予報値から観測相当量を計算する機能とその接線形・随伴演算子を扱う。制御変数や予報変数から観測要素への要素変換と、格子点値の観測点への空間内挿等の処理から成る。解析コア、予報モデルとの独立性を高め、変分法での評価関数の観測項の計算に加え、高頻度観測の品質管理への対応も念頭に、予報モデルによる時間積分中の観測演算子の実行も可能な設計となっている。

1.4.4　計算機の趨勢に合わせた改良

第 1.1 節で述べた通り、今後の計算機はより B/F 値が小さくなり、代わって並列度が増していく傾向にあ

る一方で、GPGPU のような新たな技術が開発される可能性がある。そのため、今後の計算機の構成等を見ると、プロセッサの演算性能の向上に通信速度の向上が追いつかないと考えられることから、通信の効率化が重要となる。また、ディスク入出力も演算性能の向上には追いつかず、効率化が重要となる。これらの動向に追随していくためにはアルゴリズムレベル・コーディングレベルでの最適化が必要となる。ここでは、asuca において行った対策について概略を述べる。

(1) アルゴリズムレベルの最適化

アルゴリズムレベルの最適化とは支配方程式や離散化手法の見直しのことを指す。これは根本的な対策であるため、効果は大きいものの、開発には大いに時間を要する。力学コア改良の概要については第 1.4.2 項で述べているため、ここでは実行効率を高めるために必要な事項とその適用方法について述べる。

JMA-NHM と asuca の並列計算においては、予報領域を水平方向 2 次元に分割し、分割した領域をそれぞれメモリを共有しないプロセスが計算を担当し、隣接プロセスが担当する格子の参照のための 1 対 1 通信を基本としている。

まず、通信の効率化のために極力避けなければならないのは 1 対 1 通信以外の通信（1 対全通信や全対全通信）を必要とするようなアルゴリズムである。JMA-NHM では全対全通信を必要とするようなスキームは限られているが、質量保存のための処理で全領域での総和計算を行うような場合は問題となる。これを回避するための対応は既に述べた通りである。また、音波と重力波の安定化に split-explicit 法を用いていることは既に述べた。これらの安定化の別の手法に semi-implicit 法があるものの、大規模な連立方程式を解く必要があり、1 対 1 通信以外の通信を用いずに連立方程式を解くことは困難である。このような並列計算に不向きと考えられる手法は、開発初期の設計段階から利用しないようにしている。

次に、隣接プロセス間の通信もなるべく減らすべきである。移流項の計算等においては全てのプロセスが隣接プロセスとの通信を行うために、ある程度並列に通信を行うことができる可能性があるが、ネットワークトポロジ [6] にも依存するため、並列通信を行うことでどの程度の効率が出るかは未知である。これが、移流の計算に複数回の隣接プロセス間の通信を行う移流補正スキームを用いずに 1 回の隣接プロセス間の通信で移流計算を行える Koren (1993) を用いた主要な理由である。また、数値拡散も隣接通信を行う必要があることから、これらを用いないことは将来考えられる計算機への対策も兼ねていることになる。

[6] ネットワークの接続形態のこと。ここでは、スーパーコンピュータ内の複数のプロセッサがどのように接続されているかを意味する。

物理過程については、当面の現業モデルの解像度では鉛直 1 次元で十分であることから、鉛直 1 次元の実装としている。今後、鉛直 1 次元でない物理過程の導入を考える場合は検討が必要となるだろう。

また、一般座標における重力の扱いに注意が必要である。一般座標を用いているために鉛直座標も自由に取ることができる。しかし、現時点では鉛直軸は重力加速度と平行としているために重力加速度項は鉛直方向の運動量保存の式にしか存在せず、それを前提に split-explicit 法を組み立てており、プロセス間通信は必要としない。ただし、今後、さらに高解像度化して急峻な地形を取り扱う際に、地形に沿う座標と鉛直座標がより非直交となるような場合は、検討が必要になってくる可能性がある。

データ同化についても計算効率を意識した様々なアルゴリズムの最適化を行っている。第 3.1.9 項 で詳しく述べるように、背景誤差計算で水平方向にリカーシブフィルタを実行する際、必要となる隣接プロセス間通信の通信量を最小限に抑える対策を行っている。また、観測演算子についても各観測に関する計算の独立性を高めることにより並列計算を可能としている。極小値探索では、門脇 (2009) の実装による並列化を導入した。これによって、探索空間でのベクトル内積計算への寄与は、予報モデル asuca の並列化構造に合わせて各プロセスに割り当てられた領域ごとに並列に評価される。

(2) コーディングレベルの最適化

コーディングレベルの最適化としては JMA-NHM と比較して 3 次元変数の添字の用い方の違いが大きい。数値予報モデルの場合は、比較的水平方向に処理の依存性は少なく、鉛直方向には処理の依存性があることが多い（例えば、物理過程はその例である）。また、水平方向の格子数と鉛直方向の層数を比べると領域分割を行う前の予報領域全体では一般に水平方向の格子数の方が多い。JMA-NHM では 3 次元変数は `X(i,j,k)` のように用いて、第 1,2 添字を水平方向の格子インデックスに、第 3 添字を鉛直方向の層のインデックスに割り当てていた。これは、例えばベクトル計算機を考えた場合にはもっとも内側のループでベクトル演算が適用されるために、格子数が多い水平方向を表す添字を内側にし、数が少ない鉛直方向を表す添字を外側にすることが一番効率が高いためである。一方、昨今のスカラ計算機ではなるべく外側で並列化を適用することが望ましい。これは、並列化を行う場合にスレッドを生成するための時間が必要となり、この時間をなるべく少なくするためである。しかし、鉛直方向に依存性がある場合、鉛直方向を表す添字が外側にあると並列化を適用できない。また、物理過程のように鉛直 1 次元で複雑な計算を行う場合に、鉛直方向のループが一番内側にあると、変数がキャッシュに載りやすく、効率

的になると考えられる。以上の理由から、asuca においては、3 次元変数を X(k,i,j) のようにしている。

なお、水平方向にも鉛直方向にも依存性がない計算（例えば雲物理過程）において鉛直方向のループを最内側とするとループ長が短いために計算効率を損ねる懸念がある。昔ながらのベクトル計算機こそ近年では少数派となっているが、SIMD [7] 命令によるベクトル演算が行われている [8] 。これに対しては、予報領域全体の格子数ではなく領域分割したそれぞれの領域での格子数を考慮する必要がある。例えば、現在の現業局地数値予報モデルの格子数は水平方向を先に書く伝統的記法に従えば $1581 \times 1301 \times 60$ であり、これを現在のスーパーコンピュータの 800 プロセスで計算する場合、各プロセスが担当する水平方向の格子数はおよそ $(1581 \times 1301) \div 800 \approx 2570$ 格子となる。ここで、のりしろ領域の通信量を最適化するためにほぼ正方形の領域を設定するとすれば、水平方向の一辺の格子数は約 50 格子となり、鉛直方向の層数と逆転すら起こりうる。今後の鉛直・水平分解能の増強と計算機アーキテクチャの動向に左右される部分があるが、鉛直方向のループを最内側にすることによる不利はあまり生じないだろうと推測している。また、水平方向には依存性がなく鉛直方向には依存性があるような計算（例えば境界層過程）においては、最内側ループでの最適化ができない。これは計算機効率の観点からは不利な点であるが、前述の通り変数がキャッシュに載ることによる有利さも考えられる。また、 例えば、積雲対流スキームで成層が不安定なカラムだけ演算を行い、安定なカラムでは演算しないというような場合、ベクトル計算機や SIMD 命令によるベクトル演算では、マスク処理が行われることがある。マスク処理とは、ループの中に条件分岐がある場合に、条件が真の場合と偽の場合との両方の演算を行い、結果を格納する際に条件分岐に従う方法である。この場合、本来は演算をしないカラムにおいても演算だけ行って結果を捨てることとなり、見掛け上の計算効率が上がっても実際の計算時間が短縮されないこともありうる。コーディングが複雑になることにより開発効率が下がるという別のデメリットも考慮すると、asuca で採用した鉛直方向の添字とループを最内側にすることは、全体としてはそれほど不利にはならないと考えている。

データ同化の観点では、現在現業で同化している観測データの観測演算子において、観測相当量の診断は、観測点を囲む格子点（局所的な観測の場合）または観測点を囲む鉛直カラム（可降水量のような鉛直積算値、輝度温度のような放射伝達計算などの場合）を参照して行われ、また、各観測に関する計算は独立に処理される（詳細については第 3.1.9 項を参照のこと）。従って、観測演算子は鉛直カラム単位のデータ参照を基本としているため、第 1 添字を鉛直方向にとる配置において参照メモリ域は自然に局所的になり、スカラー計算機で想定される大規模並列計算に適応しやすい実装となっている。

1.4.5 コードの整理

(1) オプションの整理

JMA-NHM は 1999 年より気象庁数値予報課及び気象研究所の統一モデルとして構築されている。その源流は 1980 年代より気象研究所で開発されてきたモデルであり、非常に長い歴史を有しているが故に、多数のオプションを備えている。これは非常に多くの開発者が関わり、その時々で最適なスキームを追求するべく様々な試行錯誤が行われたことの積み重ねである。これらの中には現時点でも有効なものもあれば、その使命を終えたものもある。JMA-NHM は現業利用のみならず研究でも利用されているが、特に力学コアの多くのオプションについては現時点で最良と考えられる設定が現業及び研究で用いられていると考えられる。新規に開発を行う度に、それらのオプションに対して動作保証をする必要があるため、オプションの数が増えるほど、その組み合わせは爆発的に増大し、動作確認に非常に大きな手間を要する事態となる。特に、asuca, asuca-Var では、予報モデルとデータ同化システムの一体化した開発を目指していることから、多数の使用されないオプションが存在する状況で、接線形・随伴モデルも合わせて動作の保証を維持していくことは困難である。同化システムが予報モデルに追従している部分と未対応の部分が混在する状況となると、予報モデルと同化システムの乖離も発生しやすくなり、その後の開発効率への影響も大きい。このため、その使命を終えたスキームは順次削除することが必要となる。

また、第 1.4.6 項でも述べるが、バージョン管理システムの利用といった新たな開発環境を活用することも必要である。オプションを持つことの動機に、長期間にわたって開発が必要となる課題に対して、開発開始時点と完了時点とで本体のソースコードがあまりにも異なるために、開発成果を取り込めないことを避ける、使命を終えたと考えていたスキームが後に必要性が見直されて必要となる場合に備える、といったことが挙げられる。しかし、このような事態への対策として、開発管理支援ツールの活用が有効であり、このような動機に対してオプションを持つことの利点は薄れている。オプションを増やすことは、上記への対策という利点よりも開発コストの増加という損失の方が大きいであろう。

意識的にコードの整理を行わなければ、開発が進んでいくにつれて、オプションが増える方向に進むことはやむを得ない面がある。不要なオプションの整理や

[7] Single Instruction Multiple Data の略。1 つの命令を複数のデータに適用すること。

[8] 現在のスーパーコンピュータ SR16000M1 でも SIMD 命令は利用可能である。

ソースコードの整理は一見すると短期的には利益を生み出さないように見える。しかしながら、複雑なソースコードを放置しておくと、いずれは全体の開発の停滞をもたらすこととなる。常に、最新の知見を取り入れて大胆にスクラップアンドビルトを行い、永続的に開発が可能な状態に保つ必要があると考えている。

(2) データ同化システムへの拡張の実装

asuca-Var は、開発が先行して行われている予報モデル asuca のシステムに基づき、asuca と共通の処理を行う部分を共有しつつ、変分法データ同化に固有の機能を拡充する形で開発を進めている（詳細については第 3.1.2 項を参照のこと）。システムの拡張にあたっては、今後のさらなる開発の効率性を意識して整理された設計を検討しつつ、コードの実装に様々な工夫がなされている。各ソースファイルは機能に応じて解析コア、観測演算子それぞれに対応するディレクトリに配置され、予報モデルのものと合わせて管理される。また、コーディング上も、各サブルーチンは機能別に分類されてモジュールの階層構造内に配置され、各部分の独立性を高めて、維持管理、機能拡張がしやすい設計となっている。例えば観測演算子では、観測要素ごとにインターフェイスが整備され、関連する処理のサブルーチン群は、そのモジュール階層の下に置かれる。このようにして、ある観測要素に関する開発では、当該部分に閉じた作業が可能となる。また、予報方程式での時間変化率の評価部分をサブルーチン化しており、データ同化、予報モデルいずれにおいても、必要に応じてこのサブルーチンを時間推進演算子として柔軟に呼び出せる仕様としている。

接線形・随伴コードの実装についても予報モデル、物理過程ライブラリのルーチンを含めて仕様が統一されている（詳細については第 3.2 節を参照のこと）。具体的には、同一ソースファイル内に、通常の非線形コードが記述されたサブルーチンに加えて、線形化の対象となる非線形コード[9]・接線形コード・随伴コードが記述されたサブルーチンを新たに実装する。この新たなサブルーチンでは、非線形・接線形・随伴計算を実行の際にスイッチで切り分ける形の実装にしている。このようにして、予報モデルの更新に合わせて接線形・随伴コードの更新も行い、できる限り同期を保つことを意識するための設計としている。

1.4.6 開発管理の強化

開発管理の重要性については室井 (2013) にも説明がある。asuca においてもそこで述べられている要件の一部は開発の比較的当初から取り入れており、また途中からも適宜取り込むことにより開発管理の改善を図っている。重複する事項も多いが、asuca のこれまでの取り組み及び今後の管理の方向性について述べる。

(1) ドキュメントの作成

開発にあたっては、定式化・離散化をきちんと行った上でドキュメントを作成し、その後コードに反映させていくことが必要である。特に力学コアについては定式化・離散化さえ済んでいれば、コード作成はほとんど時間を要さない。しかし、例えば計算安定性のチェックにおいては多数の実験を行う必要があり、問題が発見されればそこから見直しを行う必要がある。見直しに際しては、ドキュメントとコードを比較して差異が無いかを確認し、差異が無ければ、定式化もしくは離散化の誤りと考えてドキュメントを見直していくことになる。コードのみを頼りに元の定式化・離散化に遡ることはおよそ不可能であるため、ドキュメントにないスキームは事実上開発が不可能となる。ドキュメントを作成する作業は自らの考えをチェックするきっかけであると同時に、他者にチェックをしてもらうことを通じて、ドキュメント自体とコードの両方の完成度をより高めることにつながることも期待される。

刊行物として asuca のドキュメントを作成するのは本報告が初めてであるが、大部分については開発者のドキュメントに記載されている内容を大いに利用した。

(2) バージョン管理ツールの利用

開発当初は開発者が限られていたこともあり、特別なバージョン管理ツールは用いていなかったが、2008 年 6 月より Subversion [10] というツールの利用を開始した。Subversion の利用において、開発の本流として開発が完了した成果のみを取り込むトランクと、そこから分岐して各開発者が自由にコードの変更を行えるブランチと分けるようにした。そして、当初は後述のチケットに応じた開発用のブランチを作成し、開発が完了するとトランクに取り込む（マージする）手法としていた。その後、2010 年 12 月に後述のレビューを行うこととし、それが済んだコードを管理者がトランクにマージする方式に改善している。asuca に限らず、バージョン管理ツールを用いた開発管理手法は概ね確立しており、今後もこの取り組みを継続していく計画である。

(3) プロジェクト管理ツールの利用

プロジェクト管理ツールの重要性についても室井 (2013) で既に触れられているので多くは述べない。asuca では 2009 年 1 月より Trac [11] というツールを用いたプロジェクト管理を開始した。当時は各種ある開発プロジェクトにおいて、それぞれの開発者が考える必要性に応じて個別のツールが利用されていた [12]。その後、2012 年度に「数値予報モデル開発管理情報共

[9] 第 3.2 節に詳しく述べるように、線形近似による精度低下が著しい場合など、線形化を適用する前に非線形コードに変更が必要となることがある。

[10] http://subversion.apache.org/

[11] http://trac.edgewall.org/

[12] 例えば、数値予報課プログラム班は「影舞 (http://www.daifukuya.com/kagemai/)」の利用を 2005 年に始めている。

有装置」を用いて全庁的に統一されたプロジェクト管理手法の導入が行われることとなり、そこで利用される Redmine [13] というツールへの移行を 2013 年に行っている。

いずれの管理システムにおいても、開発すべき事項をチケットという個票として記録し、関連する事項はチケットに記録として残していく。チケットに関連付けたブランチを作成してそれぞれの開発作業を行う方法を採用している。

なお、現状のツールの利用は現在の開発規模や開発フェイズに依存している。チケットの粒度をどの程度にするかに定まった基準が無く、当面は必要に応じて臨機応変に対応せざるを得ないと考えている。いずれは開発工程の管理度合いに応じた粒度の設定（例えば、仮に 1ヶ月に 1 度ミーティング等により進捗確認をするとすれば、1ヶ月に完了することが想定される事項を 1 つのチケットにするなど）にするといった対応の検討が必要と考えている。

(4) レビュー

より良い開発を行っていくためにはコードのレビューは欠かせない。また、レビューにおいては様々な観点からのチェックが必要である。具体的には、開発した項目が科学的・物理的に正しいかの観点、既存の機能を損なわないかの観点、加えてコーディングが規約に沿っているかの観点からのチェック等が考えられる。asuca 開発以前の JMA-NHM においても、レビューとまではいかないものの、コードを最終的に更新する前には主に電子メールによる開発概要の報告とチェックを行っていた。しかしながら、手法が定まっていなかったことや有志による対応にならざるを得なかった面もあった。このような事情を考慮して、JMA-NHM は 2010 年 8 月に、asuca は 2010 年 12 月にそれぞれレビューシステムを取り入れて、レビューを行わないコードはトランクにマージされないこととしている。また、以前のデータ同化システム JNoVA の開発ではレビューシステムが取り入れられていなかったが、asuca-Var の開発では、予報モデル asuca と一体化したプロジェクト・バージョン管理のもと、同一のレビューシステムの枠組みの中で開発を進めている。特に接線形・随伴モデルは予報モデルの線形近似に基づいており、予報モデルと密接に関連している。予報モデル開発と連携できるこのような管理体制は、データ同化システムの継続的な高度化のためにも重要である（詳細については第 3.2 節を参照のこと）。

将来的には、英国気象局で行われているようなサイエンスレビューとシステムレビュー (原・高谷 2013) を行いたいと考えている。現時点では、開発者が限られていることもあり、深いレベルでのサイエンスレビューができていないのが実状である（レビュアーには開発者と同程度もしくはそれ以上のスキルが必要）が、いずれはこの点を強化し、信頼性の高い開発を行える体制としたい。また、上に述べたドキュメントの作成はレビューにおいて力を発揮することから両者一体で対応を進めたい。

(5) データ同化システムの開発工程

先行して開発が進んでいる予報モデル asuca のシステムを効率的に拡張して変分法データ同化の機能を実装するため、asuca-Var の開発にあたって、その工程の検討を行った。現在、次のような流れで asuca-Var の開発に取り組んでいる。

1. 3D-Var の開発

   まず 3D-Var の整備を行う。これには変分法解析システムの最も基本的な部分である解析コアの最適化機能、観測演算子での要素変換・内挿機能の開発が必要である。これらの機能は後に 4D-Var、さらにアンサンブルとのハイブリッド手法など解析システムを拡張した際も、基本的な部分として共通して利用される部分である。

   現業システムとの関連では、局地解析 (LA) で 3D-Var によるデータ同化を行っている。予報モデル asuca は、最初の現業化として LFM への導入を計画しており、asuca-Var によるデータ同化についても、予報モデルに対応した初期値作成を行うシステムとして、LA への導入を目指す。

2. 力学のみの 4D-Var の開発

   3D-Var の整備の後に、4D-Var の構築が課題となる。現業システムとしては、メソ解析 (MA) の更新に向けた開発となる。物理過程を含む最終的な 4D-Var 構築の前に、まず力学のみの 4D-Var の構築を目標とする。

   また、この過程で、接線形モデルによる摂動の時間発展を実行する仕組みの整備も行う。非線形モデルによる摂動の時間発展と接線形モデルによる摂動の時間発展の比較を行うことで、接線形モデルによる近似が十分な精度を持っているか評価することが可能となる。これによって、後の 3. で物理過程を組み込むときに、精度向上への寄与を確認しつつ進めることができる。このように、力学の 4D-Var の開発は、物理過程を組み込む際の土台となる。

   工程としては、力学の接線形・随伴コードの開発と、1. の 3D-Var 開発を並行して進める。その後、解析コアの拡張を行い、時間発展を含む力学 4D-Var の探索を実行できるようにする。

3. 4D-Var への物理過程の組み込み

   力学 4D-Var と、摂動時間発展の評価の機能を利用して、精度を確認しつつ物理過程の接線形・随

[13] http://www.redmine.org/

伴モデルを開発し、4D-Var に組み込むことにより高度化を図る。各物理過程は物理過程ライブラリを参照して独立に選択し予報モデルに組み込むことができるため、この開発は各物理過程で並行して行うことができる。

新たな物理過程を接線形モデルに組み込むと、非線形モデルによる摂動の時間発展をより高い精度で近似できるようになると期待される。ただし、強い非線形性への対処、計算コストなど、各過程の性質に応じて特有の課題が出てくると想定されるので、開発にあたっては、接線形モデルによる摂動の時間発展の妥当性を物理的な観点から注意深く検討する必要がある（石川・藤田 (2013) などを参照)。

将来の予報モデル、物理過程の高度化に伴い、これに対応した接線形・随伴コードの更新も継続的に行っていく必要がある。高性能の接線形・随伴モデルの効率的な開発には、当該過程の理解が必須であり、予報モデル開発と連携し知見を活かしつつデータ同化開発を進めることが重要である。このような体制に向けた取り組みとして、前述のように、予報モデル開発者による接線形・随伴モデルのレビューなども取り入れつつ、開発を進めているところである。

参考文献

Buehner, M., P. L. Houtekamer, C. Charette, H. L. Mitchell, and B. He, 2010a: Intercomparison of Variational Data Assimilation and the Ensemble Kalman Filter for Global Deterministic NWP. Part I: Description and Single-Observation Experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 1550–1566.

Buehner, M., P. L. Houtekamer, C. Charette, H. L. Mitchell, and B. He, 2010b: Intercomparison of Variational Data Assimilation and the Ensemble Kalman Filter for Global Deterministic NWP. Part II: One-Month Experiments with Real Observations. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 1567–1586.

原旅人, 高谷祐平, 2013: 海外数値予報センターの開発管理の例. 数値予報課報告・別冊第 59 号, 気象庁予報部, 195–199.

石川宜広, 藤田匡, 2013: 4 次元変分法の開発と物理過程の課題. 数値予報課報告・別冊第 59 号, 気象庁予報部, 152–187.

門脇隆志, 2009: 4 次元変分法の改良. 数値予報課報告・別冊第 55 号, 気象庁予報部, 6–10.

Kato, T., 1995: A Box-Lagrangian Rain-Drop Scheme. *J. Meteor. Soc. Japan*, **73**, 241–245.

Kato, T., 1998: Numerical simulation of the band-shaped torrential rain observed over southern Kyushu, Japan on 1 August 1993. *J. Meteor. Soc. Japan*, **76**, 97–128.

Klemp, J. B., W. C. Skamarock, and J. Dudhia, 2007: Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 2897–2913.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

Liu, C., Q. Xiao, and B. Wang, 2008: An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part I: Technical formulation and preliminary test. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 3363–3373.

Liu, C., Q. Xiao, and B. Wang, 2009: An ensemble-based four-dimensional variational data assimilation scheme. Part II: Observing System Simulation Experiments with the Advanced Research WRF (ARW). *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 1687–1704.

三好建正, 2006: アンサンブル・カルマンフィルタ〜データ同化との融合〜. 数値予報課報告・別冊第 52 号, 気象庁予報部, 80–99.

室井ちあし, 斉藤和雄, 加藤輝之, 永戸久喜, 1999: 気象庁気象研究所・数値予報課統一メソモデルの開発. 日本気象学会秋季大会予稿集, B305.

室井ちあし, 2013: 開発管理の必要性. 数値予報課報告・別冊第 59 号, 気象庁予報部, 192–194.

Nakamura, H., 1978: Dynamical effects of mountains on the general circulation of the atmosphere: 1. Development of finite-difference schemes suitable for incorporating mountains. *J. Meteor. Soc. Japan*, **56**, 317–339.

小野耕介, 2010: メソ特異ベクトル法. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 93–104.

Ooyama, K., 2001: A Dynamic and Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere with Parameterized Microphysics. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2073–2102.

Piotrowski, Z. P., P. K. Smolarkiewicz, S. P. Malinowski, and A. A. Wyszogrodzki, 2009: On numerical realizability of thermal convection. *J. Comput. Phys.*, **228**, 6268–6290.

斉藤和雄, 2003: 支配方程式. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 16–25.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

第2章　力学過程

2.1　定式化 [1]

本節では、asuca の力学過程の定式化について述べる。はじめに第 2.1.1 項では直交直線座標の基礎方程式系を導出する。次に第 2.1.2 項では、数値計算を行う任意の座標に対応できるよう一般座標の方程式系への変換を行い、第 2.1.3 項では、計算効率および開発効率の観点から鉛直座標のとり方について制限を設ける。第 2.1.4 項では、計算誤差を小さく抑える目的で、方程式系に基本場を導入する。第 2.1.5 項では、導出した方程式系を用いた asuca の計算手順の概略を示す。

2.1.1　基礎方程式系

asuca で用いる支配方程式は完全圧縮の非静力学方程式系であり、質量、運動量、温位の保存則と状態方程式から構成される。予報変数は、密度、運動量、温位とし、状態方程式から気圧を診断する。本項では、直交直線座標の基礎方程式系の定式化について説明する。以下では、まず定式化の考え方と表記における注意点を示しておく。なお、本節の記述では、アインシュタインの規約を用い、同じ添字が同じ項の上下に現れた場合はその添字について空間方向に和を取る。

保存則は、ある領域内の物理量 Φ の時間変化が、領域表面から流出入するフラックスと領域内での生成・消滅によって決まることから、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \Phi dV = -\int_S n_i F^i dS + \int_V Q_\Phi dV \quad (2.1.1)$$

と表される。ここで、F^i は i 方向のフラックス、Q_Φ は生成・消滅を表し、n_i はこの領域の表面に垂直な単位ベクトル、$\int_V dV$ は領域の体積積分、$\int_S dS$ は領域を囲む閉曲面の表面積分である。u^i を i 方向の流速として、

$$F^i = \Phi u^i + \tilde{f}^i_\Phi \quad (2.1.2)$$

のように流速 u^i によるフラックスと u^i によらないフラックス $\tilde{f}^i_\Phi$ に分けて考えると、(2.1.1) 式は、ガウスの定理により

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi u^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{f}^i_\Phi}{\partial x^i} + Q_\Phi \quad (2.1.3)$$

と書ける。(2.1.3) 式の右辺第 1 項はフラックスの発散の形で表されており、この形式はフラックス形式と呼ばれる [2]。この形式は、数値計算において保存性を保持しやすいため、asuca の方程式系はフラックス形式で記述する。

本項では、大気が乾燥大気 (d)、水蒸気 (v)、雲水 (c)、雨 (r)、雲氷 (i)、雪 (s)、あられ (g) といった成分によって構成されていることを考慮して定式化を進める。また、大気の各成分の密度の和を全密度と定義する。なお、ここでの定式化は Ooyama (2001) を参考にした。

時間を t、3 次元空間 (x, y, z) における大気速度を (u, v, w)、密度 ρ、温位 θ、気圧 p、重力加速度を g、全密度と水物質の密度の比を q とする。また、大気を前述の各成分に分けて記述する場合は、下付き添字 α で区別し、各成分の和をとる場合は $\sum_\alpha$ で表す。また、大気速度 (u, v, w) と降水粒子の速度（落下速度）の違いを考慮し、大気の各成分によってそれぞれの速度 $(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ を定義する。

(1)　連続の式

各大気成分の連続の式

大気の各成分毎の質量の保存は次のように表される。

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha\right) = \left(Q_\rho\right)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha \quad (2.1.4)$$

ここで $(Q_\rho)_\alpha$ は大気の各成分の生成・消滅を表す項であり、$(Q_\rho)_d = 0$ である（乾燥大気は生成・消滅しない）。$(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha$ は大気の各成分の u^i_α によらない i 方向のフラックスであり、具体的には、地表面からの水蒸気の供給を想定する（つまり、$\alpha = v$ 以外は $(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha = 0$）。

降水粒子の落下

降水粒子は、大気中を落下する液体または固体の水物質とする。ここで、降水粒子の速度 $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha (\alpha = r, s, g)$ を大気の速度 u, v, w とそこからの相対的な落下速度 $(u_t)_\alpha, (v_t)_\alpha, (w_t)_\alpha$ に分けて、

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u + (u_t)_\alpha \\ v_\alpha &= v + (v_t)_\alpha \\ w_\alpha &= w + (w_t)_\alpha \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

と表し、u, v, w を予報変数とする。一方、相対的な落下速度については、湿潤大気に対する降水粒子の密度の比の関数として診断的に与える [3]。(2.1.5) 式により (2.1.4) 式は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\ &\quad = \left(Q_\rho\right)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

して、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\phi u^i\right) = \rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) + \phi\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho u^i\right)\right)$$

のように変形した形式は、下線部の項の形から移流形式（あるいは勾配型、非保存型）と呼ばれる。

---

[1] 河野 耕平、松林 健吾、石田 純一、室井 ちあし

[2] あるいは発散型、保存型と呼ばれる。一方、$\Phi = \rho\phi$ と

[3] 雲物理過程において診断する。実際には落下の速さ（スカラー量）が診断的に求まり、向きは重力方向となる。

となり、密度の移流は、大気速度によるものと大気に相対的な降水粒子の落下速度によるものからなる。

全密度の連続の式

乾燥空気と水物質をあわせた全密度を $\rho = \sum \rho_\alpha$ とすると、全ての成分について (2.1.4) 式の和を取ることにより、連続の式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u^i) + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\ &\quad = \sum_\alpha (Q_\rho)_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha \equiv Q_\rho - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\rho\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

全密度の時間変化は、大気速度 u, v, w による移流、降水粒子 ($\alpha = r, s, g$) の落下速度 $(u_t)_\alpha, (v_t)_\alpha, (w_t)_\alpha$ による移流、生成・消滅 Q_ρ ($= 0$ である [4]) および大気速度・落下速度によらないフラックスによる時間変化 (地表面からの水蒸気供給) $\partial \tilde{f}^i_\rho / \partial x^i$ によって決まる。

(2) 運動量保存の式

各大気成分の運動量保存の式

大気の各成分毎の運動量の保存は次のように表される。乾燥大気 (d)、水蒸気 (v) 以外は $p_\alpha = 0$ である。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\ &\quad + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} + \rho_\alpha g^i + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha u_{\alpha k} \\ &= (M_{\rho u})^i_\alpha + u^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha + (Q_{\rho u})^i_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

大気各成分の運動量の時間変化は、$(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ による移流、気圧傾度力と重力、コリオリ力 (Ω は地球自転の角速度、ϵ はレビ・チビタの記号を表す)、さらに以下の

- $(M_{\rho u})^i_\alpha$: 大気の各成分が他の成分から受ける力 (たとえば、降水粒子が周囲の大気をひきずりおろす力)
- $u^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha + (Q_{\rho u})^i_\alpha$: 成分 α の質量の生成・消滅に伴う運動量の生成・消滅 $u^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha$ とそれ以外による運動量の生成・消滅 $(Q_{\rho u})^i_\alpha$
- $\frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha$: u^i_α によらないフラックスによる時間変化 (地表面との運動量交換)

によって決まる。

降水粒子の落下

降水粒子は瞬時に終端速度に達すると見做して、ラグランジュ微分はゼロとすると、

$$\frac{d(u_t)^i_\alpha}{dt} = \frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial t} + u^j_\alpha \frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial x^j} = 0 \tag{2.1.9}$$

[4] ただし、(6) の最後に述べるように、数値計算上は $\sum (Q_\rho)_\alpha$ がゼロにならない場合があるため、以降もこの項を明示的に扱う。

と書ける。

(2.1.8) 式の時間変化項と移流項は、(2.1.4) 式、(2.1.5) 式、(2.1.9) 式より、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i u^j_\alpha\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i u^j\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right) \\ &\quad + (u_t)^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

と変形できる [5] 。

以上から、(2.1.8) 式は、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i u^j\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right) \\ &\quad + \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} + \rho_\alpha g^i \\ &\quad + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha u_k + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha (u_t)_{\alpha k} \\ &= (M_{\rho u})^i_\alpha + u^i (Q_\rho)_\alpha + (Q_{\rho u})^i_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

となり、運動量の移流は、密度の場合と同様に大気速度によるものと大気に相対的な降水粒子の落下速度によるものからなる。

全密度を用いた運動量保存の式

乾燥空気と水物質をあわせた全密度を ρ、全気圧を $p = \sum p_\alpha = p_d + p_v$ とすると、全ての成分について (2.1.11) 式の和を取ることにより、運動量保存の式は次式になる。

[5] 途中、(2.1.4) 式と (2.1.9) 式から導出される以下の関係式を用いた。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha u^j_\alpha\right) \\ &= \rho_\alpha \left\{\frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial t} + u^j_\alpha \frac{\partial (u_t)^i_\alpha}{\partial x^j}\right\} \\ &\quad + (u_t)^i_\alpha \left\{\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^j_\alpha\right)\right\} \\ &= (u_t)^i_\alpha (Q_\rho)_\alpha - (u_t)^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_\rho)^j_\alpha\end{aligned}$$

ここで、$\alpha \neq v$ のときは $(\tilde{f}_\rho)^j_\alpha = 0$、$\alpha = v$ のときは $(u_t)^i_\alpha = 0$ なので、$(u_t)^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_\rho)^j_\alpha = 0$ となる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho u^i u^j\right) + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right) \\
&\quad + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \rho g^i \\
&\quad + 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho u_k + \sum_\alpha 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho_\alpha (u_t)_{\alpha k} \\
&= u^i \sum_\alpha (Q_\rho)_\alpha + \sum_\alpha (Q_{\rho u})^i_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{f}_{\rho u})^{ij}_\alpha \\
&\equiv u^i Q_\rho + Q^i_{\rho u} - \frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f}^{ij}_{\rho u}
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

ここで、各成分が他の成分から受ける力は、全成分についての和をとった場合は互いに打ち消しあうため、ゼロとした ($\sum (M_{\rho u})_\alpha = 0$)。

(3) 状態方程式

状態方程式は、気体である各成分毎 ($\alpha = d, v$) に気体定数 R_α を用いて、次のように書くことができる。

$$
p_\alpha = \rho_\alpha R_\alpha T \tag{2.1.13}
$$

ここで、T は気温である。$p = p_d + p_v$ であるから、

$$
p = p_d + p_v = (\rho_d R_d + \rho_v R_v) T \tag{2.1.14}
$$

のように表され、$\epsilon = R_d / R_v$ とすると [6]、以下の式となる。

$$
p = \left(\rho_d + \frac{\rho_v}{\epsilon}\right) R_d T = \rho \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\epsilon\rho}\right) R_d T \tag{2.1.15}
$$

ここで、次式で定義されるエクスナー関数 π 及び温位 θ を導入する。C_v は定積比熱、C_p は定圧比熱である。

$$
\pi = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R_d}{C_p}}, \quad \theta = \frac{T}{\pi} \tag{2.1.16}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
\theta_m &= \theta \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\epsilon\rho}\right) \\
&= \theta \left(\frac{\rho - \rho_v - \sum_{\alpha \neq v} \rho_\alpha}{\rho} + \frac{\rho_v}{\epsilon\rho}\right) \\
&= \theta \left(1 + \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right) q_v - \sum_{\alpha \neq v} q_\alpha\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.17}
$$

を導入することにより [7]、全気圧 p についての状態方程式を次式のように導き出すことができる。

$$
p = R_d \pi \rho \theta_m \tag{2.1.18}
$$

[6] $R_d \simeq 287.0, R_v \simeq 461.5$ であるから $\epsilon \simeq 0.622$, $(1-\epsilon)/\epsilon \simeq 0.608$

[7] θ_m は液体及び固体の水を含まない場合は仮温位となる。

これを p について解けば、

$$
p = p_0 \left(\frac{R_d \rho \theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}} \tag{2.1.19}
$$

となり、また π について解けば、

$$
\pi = \left(\frac{R_d \rho \theta_m}{p_0}\right)^{\frac{R_d}{C_v}} \tag{2.1.20}
$$

となる。

(4) 温位の式

温位 θ の時間変化は以下の式で表される。

$$
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + u^i \frac{\partial \theta}{\partial x^i} = Q_\theta - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\theta \tag{2.1.21}
$$

右辺の Q_θ は相変化に伴う潜熱の解放・吸収による温位変化、$\partial \tilde{f}^i_\theta / \partial x^i$ は u^i によらないフラックスによる時間変化（放射および地表面との熱交換）を表す。両辺に $(\rho_d + \rho_v/\epsilon)$ を乗じ、乾燥大気 (d)、水蒸気 (v) の連続の式（(2.1.4) 式）と組み合わせることにより、以下のフラックス形式による温位の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta_m) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\theta_m u^i\right) \\
&= \theta \left\{ \left((Q_\rho)_d - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_d \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\epsilon}\left((Q_\rho)_v - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_v \right) \right\} \\
&\quad + \left(\rho_d + \frac{\rho_v}{\epsilon}\right)\left(Q_\theta - \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\theta\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.22}
$$

(5) 水物質の式

水物質については、大気の各成分毎の連続の式（(2.1.4) 式）から、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha u^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\
&= (Q_\rho)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.1.23}
$$

であり、ここで、q_α は全密度と各成分の密度の比 [8] であるので、$\rho_\alpha = \rho q_\alpha$ を用いて以下のように書ける。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho q_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha u^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha (u_t)^i_\alpha\right) \\
&= (Q_\rho)_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.1.24}
$$

(6) 直交直線座標の方程式系：まとめ

以上で直交直線座標でのフラックス形式の方程式系の導出が完了した。導出した方程式系を改めて以下にまとめておく。予報変数として、$\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho\theta_m, \rho q_\alpha$ があり、それぞれの時間発展の方程式が立てられる。ま

[8] 水蒸気でいえば、混合比 $= \rho_v/\rho_d$、比湿 $= \rho_v/(\rho_d + \rho_v)$、全密度と水蒸気の密度の比 $= \rho_v/\rho = \rho_v/\sum \rho_\alpha$ である。

た、その他の未知数として p があり、これは状態方程式から診断される。

なお、乾燥大気の方程式系では、降水粒子の落下速度を含む項がゼロになり、θ_m が温位 θ と同じになる。

連続の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho u^i\right)+\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha (u_t)^i_\alpha\right)\\&=Q_\rho-\frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\rho \equiv F_\rho\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

運動量保存の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho u^i u^j\right)+\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho q_\alpha u^i (u_t)^j_\alpha\right)\\&\quad+\frac{\partial p}{\partial x^i}+\rho g^i\\&\quad+2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho u_k+\sum_\alpha 2\epsilon^{ijk}\Omega_j \rho (u_t)_{\alpha k}\\&\quad=u^i Q_\rho+Q^i_{\rho u}-\frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f}^{ij}_{\rho u}\equiv F^i_{\rho u}\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

温位の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta_m)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\theta_m u^i\right)\\&=\theta\left\{\left((Q_\rho)_d-\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_d\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\epsilon}\left((Q_\rho)_v-\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_v\right)\right\}\\&\quad+\left(\rho_d+\frac{\rho_v}{\epsilon}\right)\left(Q_\theta-\frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}^i_\theta\right)\equiv F_{\rho\theta_m}\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

水物質の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho q_\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha u^i\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho q_\alpha (u_t)^i_\alpha\right)\\&=(Q_\rho)_\alpha-\frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{f}_\rho)^i_\alpha\equiv F_{\rho\alpha}\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

状態方程式

$$p=p_0\left(\frac{R_d\rho\theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}} \tag{2.1.29}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\theta_m&=\theta\left(1+\left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right)q_v-\sum_{\alpha\neq v}q_\alpha\right)\\\epsilon&=\frac{R_d}{R_v}\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

各式における $F_\rho, F_{\rho u}, F_{\rho v}, F_{\rho w}, F_{\rho\theta_m}$ について、数値計算上、考慮すべき事項を以下に補足する。

- 第 2.5.4 項で述べるレイリーダンピングを各予報変数に対して用いる場合には、これによる生成・消滅がありうる。
- 鉛直方向の CFL 条件を破るような上昇流に対して、クーラン数を 1 に近づけるよう減衰項を付加する手法[9] を導入する場合は、これによる ρw の消滅がありうる[10]。
- 大気の各成分の生成・消滅の総和 Q_ρ はゼロとなるべき量であるが、雲物理過程のコードによっては Q_ρ がゼロにならないものがある。このことも生成・消滅として扱う。

2.1.2 一般座標系における基礎方程式系

数値予報モデルでは、空間的に離散化した格子において、予報変数の時間発展を求めていく。前項で直交直線座標系における基礎方程式系を示したが、この方程式系が適用できる格子配置は直交直線座標に基づくものに限定される。計算領域に地形が含まれる場合、その形状を直交直線の格子で表現するためには、非常に多くの細かな格子が必要となるが、地形に沿った形状の格子を配置できれば、その格子形状によって地形を表現できて効率が良い。座標軸が直交せず、また、形状に沿って曲率を持った格子配置に対応する座標は、一般座標となる。数値計算を行う任意の座標系に対応するため、本項では、直交直線座標系における方程式系を一般座標系の方程式系に変換する。

(1) 方程式系の変換の準備

まず、直交直線座標 (x, y, z)、一般座標 (ξ, η, ζ) のそれぞれの微小要素の変換 $(dx, dy, dz) \to (d\xi, d\eta, d\zeta)$ を、座標変換行列 A を用いて以下のように記述する。

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{2.1.31}$$

ここで、座標変換行列 A は、

$$A \equiv \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \tag{2.1.32}$$

[9] WRF-ARW で採用されている Vertical Velocity Damping (Skamarock et al. 2008)

[10] これは、現状、積雲対流に対してエントレインメント/デトレインメントの結果としての上昇流の弱まりを表現するために導入したものである。エントレインメント/デトレインメントを表現する過程について、今後、導入に向けた開発が必要であると考えている。

である [11]。このとき、行列 A の各要素は変換のメトリックと呼ばれる。また、A の行列式

$$J = |A| \tag{2.1.33}$$

は変換のヤコビアンと呼ばれる。これらは、座標間の変換を記述する重要な量である。

メトリックとヤコビアンを用いて基礎方程式系を変換していくにあたって、ベクトル、テンソル解析の変換公式に基づき、方程式の各項の変換において必要な変換則を示す。なお、一般座標系 (ξ, η, ζ) を $(\hat{x}^i)$ と記述する。

速度成分の一般座標変換は、$\hat{u}^i$ を一般座標の（反変）速度成分として、(2.1.31) 式に従い

$$\hat{u}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} u^n \tag{2.1.34}$$

で表される。同様に、降水粒子の落下速度成分 $(\hat{u_t})^i_\alpha$ は、

$$(\hat{u_t})^i_\alpha = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n} (u_t)^n_\alpha \tag{2.1.35}$$

と表される。

予報方程式は変換のヤコビアンの逆数 $(1/J)$ を乗じた形で示すことにする。これは、$1/J$ は第 2.1.5 項で述べる物理空間の単位セルの体積に相当し、したがって、このような形の変換をすると、単位体積あたりの保存量 ϕ について物理空間の単位セル内の積分値 (ϕ/J) の収支という形で表すことができるためである。以下では各項の置き換えを示すが、それぞれに $1/J$ を乗じてある。スカラー ϕ の予報方程式においては、各項をそれぞれ次のように置き換えれば良い。

- スカラーの時間変化項

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\phi\right)$$

- ベクトルの発散（移流項）

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi u^i\right) \to \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\phi \hat{u}^i\right)$$

また、運動量保存の式においては、各項をそれぞれ次のように置き換えれば良い。

- ベクトルの時間変化項

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u^i\right) \to \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho \hat{u}^i\right)$$

- テンソルの発散 (移流項)

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho u^i u^j\right) \to \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho \hat{u}^i \hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\hat{\Gamma}^i_{jk}\rho \hat{u}^j \hat{u}^k$$

- スカラーの微分 (気圧傾度力項)

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} \to \frac{1}{J}\hat{G}^{in}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n}$$

- ベクトル

$$\rho g^i \to \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n}\rho g^n$$

ここで、$\hat{G}_{ij}, \hat{G}^{ij}$ はそれぞれ（共変）計量テンソル、反変計量テンソル

$$\hat{G}_{ij} = \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^j}, \qquad \hat{G}^{ij} = \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^m} \tag{2.1.36}$$

であり、メトリックで記述できる。また、$\hat{\Gamma}^i_{jk}$ はクリストッフェル記号

$$\hat{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\hat{G}^{im}\left(\frac{\partial \hat{G}_{km}}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \hat{G}_{jm}}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial \hat{G}_{kj}}{\partial \hat{x}^m}\right) \tag{2.1.37}$$

である。なお、上記の変換式では、一般座標系の計量テンソル $(\hat{G}_{ij})$ の行列式の平方根 $(\hat{G}^{\frac{1}{2}})$ が、直交直線座標から一般座標への変換のヤコビアンの逆数 $(1/J)$ に等しいことを用いている。

(2) 方程式系の変換

上記の変換を (2.1.25) 式–(2.1.28) 式の各項に適用すると、方程式系は以下のように変換できる。

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho \hat{u}^i\right) + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (\hat{u_t})^i_\alpha\right) = \frac{1}{J}F_\rho \tag{2.1.38}$$

運動量保存の式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho \hat{u}^i\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\rho \hat{u}^i \hat{u}^n\right) + \frac{1}{J}\hat{\Gamma}^i_{jk}\rho \hat{u}^j \hat{u}^k \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha \hat{u}^i (\hat{u_t})^n_\alpha\right) + \sum_\alpha \frac{1}{J}\hat{\Gamma}^i_{jk}\rho_\alpha \hat{u}^j_\alpha (\hat{u_t})^k_\alpha \\
&+ \frac{1}{J}\hat{G}^{in}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n}\rho g^n \\
&+ \frac{1}{J}2\hat{\epsilon}^{ijk}\hat{\Omega}_j \rho \hat{u}_k + \sum_\alpha \frac{1}{J}2\hat{\epsilon}^{ijk}\hat{\Omega}_j \rho_\alpha (\hat{u_t})_{\alpha k} \\
&= \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^n}F^n_u
\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

[11] $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{y,z}$ を ξ_x のように記述する。

温位の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m\right)+\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m\hat{u}^i\right)=\frac{1}{J}F_{\rho\theta_m} \tag{2.1.40}$$

水物質の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\hat{u}^i\right)+\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha(\hat{u}_t)^i_\alpha\right)=\frac{1}{J}F_{\rho\alpha} \tag{2.1.41}$$

ここで、(2.1.38) 式の F_ρ には、(2.1.25) 式に示したように $\partial\tilde{f}^i_\rho/\partial x^i$ の項（ベクトルの発散）が含まれている。しかし、実際には物理過程によって評価された ρ の時間変化率の形で扱うため、スカラーの時間変化項と同様の変換を F_ρ に適用した（$F_{\rho\theta_m}, F_{\rho\alpha}$ についても同様）。また、$\partial\tilde{f}^{ij}_{\rho u}/\partial x^j$ の項（テンソルの発散）を含む $F^i_{\rho u}$ についても、ρu^i の時間変化項と同様の変換を適用した。

以上が、一般座標系の基礎方程式系となるが、運動量保存の式については、次の第 2.1.3 項において、さらに式の変形を行う。

2.1.3 重力加速度と鉛直座標に関する制限と運動量保存の式の変形

(1) 重力加速度と鉛直座標に関する制限

ここまでの基礎方程式系の導出においては、あらゆる一般座標系を対象に議論しており、その座標系の性質について、特に制限を設けていなかった。ここで、重力加速度は z 軸及び ζ 軸と平行であるとする制限を設ける。こうすることにより、音波及び重力波の解法に split-explicit 法 (Klemp and Wilhelmson 1978) を利用できることや乱流過程や降水過程など鉛直方向に依存のある物理過程・力学過程の扱いが簡便になること等の長所がある [12]。

重力加速度と z 軸が平行であるとしたので、以下の式が成り立つ。

$$g^1=g^2=0,\qquad u_{t_\alpha}=v_{t_\alpha}=0 \tag{2.1.42}$$

さらに、z 軸と ζ 軸が平行であるから、

$$\xi_z=\eta_z=0 \tag{2.1.43}$$

となり、したがって、座標変換後の降水粒子の落下速度成分は、

$$\begin{aligned}(\hat{u}_t)_\alpha&=\xi_x(u_t)_\alpha+\xi_y(v_t)_\alpha+\xi_z(w_t)_\alpha=0\\(\hat{v}_t)_\alpha&=\eta_x(u_t)_\alpha+\eta_y(v_t)_\alpha+\eta_z(w_t)_\alpha=0\\(\hat{w}_t)_\alpha&=\zeta_x(u_t)_\alpha+\zeta_y(v_t)_\alpha+\zeta_z(w_t)_\alpha=\zeta_z(w_t)_\alpha\end{aligned} \tag{2.1.44}$$

となる。この制限を設けることによって、(2.1.38) 式、(2.1.39) 式及び (2.1.41) 式において、上記に関係する項が実質ゼロになる。

(2) 運動量保存の式の変形

asuca では、予報変数である運動量には、局所直交座標系 (x,y,z) における速度成分 (u,v,w) に基づく運動量の成分 $(\rho u,\rho v,\rho w)$ を採用している。(2.1.39) 式では、$(\rho\hat{u},\rho\hat{v},\rho\hat{w})$ の時間変化を記述する形になっているのを $(\rho u,\rho v,\rho w)$ の時間変化を記述するように式を変形する。後述するように、このように式を変形することで (2.1.39) 式のクリストッフェル記号の扱いが容易になる。一方、移流速度には $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ を採用している [13]。以下では、「重力加速度は z 軸及び ζ 軸と平行」とする制限を課した上で、$(\rho u,\rho v,\rho w)$ の時間発展の式とするように (2.1.39) 式を変形する。

重力加速度が z 軸及び ζ 軸と平行であるとすることは、局所直交直線座標の z 軸の方向が、地球上の局所局所で変わることを考慮することであるとも言える。それに伴い、(u,v,w) の基底ベクトルも球面に沿って方向を変えることになる。このことを表現するために、斉藤 (2003) および石田 (2008) で解説された JMA-NHM の方法と同様に、局所直交直線座標 x^i から一般座標 $\hat{x}^i$ の変換の過程において、以下の (2.1.45) 式のように x^i 座標からの座標変換行列の非対角成分がゼロであるような球面直交曲線座標 $\bar{x}^i$ を導入する。そして、球面直交曲線座標 $\bar{x}^i$ から座標 $\hat{x}^i$ への変換に関しては水平方向には不変であるとする。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}d\bar{x}\\d\bar{y}\\d\bar{z}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial x}&\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial y}&\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial z}\\[2mm]\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial x}&\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial y}&\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial z}\\[2mm]\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial x}&\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial y}&\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}m_1&0&0\\0&m_2&0\\0&0&m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

球面直交曲線座標 $\bar{x}^i$ としては、これも斉藤 (2003) および石田 (2008) 同様に地図投影法を用いる。m_i はマップファクターと呼ばれる量で、$m_3=1$ である。このような $\bar{x}^i$ 座標の利点は、$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ と (u,v,w) との関

[12] 一方、この制限の短所としては、急峻な地形が存在する場合に、座標の非直交性が大きくなることにより誤差が大きくなってしまう点が挙げられる。

[13] $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ は空間離散化した場合のセルの各面に直交する成分であり、セルの各面のフラックスを考える上で直感的にも分かりやすい。

係を、

$$\bar{u} = m_1 u, \quad \bar{v} = m_2 v, \quad \bar{w} = m_3 w \tag{2.1.46}$$

のようにマップファクターを用いて表すことができることと、計量テンソルの非対角成分がゼロになり、(2.1.39) 式のクリストッフェル記号 $(\hat{\Gamma}^i_{jk})$ を含む項（以下、この項を曲率項と呼ぶ）の扱いの煩雑さが軽減されることである。また、$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ と $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ との関係は、座標 $\bar{x}^i$ から座標 $\hat{x}^i$ への変換に関しては水平方向には不変としたことから、

$$\hat{u} = \bar{u}, \quad \hat{v} = \bar{v}, \quad \hat{w} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{x}}\bar{u} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{y}}\bar{v} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \bar{z}}\bar{w} \tag{2.1.47}$$

と表される。

u^i と $\bar{u}^i$ の関係が (2.1.46) 式で表されることを念頭に、(2.1.39) 式において、まず、$\hat{u}^i$ から $\bar{u}^i$ への変換を考える。(2.1.39) 式において、i を m とおきかえ、$\partial \bar{x}^i / \partial \hat{x}^m$ (m について和をとる）を両辺にかけて整理すると、次のように式変形できる（付録 2.1.A に式変形についての補足を付す)。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho \bar{u}^i\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho \bar{u}^i \hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho \bar{u}^j \bar{u}^k \bar{\Gamma}^i_{jk} \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha \bar{u}^i (\hat{u_t})^j_\alpha\right) + \sum_\alpha \frac{1}{J}\rho \bar{u}^j (\bar{u_t})^k_\alpha \bar{\Gamma}^i_{jk} \\
&+ \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} + \frac{1}{J}\rho \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^3} g \\
&+ \frac{1}{J} 2 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \epsilon^{mjk} \Omega_j \rho u_k \\
&+ \sum_\alpha \frac{1}{J} 2 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \epsilon^{mjk} \Omega_j \rho (u_t)_{\alpha k} \\
&= \frac{1}{J}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} F^n
\end{aligned} \tag{2.1.48}$$

これにより、(2.1.48) 式の $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ は、一般座標系の $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ に比較して扱いが容易となる。以下では、クリストッフェル記号 $(\bar{\Gamma}^i_{jk})$ をマップファクターを用いて表し、それを用いて (2.1.48) 式を変形して $(\rho u, \rho v, \rho w)$ の時間発展の式とした結果を示す。

まず、(2.1.48) 式の $\bar{\Gamma}^i_{jk}$

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\bar{G}^{im}\left(\frac{\partial \bar{G}_{km}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{G}_{jm}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{G}_{kj}}{\partial \bar{x}^m}\right) \tag{2.1.49}$$

を求めるために計量テンソル $\bar{G}^{ij}, \bar{G}_{ij}$ が必要となる。

計量テンソル $\bar{G}^{ij}, \bar{G}_{ij}$ はマップファクターを用いて次のように書ける。

$$\bar{G}^{ij} = \begin{pmatrix} {m_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {m_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {m_3}^2 \end{pmatrix} \tag{2.1.50}$$

$$\bar{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{{m_1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{{m_2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{{m_3}^2} \end{pmatrix} \tag{2.1.51}$$

ここで、計量テンソルの非対角成分がゼロであるから、m についての和は $m = i$ しか残らないので、

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\bar{G}^{ii}\left(\frac{\partial \bar{G}_{ki}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{G}_{ji}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{G}_{kj}}{\partial \bar{x}^i}\right) \tag{2.1.52}$$

である（マップファクターを用いて表したクリストッフェル記号の成分は付録 2.1.B を参照)。

この $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ を用いて、(2.1.48) 式の大気速度の移流項と曲率項を変形する（途中の式変形については付録 2.1.C にまとめる)。式変形の際の注意点は、shallow assumption[14] を導入して、マップファクターの鉛直微分項をゼロとすることと、shallow assumption を適用した場合に角運動量を保存させるために Ω_1, Ω_2 の項を省略することである。この点において、(2.1.39) 式とは異なる。式変形後の運動量保存の式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u \hat{u}^j\right) \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha u (\hat{w_t})_\alpha\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} \\
&- \frac{1}{J}\rho v \Gamma - \frac{1}{J}\rho v f = \frac{1}{J}F_{\rho u}
\end{aligned} \tag{2.1.53}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho v \hat{u}^j\right) \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha v (\hat{w_t})_\alpha\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} \\
&+ \frac{1}{J}\rho u f = \frac{1}{J}F_{\rho v}
\end{aligned} \tag{2.1.54}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho w \hat{u}^j\right) \\
&+ \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha w (\hat{w_t})_\alpha\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial \hat{x}^n} \\
&+ \frac{\rho}{J} g = \frac{1}{J}F_{\rho w}
\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

[14] 地球半径 a に対して $z \ll a$ とする近似。

ただし、

$$\Gamma = u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} - v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} \tag{2.1.56}$$

$$f = 2\Omega_3 \tag{2.1.57}$$

である。なお、降水粒子の落下による移流の項については、大気速度の移流項と曲率項の変形と同様の変形を行い、降水の落下速度が $\hat{z}$ 軸と平行であることを用いると、大気速度の Γ の項に相当する項はゼロとなる。また、降水粒子の落下速度についてのコリオリ項は、降水の落下速度が $\hat{z}$ 軸と平行であることと、shallow assumption の適用によって省略される。

2.1.4 基本場の導入

ここまで、基礎方程式系の導出及び座標変換まで行ったところであるが、実際に数値計算を行う場合には、以下に述べるように、気圧傾度力項と浮力項の扱いに注意が必要となる。まず、気圧傾度力項と浮力項は、状態方程式

$$p = p_0\left(\frac{R_d\rho\theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}}, \quad p = R_d\pi\rho\theta_m \tag{2.1.58}$$

及び、その微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}p &= p_0\frac{C_p}{C_v}\left(\frac{R_d\rho\theta_m}{p_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}-1}\frac{R_d}{p_0}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left(\rho\theta_m\right)\\ &= \frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\left(\rho\theta_m\right)\end{aligned} \tag{2.1.59}$$

を利用して、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}p + \frac{\rho g^i}{J}\\ &= \frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}\left(\rho\theta_m\right) + \frac{\rho g^i}{J}\\ &= \frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\rho\theta_m\right) + \frac{\rho g^i}{J}\end{aligned} \tag{2.1.60}$$

ここで、鉛直の気圧傾度力項と浮力項の和の絶対値は、それぞれの項の絶対値よりも数桁小さいために、計算機上の桁落ちによる計算精度の低下が問題となる。そこで、桁落ちに伴う誤差を小さくするため、変数を基本場と呼ぶ場とそこからの偏差に分離して扱うこととする。以下では「$\overline{\ }$」がついた値が基本場であり、「$'$」がついた値が基本場からの偏差を表す。

$$\begin{aligned}\rho &= \overline{\rho} + \rho'\\ \rho\theta_m &= \overline{\rho\theta_m} + \left(\rho\theta_m\right)'\\ \pi &= \overline{\pi} + \pi'\end{aligned} \tag{2.1.61}$$

基本場は時間変化させず下記の静力学平衡の関係を満たすように決める。

$$\frac{C_p}{C_v}R_d\overline{\pi}\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\overline{\rho\theta_m}\right) + \frac{\overline{\rho}g^i}{J} = 0 \tag{2.1.62}$$

上記の関係を用いると、気圧傾度力項と浮力項は以下のように変形できる。なお、ここでは定積比熱と定圧比熱の比 $\gamma = C_p/C_v$ を用いている。

$$\begin{aligned}&\frac{C_p}{C_v}R_d\pi\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\rho\theta_m\right) + \frac{\rho g^i}{J}\\ &= \gamma R_d\left(\overline{\pi}+\pi'\right)\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}\left\{\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\left(\overline{\rho\theta_m} + \left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\}\\ &\quad + \frac{\left(\overline{\rho}+\rho'\right)g^i}{J}\\ &= \gamma R_d\pi\frac{\partial}{\partial\hat{x}^n}\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x^i}\left(\rho\theta_m\right)' + \left(\frac{\rho'}{J} - \frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g^i\end{aligned} \tag{2.1.63}$$

以上のように基本場を導入することにより、運動量保存の式の気圧傾度力項と浮力項に表れるエクスナー関数、温位と全密度をそれぞれの偏差で表すことができる。また、基本場は時間変化しないようにとるため、全密度と温位の時間微分項をそれぞれの偏差で表すことができる。

基本場を導入した方程式系を以下に示す。ここでは、アインシュタインの規約を用いずに座標変換後の方程式を記述する。$(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ は (U,V,W) と書き換える。また、第 2.1.3 項で述べた鉛直座標を重力方向にとる制限によってゼロになる項は記述していない。次節以降で離散化するのは、この方程式系である。

連続の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho'\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{J}\rho U\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{J}\rho V\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{J}\rho W\right)\\ &= -\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha W_{t_\alpha}\right) + \frac{1}{J}F_\rho \equiv \frac{1}{J}F'_\rho\end{aligned} \tag{2.1.64}$$

運動量保存の式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{J}\rho uU\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{J}\rho uV\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{J}\rho uW\right)\\ &+ \gamma R_d\pi\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{J}\xi_x\left(\rho\theta_m\right)'\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{J}\eta_x\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{J}\zeta_x\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\}\\ &= -\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{J}\rho u q_\alpha W_{t_\alpha}\right)\\ &\qquad - \frac{1}{J}\rho v\Gamma - \frac{1}{J}\rho v f + \frac{1}{J}F_{\rho u} \equiv \frac{1}{J}F'_u\end{aligned} \tag{2.1.65}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho v U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho v V\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho v W\right) \\
&+\gamma R_d \pi\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\xi_y\left(\rho\theta_m\right)'\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\eta_y\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right. \\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\zeta_y\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\} \\
&=-\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho v q_\alpha W_{t_\alpha}\right) \\
&\quad+\frac{1}{J}\rho u\Gamma+\frac{1}{J}\rho u f+\frac{1}{J}F_{\rho v}\equiv\frac{1}{J}F_v'
\end{aligned}
\tag{2.1.66}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho w U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho w V\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho w W\right) \\
&+\gamma R_d \pi\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\xi_z\left(\rho\theta_m\right)'\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\eta_z\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right. \\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\zeta_z\left(\rho\theta_m\right)'\right)\right\}+\left(\frac{\rho'}{J}-\frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g^i \\
&=-\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho w q_\alpha W_{t_\alpha}\right)+\frac{1}{J}F_{\rho w}\equiv\frac{1}{J}F_w'
\end{aligned}
\tag{2.1.67}
$$

温位の式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\left(\rho\theta_m\right)'\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m V\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m W\right) \\
&=\frac{1}{J}F_{\rho\theta_m}
\end{aligned}
\tag{2.1.68}
$$

水物質の式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha U\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha V\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (W+W_{t_\alpha})\right) \\
&=\frac{1}{J}F_{\rho\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.1.69}
$$

2.1.5 一般座標の方程式系を用いた計算手順

ここでは、一般座標の方程式系を用いた asuca の計算手順の概略を示す。数値計算においては、座標 (x, y, z) で定義される格子空間は物理空間と呼ばれ、一般座標 (ξ, η, ζ) で定義される格子空間は計算空間と呼ばれる。メトリックは計算空間の単位セルと物理空間の単位セルの各辺の長さ比に相当し、ヤコビアンは計算空間の単位セルと物理空間の単位セルの体積比に相当する。

一般座標の方程式系を用いた asuca の計算手順は、

- 物理空間上に任意に格子点を配置する
- 長さ 1 の単位セル [15] の計算空間に対するメトリック、ヤコビアンを数値的に計算する
- 初期値、境界値を計算空間上の方程式系にあうよう、上で求めたメトリック、ヤコビアンを用いて変換する
- 計算空間上で予報する
- 診断および出力に必要な物理空間上の値は、逆変換で求める

という流れになる。

[15] 単位セルの長さ 1 とすることにより、長さに関する乗算・除算がプログラム上不要になり、高速になる。

付録 2.1.A　一般座標系の運動量保存の式 (2.1.39) 式の式変形

(2.1.39) 式から (2.1.48) 式への変形を簡単に示す。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m} \times \text{((2.1.39) 式の左辺第 2 項)} \\
&\quad = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right)\frac{\partial \hat{u}^m}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\hat{u}^m\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right) \\
&\quad = \underline{\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right)\frac{\partial \hat{u}^m}{\partial \hat{x}^j}} + \underline{\underline{\bar{u}^i\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\right)}} \\
&\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m} \times \text{((2.1.39) 式の左辺第 3 項)} \\
&\quad = \underline{\frac{1}{J}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \hat{x}^m}\hat{\Gamma}^m_{jk}\rho\hat{u}^j\hat{u}^k}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\text{下線部の和} = \underline{\frac{1}{J}\rho\hat{u}^j\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \hat{x}^j}} + \frac{1}{J}\rho\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^i_{jk} \quad ,
$$

$$
\text{さらに二重下線部の和} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^i\hat{u}^j\right)
$$

付録 2.1.B　マップファクターを用いて表したクリストッフェル記号

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^1_{11} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\Gamma}^1_{12} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\Gamma}^1_{13} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}}, \\
&\bar{\Gamma}^1_{21} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\Gamma}^1_{22} = \frac{m_1^2}{m_2^3}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\Gamma}^1_{23} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^1_{31} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{\Gamma}^1_{32} = 0, \quad \bar{\Gamma}^1_{33} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^2_{11} = \frac{m_2^2}{m_1^3}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\Gamma}^2_{12} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\Gamma}^2_{13} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^2_{21} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\Gamma}^2_{22} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{\Gamma}^2_{23} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{z}}, \\
&\bar{\Gamma}^2_{31} = 0, \quad \bar{\Gamma}^2_{32} = -\frac{1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{\Gamma}^2_{33} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^3_{11} = -\frac{1}{m_1^3}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{\Gamma}^3_{12} = 0, \quad \bar{\Gamma}^3_{13} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^3_{21} = 0, \quad \bar{\Gamma}^3_{22} = -\frac{1}{m_2^3}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{\Gamma}^3_{23} = 0, \\
&\bar{\Gamma}^3_{31} = 0, \quad \bar{\Gamma}^3_{32} = 0, \quad \bar{\Gamma}^3_{33} = 0
\end{aligned}
\tag{2.1.70}
$$

付録 2.1.C　移流項と曲率項の変形

付録 2.1.B で求めた $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ を用いて (2.1.48) 式の移流項と曲率項を変形していく。まず、$\bar{u}^i$ については、

$$
\bar{u}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}u^n = m_i u^i \quad (i \text{ について和を取らない}) \tag{2.1.71}
$$

である。微分については、

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial}{\partial \hat{x}^n} \tag{2.1.72}
$$

とする。移流項は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^i\hat{u}^j\right) &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho m_i u^i\hat{u}^j\right) \\
&= m_i\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u^i\hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho u^i\hat{u}^j\frac{\partial m_i}{\partial \hat{x}^j}
\end{aligned}
\tag{2.1.73}
$$

である。また、$i = 1$ の場合は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^1_{jk} = \\
&\quad - \bar{u}\bar{u}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{x}} - \bar{u}\bar{v}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}} - \bar{u}\bar{w}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}} \\
&\quad - \bar{v}\bar{u}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}} + \bar{v}\bar{v}\frac{m_1^2}{m_2^3}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}} - \bar{w}\bar{u}\frac{1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}} \\
&= -u\hat{u}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}} - u\hat{v}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} - u\hat{w}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{z}} \\
&\quad - vum_2\frac{\partial m_1}{\partial \bar{y}} + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \bar{x}} - wu\frac{\partial m_1}{\partial \bar{z}} \\
&= -u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} - vum_2\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{y}}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^n} \\
&\quad + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{x}}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}^n} - wu\frac{\partial \hat{x}^n}{\partial \bar{z}}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^n}
\end{aligned}
\tag{2.1.74}
$$

さらに、shallow assumption を導入してマップファクターの鉛直微分項をゼロとすると、

$$
\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^1_{jk} = -u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} - vum_2\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} \tag{2.1.75}
$$

同様にして $i = 2$ の場合は、

$$
\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^2_{jk} = -v\hat{u}^j\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}^j} - uvm_1\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}} + uu\frac{m_2^2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} \tag{2.1.76}
$$

さらに $i = 3$ の場合は、

$$
\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^3_{jk} = 0 \tag{2.1.77}
$$

となるので、以上を用いて移流項と曲率項の和を変形すると次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&(i = 1) \\
&\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^1\hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^1_{jk} \\
&= m_1\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\right) + \frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} \\
&\quad + \frac{1}{J}\rho\left(-u\hat{u}^j\frac{\partial m_1}{\partial \hat{x}^j} - vum_2\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + vv\frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right) \\
&= m_1\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\right) \\
&\quad + m_1\frac{1}{J}\rho v\left(-u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \hat{y}} + v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \hat{x}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.78}
$$

$(i=2)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^2\hat{u}^j\right)+\frac{1}{J}\rho\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^2_{jk}\\
&=m_2\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho v\hat{u}^j\right)+\rho\frac{1}{J}v\hat{u}^j\frac{\partial m_2}{\partial\hat{x}^j}\\
&\quad+\frac{1}{J}\rho\left(-v\hat{u}^j\frac{\partial m_2}{\partial\hat{x}^j}-uvm_1\frac{\partial m_2}{\partial\hat{x}}+uu\frac{m_2^2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial\hat{y}}\right)\\
&=m_2\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\right)\\
&\quad+m_2\frac{1}{J}\rho u\left(+u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial\hat{y}}-v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial\hat{x}}\right)
\end{aligned}\tag{2.1.79}$$

$(i=3)$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho\bar{u}^3\hat{u}^j\right)+\frac{1}{J}\rho\bar{u}^j\bar{u}^k\bar{\Gamma}^3_{jk}=\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho w\hat{u}^j\right)\tag{2.1.80}$$

以上を用いて運動量保存の式を表すと次のようになる。ただし、shallow assumption を適用した場合は角運動量を保存させるために Ω_1,Ω_2 の項を省略する必要があるため、以下の式ではこれらの項を省略している。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho u\hat{u}^j\right)\\
&\quad+\frac{1}{J}\rho v\left(-u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial\hat{y}}+v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial\hat{x}}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}^n}-\frac{1}{J}2\rho\Omega_3 v=\frac{1}{J}F^1
\end{aligned}\tag{2.1.81}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho v\hat{u}^j\right)\\
&\quad+\frac{1}{J}\rho u\left(+u\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial\hat{y}}-v\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial\hat{x}}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}^n}+\frac{1}{J}2\rho\Omega_3 u=\frac{1}{J}F^2
\end{aligned}\tag{2.1.82}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right)+\frac{\partial}{\partial\hat{x}^j}\left(\frac{1}{J}\rho w\hat{u}^j\right)\\
&\quad+\frac{1}{J}\frac{\partial\hat{x}^n}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial\hat{x}^n}+\frac{1}{J}\rho g=\frac{1}{J}F^3
\end{aligned}\tag{2.1.83}$$

参考文献

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Klemp, J. B. and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.

Ooyama, K., 2001: A Dynamic and Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere with Parameterized Microphysics. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2073–2102.

斉藤和雄, 2003: 支配方程式. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 16–25.

Skamarock, W. C., J. B. Klemp, J. Dudhia, D. O. Gill, D. M. Barker, M. G. Duda, X. Y. Huang, W. Wang, and J. G. Powers, 2008: *A Description of the Advanced Research WRF Version 3.* NCAR TECHNICAL NOTE, 113pp.

2.2 空間離散化 [1]

2.2.1 格子配置

asuca の格子系は、水平方向には Arakawa-C 格子 (Arakawa and Lamb 1977)、鉛直方向には Lorenz 格子 (Lorenz 1960; Arakawa and Konor 1996) を採用している。すなわち、ρ, $\rho\theta_m$ などのスカラー量はセルの中心に定義し、u, v, w はセル中心からそれぞれ x 方向、y 方向、z 方向に半格子だけずらして配置する。以後、セル中心を p ポイントと呼ぶこととし、格子の x, y, z 方向の番号を i, j, k とした場合にそこから半格子ずらした位置を表すため、例えば i と $i+1$ 間の格子境界を $i+\frac{1}{2}$ と表すこととする。また、$\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)$ のように x 方向、y 方向に半格子ずれた点を q ポイントと呼ぶこととする。この格子配置の模式図を図 2.2.1、図 2.2.2、図 2.2.3 に示す。

このように格子系をとることで、移流計算における空間差分誤差を減らすことができるだけでなく、u, v, w が格子境界に配置されることにより、後に述べる有限体積法におけるフラックス計算が容易となる [2]。

2.2.2 鉛直層配置

asuca では一般座標系を採用しているが、物理空間における鉛直方向の層配置は Ishida (2007)、石田 (2008) による鉛直ハイブリッド座標系となるように設定している。鉛直ハイブリッド座標系は、下層では地形に沿い、高度が上がるにしたがって地形の影響が小さくなり、ある高度より上空では水平になるという座標系である。この座標系の利点として、下部境界において風の鉛直速度が 0 となるため扱いが容易である、第 2.1.2 項で課せられた重力加速度と鉛直座標が平行であるという条件を満たす、鉛直方向の差分誤差を減らすことができる、といった点が挙げられる。鉛直ハイブリッド座標に関する詳しい説明は、石田 (2008) を参照いただきたい。

2.2.3 有限体積法

asuca では、保存性を保ちなおかつ可変格子への対応が容易なように、有限体積法を採用している。離散化するにあたり、セル中心に定義したスカラー量は、そのセル内の平均値であるとする。有限体積法ではセル内のスカラー量の総量の時間変化を、側面からのフラックスの流出入によって求める。例えば、(i, j, k) を中心とするセル考えた場合、x 方向に半格子ずれた $i+\frac{1}{2}$ 格子境界における流出は、そのまま隣の $(i+1, j, k)$ を中心とするセルにおける流入とする。このようにすることで、保存性を損なうことなく計算を行うことができる。以下では、有限体積法による方程式系の定式化を行う。

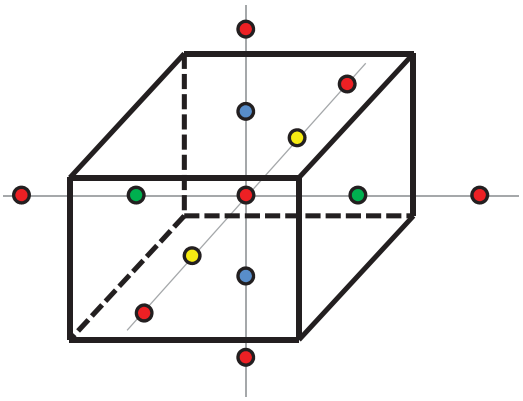

図 2.2.1　3 次元で見た格子配置の模式図。スカラー量はセルの中心となる赤点に定義する。緑色、黄色、水色の点がそれぞれ u, v, w を定義するポイントとなる。

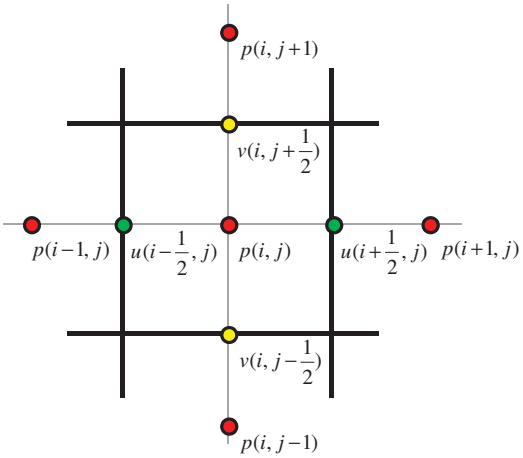

図 2.2.2　図 2.2.1 を x-y 方向の 2 次元で見た場合の模式図。

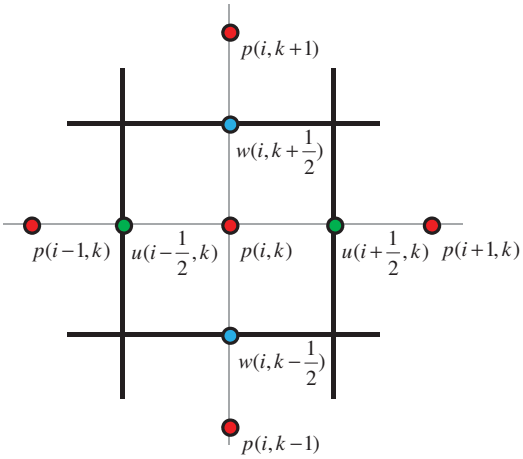

図 2.2.3　図 2.2.1 を x-z 方向の 2 次元で見た場合の模式図。

[1] 松林 健吾、河野 耕平、石田 純一、室井 ちあし
[2] ただし、風自体の移流計算においては、u, v, w を格子中心へ内挿する必要がある。

あるセル内の物理量 Q の時間変化を、境界から流出入するフラックスで考えると、積分型ではある閉曲面 S によって囲まれた体積要素 Ω の物理量 Q の時間変化が、境界を通じた Q の流出入でもたらされるとすると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int QdV = -\int \vec{F}\cdot\vec{n}dS \tag{2.2.1}$$

が導かれる。ここで $\vec{F}$ はフラックスであり、$\vec{n}$ はこのセルの表面に垂直な単位ベクトル、$\int dV$ はセルの体積積分、$\int dS$ はセルを囲む閉曲面の表面積分である。

ここで、(2.2.1) 式を離散化すると、次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}Q\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta = -\left(F_1\Delta\eta\Delta\zeta\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(F_2\Delta\xi\Delta\zeta\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(F_3\Delta\xi\Delta\eta\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \tag{2.2.2}$$

ここで、$\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ はセルの ξ, η, ζ 方向の長さを、$()_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$ は、$i-\frac{1}{2}$ 境界と $i+\frac{1}{2}$ 境界に直交するフラックス流出入の和を表す。第 2.1.2 項で述べたように、asuca では一般座標変換により、計算空間上では各格子は辺の長さ 1 の六面体として扱うことができる。このため、

$$\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1 \tag{2.2.3}$$

となり、有限体積法で記述した積分型の方程式は簡単に

$$\frac{\partial}{\partial t}Q = -\left(F_1\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(F_2\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(F_3\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \tag{2.2.4}$$

となる。

以上より、(2.1.64) 式から (2.1.69) 式はそれぞれ以下のように離散化することができる。

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho'\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_\rho \tag{2.2.5}$$

運動量保存の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho uU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho uV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho uW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma R_d\pi\left\{\left(\frac{1}{J}\xi_x(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_x(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_x(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F'_u \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho vU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho vV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho vW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma R_d\pi\left\{\left(\frac{1}{J}\xi_y(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_y(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_y(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F'_v \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho wU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho wV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho wW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma R_d\pi\left\{\left(\frac{1}{J}\xi_z(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\eta_z(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} - \left(\frac{\rho'}{J} - \frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g + \frac{1}{J}F'_w \tag{2.2.8}$$

温位の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho\theta_m U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho\theta_m V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho\theta_m W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\theta_m} \tag{2.2.9}$$

水物質の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (W+W_{t_\alpha})\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\alpha} \tag{2.2.10}$$

参考文献

Arakawa, A. and C. S. Konor, 1996: Vertical Differencing of the Primitive Equations Based on the Charney - Phillips Grid in Hybrid σ-p Vertical Coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 511–528.

Arakawa, A. and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, Academic Press, Vol. 17, 173–265.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Ishida, J., 2007: Development of a hybrid terrain-following vertical coordinate for JMA Non-hydrostatic Model. *CAS/JSC WGNE Res. Activ. Atmos. Oceanic Modell.*, **37**, 309–310.

Lorenz, E. N., 1960: Energy and Numerical Weather Prediction. *Tellus*, **12**, 364–373.

2.3 時間離散化 [1]

2.3.1 はじめに

この節では、これまでに定式化した方程式系を時間積分する手法について説明する。まず、第 2.3.2 項で asuca で採用している時間積分スキームとその性質について述べる。次に、完全圧縮方程式系では解に音波が含まれるため、これを効率的かつ安定に解くために用いている split-explicit 法について第 2.3.3 項で述べる。第 2.3.4 項では水物質の落下計算の手法について、第 2.3.5 項では時間積分における時間変化率の扱いについて説明する。

2.3.2 時間積分スキーム

ある予報変数 f の時間変化率を $F(f)$ とした場合、方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f) \tag{2.3.1}$$

で表される。この式の左辺の時間微分をどのように離散化するかによって、精度や計算安定性、計算速度、計算に必要なメモリの量が変わる。例えば、簡単な例として前進差分スキームの場合は、

$$\frac{f^{t+\Delta t} - f^t}{\Delta t} = F(f^t) \tag{2.3.2}$$

のように離散化を行う。ここで f^t, $f^{t+\Delta t}$ は、それぞれ時刻 t と $t+\Delta t$ における f を表す。ただし、このスキームは対象となる方程式が移流方程式などの振動系の場合は、安定に解けないという問題がある。

高精度で高速、安定かつ必要なメモリ量が少なくて済む、といった全ての要求を満たす時間積分スキームは存在しないため、目的に応じた時間積分スキームを選択する必要がある。

JMA-NHM では時間積分スキームに次式で表されるリープフロッグ法を採用している。

$$\frac{f^{t+\Delta t} - f^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F(f^t) \tag{2.3.3}$$

リープフロッグ法は 2 次精度であり、1 回の時間積分に必要となる計算量が少ないという利点はあるが、計算モードという偽の数値解が現れる。このため、計算モードを抑えるために Asselin のタイムフィルター (Asselin 1972) を導入しており、これにより時間積分スキームの精度は 1 次となっている。なお、リープフロッグ法については、Durran (2010) が詳しい。

asuca では、時間積分スキームとして Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法 (以下、RK3) を採用している。ルンゲクッタ法では、Δt より短い積分時間間隔で仮積分を行い、その仮積分値を用いて時間積分を行う。一般に 3 段階ルンゲクッタ法では、仮積分値を f^*, f^{**} とすると、以下の 3 ステップにより計算を行う。

$$f^* = f^t + F(f^t, t)c_2\Delta t \tag{2.3.4}$$

$$\begin{aligned} f^{**} = f^t + \Delta t[&a_1 F(f^t, t) \\ &+ a_2 F(f^*, t + c_2\Delta t)] \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

$$\begin{aligned} f^{t+\Delta t} = f^t + \Delta t[&b_1 F(f^t, t) \\ &+ b_2 F(f^*, t + c_2\Delta t) \\ &+ b_3 F(f^{**}, t + c_3\Delta t)] \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

であり、a, b, c はそれぞれ定数で、a, b, c のとり方により精度が変わる。例えば、

$$f^* = f^t + \frac{\Delta t}{3} F(f^t, t) \tag{2.3.7}$$

$$f^{**} = f^t + \frac{2\Delta t}{3} F\left(f^*, t + \frac{\Delta t}{3}\right) \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned} f^{t+\Delta t} = f^t + \frac{\Delta t}{4}\Bigg[&F(f^t, t) \\ &+ 3F\left(f^{**}, t + \frac{2\Delta t}{3}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

とする方法は、3 次精度のホイン法として知られている。

このような、3 段階 3 次精度のルンゲクッタ法は計算安定性が高いことが知られているが、t から $t+\Delta t$ への時間積分を行うために 3 段階の時間積分を行う必要があり、計算コストがかかる。また、3 段階の各ステップに置ける状態をメモリ上に残しておく必要があるため、メモリの使用量が多い。この他に、複数のステップの状態を元に計算を行うため、プログラムの構造が複雑になるといった欠点がある。

一方、asuca で採用した RK3 では以下の 3 ステップにより時間積分を行う。

$$f^* = f^t + \frac{\Delta t}{3} F(f^t, t) \tag{2.3.10}$$

$$f^{**} = f^t + \frac{\Delta t}{2} F\left(f^*, t + \frac{\Delta t}{3}\right) \tag{2.3.11}$$

$$f^{t+\Delta t} = f^t + \Delta t F\left(f^{**}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{2.3.12}$$

この方法も、1 回の時間積分を実行するのに 3 段階の計算を行う必要があるものの、前述の 3 段階 3 次精度

[1] 松林 健吾、河野 耕平、石田 純一、室井 ちあし

のルンゲクッタ法と比べて、計算に必要となるメモリが 2 ステップ分のみであるため、メモリの使用量が少なくてすみ、プログラムも簡便であるという利点がある。精度は通常は 2 次精度、F が f に対して線形となる問題では 3 次精度となり、JMA-NHM で採用しているリープフロッグ法と Asselin のタイムフィルターの組み合わせより時間差分精度が高い。なお、RK3 の精度に関する説明は、付録 2.3.A に記す。

また、RK3 は計算安定性も高い。格子間隔を Δx、積分時間間隔を Δt、風速を U としたとき、

$$\nu = U\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.3.13}$$

で表される ν はクーラン数と呼ばれる量で、RK3 ではリープフロッグ法に比べてより大きなクーラン数でも安定に計算を行うことができる。すなわち、Wicker and Skamarock (2002) に示されているように、RK3 はリープフロッグ法に比べて安定性が高く、積分時間間隔を大きく取れる。なお、RK3 の安定性に関する詳しい説明は付録 2.3.B に記す。

このことから、RK3 はリープフロッグ法より 1 ステップあたりの計算量は多いが、RK3 の方がリープフロッグ法より積分時間間隔を長くとることができるため、効率的に計算を行える。

最後に、asuca で採用している RK3 と JMA-NHM で採用している Asselin フィルターを用いたリープフロッグ法 (以下、Asselin-LF)、また参考のために 3 次ホイン法の利点・欠点を表 2.3.1 にまとめる。この表から分かるように、RK3 を採用することで Asselin-LF より計算量こそ増えるものの、プログラム構造を複雑化させることなく精度・計算安定性を向上させ、使用メモリを削減することができる。

以上の結果を踏まえ、asuca では RK3 を時間積分スキームとして採用している。

2.3.3 split-explicit 法

asuca では完全圧縮方程式系を採用しており、解には音波が含まれる。音波は非常に高速であるため、音波を安定に解くために積分時間間隔を決めると、積分時間間隔を非常に短くする必要がある。特に、鉛直層間隔は水平格子間隔に比べて小さく、下層ほど層間隔が小さくなるため、条件は更に厳しくなる。天気予報において重要な移流や、ロスビー波といった現象は音波に比べると低速であるため、気象学的に重要でない音波に合わせて積分時間間隔を決めると、計算効率が極めて悪い。また、音波ほど高速ではないものの、重力波もその他の現象に比べて高速であり、安定に解くための工夫が必要になる。このため、asuca では効率的に計算を行うために、音波や重力波に関する項は短い積分時間間隔に分割して積分を行い、その他の項については積分時間間隔を分割せずに積分を行う split-explicit 法 (Klemp and Wilhelmson 1978; Klemp et al. 2007) を採用している。split-explicit 法では、積分時間間隔 Δt に対し、音波を安定に解ける積分時間間隔を $\Delta\tau = \Delta t/n$ とした場合 [2] 、音波と重力波に関連する項は積分時間間隔 $\Delta\tau$ の時間積分を n 回繰り返して行い、その他の項については Δt の時間積分を 1 回行う。

ただし、鉛直方向については水平方向より格子間隔が非常に小さく、鉛直方向の層間隔に合わせて短い積分時間間隔を定めると、結果として積分回数が非常に多くなり、効率が極めて悪い [3] 。このため、鉛直方向の音波と重力波の関連項についてはインプリシットに計算を行うこととしている。インプリシットスキームとは、前項の (2.3.2) 式において、時間変化率の計算に時刻 $t+\Delta t$ における f を用いる方法である。すなわち、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(f^{t+\Delta t}) \tag{2.3.14}$$

とするスキームである。これに対し、(2.3.2) 式のように時刻 t における f を用いて時間変化率を見積るスキームをイクスプリシットスキームという。イクスプリシットスキームの場合、前項で述べたように計算安定性が積分時間間隔の影響を受けるのに対し、インプリシットスキームは長い積分時間間隔でも安定に解くことができる。ただし、積分時間間隔が大きくなるほど精度の劣化が大きく、また連立方程式を解く必要があるためイクスプリシットスキームより計算量が多い。また、水平方向にインプリシットスキームを用いると大規模な連立方程式を解く必要があり、並列計算機においては他ノードとの通信が必要となり、非常に計算コストがかかる。これらを踏まえ、asuca では split-explicit 法により、短い時間間隔への分割回数が少なくて済む [4] 水平方向はイクスプリシットに計算し、鉛直方向はインプリシットに計算するようにしている。インプリシットスキーム、イクスプリシットスキームに関する詳しい説明は Durran (2010) や荒波ほか (2012) を参照頂きたい。

JMA-NHM でも同様に split-explicit 法を採用しているが、asuca では密度を予報変数にしているのに対し、JMA-NHM では気圧を予報変数としている。このため、以降に述べる定式化は JMA-NHM におけるものとは異なる。

(1) 離散化

運動量保存の式、温位の式及び連続の式において、気圧傾度力項、発散項、温位移流項が音波を安定に解

[2] 音波のほうが重力波より高速であるため、短い積分時間間隔は音速を元に決める。

[3] 例えば、LFM と同じ仕様で asuca を実行する場合、水平格子間隔は 2 km であるのに対し、鉛直方向の格子間隔は最下層では 40 m となる。

[4] asuca では音速を大まかに 400 m/s とし、これを安定に解けるように短い積分時間間隔を定めている。現時点では asuca を水平格子間隔 2 km で実行する場合、積分時間間隔は $\Delta t = 50/3$ 秒で実行している。この場合は、Δt は最大 4 回に分割することとなる。

表 2.3.1 Asselin-LF、RK3 と 3 次ホイン法の性能比較表

	Asselin-LF	RK3	3 次のホイン法
精度	1 次精度	2 次精度 ($F(f)$ が線形の場合は 3 次精度)	3 次精度
計算安定性	RK3 と 3 次ホイン法は同じであり、Asselin-LF より安定。		
1 ステップあたりの計算量の比	1	3	3
必要メモリ量の比	3	2	3
プログラムの構造	分かりやすい	分かりやすい	複雑

くために短い積分時間間隔で扱うべき項であり、これに浮力項を追加することで重力波も安定に解くことができる (Klemp et al. 2007)。そこで、その他の項 (摩擦項や運動量の移流項など) をそれぞれ R_u, R_v, R_w と書き、短い積分時間間隔で評価する項とその他を整理すると、(2.2.5) 式から (2.2.9) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho u\right) = -\gamma R_d \pi \Bigg\{ &\left(\frac{1}{J}\xi_x(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{J}\eta_x(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{J}\zeta_x(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Bigg\} \\ &+R_u\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho v\right) = -\gamma R_d \pi \Bigg\{ &\left(\frac{1}{J}\xi_y(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{J}\eta_y(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{J}\zeta_y(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Bigg\} \\ &+R_v\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho w\right) = -\gamma R_d \pi \Bigg\{ &\left(\frac{1}{J}\xi_z(\rho\theta_m)'\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{J}\eta_z(\rho\theta_m)'\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &+\left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Bigg\} \\ &-\left(\frac{\rho'}{J}-\frac{\pi'}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}\right)g + R_w\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right) = &-\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\ &+\frac{1}{J}F_{\rho\theta_m}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho'\right) = &-\left(\frac{1}{J}\rho U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}\rho V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}\rho W\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \\ &+\frac{1}{J}F'_{\rho}\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

ただし、

$$\begin{aligned}R_u = &-\left(\frac{1}{J}\rho uU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho uV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}\rho uW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_u\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

$$\begin{aligned}R_v = &-\left(\frac{1}{J}\rho vU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho vV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}\rho vW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_v\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

$$\begin{aligned}R_w = &-\left(\frac{1}{J}\rho wU\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho wV\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\ &-\left(\frac{1}{J}\rho wW\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F'_w\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

である。

まず、(2.3.15) 式と (2.3.16) 式から u, v の未来値を次のようにしてイクスプリシットに求める。以下では、分割した短い積分時間間隔を $\Delta\tau$ とし、分割した時間積分における未来時刻及び現在時刻における値を上付き添字の $\tau+\Delta\tau$ と τ で表す。短い積分時間間隔で評価を行わない項に関しては、短い時間積分を繰り返す間は不変であるため、現在時刻における値を上付き添字 t で表す。

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{J}\rho u\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho u\right)^{\tau} \\
&- \gamma R_d \pi^t \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_x(\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{J}\eta_x(\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{J}\zeta_x(\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
&+ R_u^t \Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{J}\rho v\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho v\right)^{\tau} \\
&- \gamma R_d \pi^t \left\{ \left(\frac{1}{J}\xi_y(\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{J}\eta_y(\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{J}\zeta_y(\rho\theta_m)'^{\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
&+ R_v^t \Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

ここで、π はエクスナー関数である。計算コスト削減のために [5] 時刻 t の値をそのまま用いることとしている。

(2.3.23) 式と (2.3.24) 式の右辺の変数は全て既知の値であるため、この式から $\tau+\Delta\tau$ における u, v が求まる。

次に、インプリシットに計算するために (2.3.17) 式、(2.3.18) 式、(2.3.19) 式 の ρ', ρu, ρv, ρw, $(\rho\theta_m)'$ を未来値を用いて表す。

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau} \\
&- \left\{ \gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho'^{\tau+\Delta\tau} g}{J} - \frac{\pi'^t}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J} g \right\} \Delta\tau \\
&- \left\{ \gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\xi_z(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\eta_z(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
&+ R_w^t \Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau} \\
&- \left\{ \left(\frac{1}{J}\zeta_z \theta_m^{\tau}(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
&- \left\{ \left(\frac{1}{J}\theta_m^{\tau}\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\theta_m^{\tau}\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{J}\theta_m^{\tau}\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau + \frac{1}{J}F_{\rho\theta_m}^t \Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau} \\
&- \left\{ \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
&- \left\{ \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right\} \Delta\tau \\
&+ \frac{1}{J}F_{\rho}^t \Delta\tau
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

ただし $\widetilde{(\rho U)}, \widetilde{(\rho V)}, \widetilde{(\rho W)}$ は

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\rho U)} &= \xi_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \xi_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau} + \xi_z(\rho w)^{\tau+\Delta\tau} \\
\widetilde{(\rho V)} &= \eta_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \eta_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau} + \eta_z(\rho w)^{\tau+\Delta\tau} \\
\widetilde{(\rho W)} &= \zeta_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \zeta_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau}
\end{aligned}$$

である。

ここで、第 2.1.2 項で述べたように、z 軸と ζ 軸を平行となるように座標系をとることにより、$\xi_z = \eta_z = 0$ となる。

[5] エクスナー関数の計算にはべき乗が必要であり、計算コストがかかる。

これにより、$\widetilde{(\rho U)}, \widetilde{(\rho V)}, \widetilde{(\rho W)}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\widetilde{(\rho U)} =& \xi_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \xi_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau} \\ \widetilde{(\rho V)} =& \eta_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \eta_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau} \\ \widetilde{(\rho W)} =& \zeta_x(\rho u)^{\tau+\Delta\tau} + \zeta_y(\rho v)^{\tau+\Delta\tau}\end{aligned}$$

また、(2.3.25) 式の右辺第 3 項が消える。つまり、(2.3.25) 式、(2.3.26) 式、(2.3.27) 式がインプリシットに扱えるようになる。

鉛直方向の運動量保存の式、温位の式及び連続の式において、時刻 t, τ で評価される項及び時刻 $\tau+\Delta\tau$ の u, v を使って評価される項、すなわち既知の項をまとめて $R'_w, R'_{\theta_m}, R'_\rho$ と書き直すと (2.3.25) 式から (2.3.27) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau} \\ &- \left\{\gamma R_d \pi^t \left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right. \\ &\left.+\frac{\rho'^{\tau+\Delta\tau} g}{J}\right\}\Delta\tau \\ &+ R'_w\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau} \\ &- \left\{\left(\frac{1}{J}\zeta_z\theta_m^\tau(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\ &+ R'_{\theta_m}\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau} \\ &- \left\{\left(\frac{1}{J}\zeta_z(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\ &+ R'_\rho\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

ただし、

$$R'_w = \frac{\pi'^t}{\overline{\pi}}\frac{\overline{\rho}}{J}g + R_w = -\left(1-\frac{\pi^t}{\overline{\pi}}\right)\frac{\overline{\rho}}{J}g + R_w \tag{2.3.31}$$

$$\begin{aligned}R'_{\theta_m} =& -\left\{\left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right. \\ &\left.+\left(\frac{1}{J}\theta_m^\tau\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F^t_{\rho\theta_m}\end{aligned} \tag{2.3.32}$$

$$\begin{aligned}R'_\rho =& -\left\{\left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho U)}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho V)}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right. \\ &\left.+\left(\frac{1}{J}\widetilde{(\rho W)}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{J}F^t_\rho\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

これらの式から、まず ρw を求めるために、(2.3.28) 式における $((\rho\theta_m)'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ と $(\rho'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ を消去することを考える。さらに表記を簡便にするために

$$\left(\frac{1}{J}\rho w\right)^{\tau+\Delta\tau} = \omega \tag{2.3.34}$$

とおき、w はセル中心から半格子ずれた位置に定義したことを考慮して、(2.3.28) 式を w ポイントを中心として書き直すと、

$$\begin{aligned}\omega_{k+\frac{1}{2}} =& \left(\frac{1}{J}\rho w\right)_{k+\frac{1}{2}}^{\tau} \\ &- \gamma R_d \pi^t_{k+\frac{1}{2}}\left\{\left(\zeta_z\frac{(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}}{J}\right)_{k+1}\right. \\ &\left.-\left(\zeta_z\frac{(\rho\theta_m)'^{\tau+\Delta\tau}}{J}\right)_k\right\}\Delta\tau \\ &-\left(\frac{\rho'^{\tau+\Delta\tau}}{J}\right)_{k+\frac{1}{2}}\Delta\tau g + R'_{w\,k+\frac{1}{2}}\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

となる。さらに、$(\rho\theta_m)', \rho'$ がセル中心で定義されることを考慮すると、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)_k^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)_k^{\tau} \\ &-\left\{(\zeta_z\theta_m^\tau\omega)_{k+\frac{1}{2}} - (\zeta_z\theta_m^\tau\omega)_{k-\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\ &+ (R'_{\theta_m})_k\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{J}\rho'\right)_k^{\tau+\Delta\tau} =& \left(\frac{1}{J}\rho'\right)_k^{\tau} \\ &-\left\{(\zeta_z\omega)_{k+\frac{1}{2}} - (\zeta_z\omega)_{k-\frac{1}{2}}\right\}\Delta\tau \\ &+ (R'_\rho)_k\Delta\tau\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

が得られる。

以上から $((\rho\theta_m)'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ と $(\rho'/J)^{\tau+\Delta\tau}$ を消去して、次の ω に対する代数方程式が導き出せる。

$$C_m\omega_{k-\frac{1}{2}} + C_0\omega_{k+\frac{1}{2}} + C_p\omega_{k+\frac{3}{2}} = R \tag{2.3.38}$$

ただし、

$$\begin{aligned}C_m =& \\ &\Delta\tau^2(\zeta_z)_{k-\frac{1}{2}}\left(-\gamma R_d\pi^t_{k+\frac{1}{2}}(\zeta_z)_k(\theta_m^\tau)_{k-\frac{1}{2}} + \frac{g}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

$$C_0 = 1 + \gamma R_d \Delta\tau^2 \left(\zeta_z \pi^t \theta_m^\tau\right)_{k+\frac{1}{2}} \{(\zeta_z)_{k+1} + (\zeta_z)_k\} \tag{2.3.40}$$

$$C_p = \Delta\tau^2 (\zeta_z)_{k+\frac{3}{2}} \left\{-\gamma R_d \pi^t_{k+\frac{1}{2}} \zeta_{z\,k+1} (\theta_m)^\tau_{k+\frac{3}{2}} - \frac{g}{2}\right\} \tag{2.3.41}$$

$$\begin{aligned} R = & \left(\frac{1}{J}\rho w\right)^\tau_{k+\frac{1}{2}} \\ & - \gamma R_d \pi^t_{k+\frac{1}{2}} \Delta\tau \left[(\zeta_z)_{k+1} \left\{\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^\tau \right.\right. \\ & \left.\left. + R'_{\theta_m} \Delta\tau \right\}_{k+1} \right. \\ & \left. - (\zeta_z)_k \left\{\left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^\tau + R'_{\theta_m}\Delta\tau\right\}_k \right] \\ & - \Delta\tau \frac{g}{2} \left\{\left(\frac{1}{J}\rho'^\tau + R'_\rho \Delta\tau\right)_{k+1} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{J}\rho'^\tau + R'_\rho\Delta\tau\right)_k \right\} \\ & + (R'_w)_{k+\frac{1}{2}} \Delta\tau \end{aligned} \tag{2.3.42}$$

である。

(2.3.38) 式は ω についての連立一次元方程式となっており、その係数行列は 3 重対角行列となる。これに適当な上部・下部境界条件を与えることで ω を求めることができる。次に、上部・下部境界条件について説明する。

(2) 上部・下部境界条件

上部・下部境界条件としてフラックスが 0 となるとして、$W = 0$ ととる [6] 。すなわち、

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0 \tag{2.3.43}$$

であるため、

$$u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_w = 0 \tag{2.3.44}$$

となる。これにより、上部・下部境界における ω は、

$$\omega = \frac{1}{J}\rho w = -\frac{1}{J}\frac{\rho u \zeta_x + \rho v \zeta_y}{\zeta_z} \tag{2.3.45}$$

と表される。

まず、上部境界では等 ζ 面が水平となるとする。このとき、$\zeta_x = \zeta_y = 0$ であるため、$\omega = 0$ となる。

[6] 上部境界の扱いについては、第 2.5.2 項でも述べる。

次に、下部境界条件について考える。asuca では鉛直方向には Lorenz 格子を採用しており、下部境界における u, v の位置と、u, v を定義した位置が異なることに注意が必要となる。

摩擦がある場合は、下部境界における風の全ての成分がゼロとなるため、上部境界と同様に $\omega = 0$ となる。

一方、摩擦無しの場合はさらに、

$$u_{k=\frac{1}{2}} = u_{k=1}, \quad v_{k=\frac{1}{2}} = v_{k=1} \tag{2.3.46}$$

という条件を追加して、

$$\begin{aligned} \omega_{k=\frac{1}{2}} &= \frac{1}{J}(\rho w)_{k=\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{J}\frac{(\rho u)_{k=1}\zeta_x + (\rho v)_{k=1}\zeta_y}{\zeta_z} \end{aligned} \tag{2.3.47}$$

としている。

これらの境界条件をもとに (2.3.38) 式を解くことで、$(\rho w)^{\tau+\Delta\tau}/J$ が求まる。

(3) $(\rho\theta_m)', \rho'$ の計算

以上で時刻 $\tau + \Delta\tau$ での $\rho u, \rho v, \rho w$ が求められたので、(2.3.18) 式、(2.3.19) 式から、$(\rho\theta_m)', \rho'$ を以下の通り求める。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^{\tau+\Delta\tau} &= \left(\frac{1}{J}(\rho\theta_m)'\right)^\tau \\ & - \Delta\tau \left\{\left(\frac{1}{J}\theta^\tau_m (\rho U)^{\tau+\Delta\tau}\right)^{i+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}} \right. \\ & + \left(\frac{1}{J}\theta^\tau_m (\rho V)^{\tau+\Delta\tau}\right)^{j+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} \\ & \left. + \left(\frac{1}{J}\theta^\tau_m (\rho W)^{\tau+\Delta\tau}\right)^{k+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2}} \right\} + \Delta\tau \frac{1}{J} F^t_{\rho\theta_m} \end{aligned} \tag{2.3.48}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^{\tau+\Delta\tau} &= \left(\frac{1}{J}\rho'\right)^\tau \\ & - \Delta\tau \left\{\left(\frac{1}{J}(\rho U)\right)^{i+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{J}(\rho V)\right)^{j+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{J}(\rho W)\right)^{k+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2}} \right\}^{\tau+\Delta\tau} + \Delta\tau \frac{1}{J} F^t_\rho \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

右辺の値は全て既知であるため、$(\rho\theta_m)'/J$, $(\rho)'/J$ が求まる。これにより、時刻 $\tau + \Delta\tau$ における $\rho u, \rho v, \rho w, (\rho\theta_m)', \rho'$ が求められた。

このように、分割した短い時間積分を繰り返して水平方向にはイクスプリシットに計算し、鉛直方向にはインプリシットに計算する split-explicit 法を用いることで、音波関連項を安定に、かつ効率的に計算することができる。

(4) $(\rho\theta_m)'$ の移流項の計算

R'_{θ_m} は物理空間における水平風の移流に伴う変化率と、物理過程等による変化率の和とみなせる。また、実際の $(\rho\theta_m)'$ の時間積分においても移流の計算があり、R'_{θ_m} に関する (2.3.32) 式と、分割した時間積分における $(\rho\theta_m)'$ の (2.3.48) 式で同じ定式化となっていることが分かる。$(\rho\theta_m)'$ の時間積分における移流の計算では第 2.4.3 項で述べる流束制限関数等の単調性を保つためのスキームが必要であるが、R'_{θ_m} の計算においては、精度・安定性の面で影響は小さい。現時点では、高速化を目的として R'_{θ_m} における移流の計算では中央 2 次差分を用いている。

2.3.4 水物質の落下の扱い

(1) 水物質の式の鉛直移流項

この項では、(2.2.10) 式における鉛直移流項の扱いについて述べる。

水物質の大気速度からの相対的な落下速度 W_{t_α} は、水物質の比湿 q_α の関数として診断される。W_{t_α} は q_α が増えるに従って大きくなり、特にあられや雹においては最大で 10 m/s を超えることがある。鉛直方向の層間隔は下層ほど小さくなるため、音波と同様の理由により、水物質の鉛直移流項を安定に解くように積分時間間隔を決めると、非常に効率が悪い。

前項で説明したように、このような場合は短い積分時間間隔に分割してイクスプリシットに解く方法と、インプリシットに解く方法の 2 通りが考えられる [7]。

asuca では精度と計算コストを考慮し、短い積分時間間隔に分割してイクスプリシットに計算を行う time-split 法を採用している。

鉛直方向の移流項を分割した短い時間間隔 $\Delta\tau$ で積分を行い、その他の項 (水平移流項など) は分割せずに Δt で計算を行う。Δt で計算を行う項を $R_{q\alpha}$ とおくと、(2.2.10) 式は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right) = -\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha (W + W_{t_\alpha})\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} + R_{q\alpha} \tag{2.3.50}$$

ただし、

$$R_{q\alpha} = -\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha U\right)_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha V\right)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{J}F_{\rho\alpha} \tag{2.3.51}$$

上記の式から ρq_α の未来値を求める。短い時間積分における未来時刻及び現在時刻の値をそれぞれ上付き添字の $\tau+\Delta\tau$ と τ で表し、$R_{q\alpha}$ に関しては、短い時間積分を繰り返す間は不変であるとして、現在値を上付き添字 t で表す。

$$\left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right)^{\tau+\Delta\tau} = \left(\frac{1}{J}\rho q_\alpha\right)^{\tau} - \Delta\tau\left\{\left(\frac{1}{J}\rho^t q_\alpha^\tau (W^t + W_{t_\alpha}^\tau)\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\right\} + R_{q_\alpha}^t \Delta\tau \tag{2.3.52}$$

短い時間間隔 $\Delta\tau$ は、各カラム毎に鉛直移流のクーラン数 ($\nu = (W^t + W_{t_\alpha}^\tau)\Delta t/\Delta z$) から以下のように決める。

$$\Delta\tau = \begin{cases} \Delta t & (\max(\nu) \le 1) \\ c\dfrac{\Delta t}{\max(\nu)} & (\max(\nu) > 1) \end{cases} \tag{2.3.53}$$

ここで、c はクーラン数に対してどの程度の割合で短い積分時間間隔をとるかを決める定数であり、asuca の場合は、$c = 0.9$ として計算を行なっている。

短い積分時間間隔 $\Delta\tau$ で 1 回時間積分すると、残りの積分すべき時間は $\Delta t' = \Delta t - \Delta\tau$ となる。$\Delta t'$ についても短い積分時間間隔を診断し、その上で時間積分する。残りの時間がゼロになるまでこれを繰り返す。

ここで、落下速度 W_{t_α} は短い時間積分毎に更新している。これは、W_{t_α} を更新しないと、短い時間積分を繰り返すうちに ρq_α と W_{t_α} が次第に乖離してしまい、精度が低下する可能性があるためである。

(2) 連続の式、運動量保存の式における降水粒子の落下による項

水物質の落下と整合するように、連続の式 (2.2.5) 式に表れる降水粒子の落下による質量変化の項 (以下、PRC 項とする) を評価する。たとえば長い積分時間間隔 Δt を水物質の落下を扱う上で $\Delta\tau_1$ と $\Delta\tau_2$ に分割した場合、PRC 項は以下のように求める。

$$\begin{aligned} \mathrm{FLUX} &\equiv \frac{\frac{1}{J}\rho^t q_\alpha^t W_{t_\alpha}^t \Delta\tau_1 + \frac{1}{J}\rho^t q_\alpha^{t+\Delta\tau_1} W_{t_\alpha}^{t+\Delta\tau_1}\Delta\tau_2}{\Delta t} \\ \mathrm{PRC} &= (\mathrm{FLUX})_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.3.54}$$

FLUX は水物質の落下により各セル境界を通過するフラックスを表す。PRC 項は長い積分時間間隔 Δt の時間変化率として連続の式の時間積分に反映される。運動量保存の式 (2.2.6)、(2.2.7)、(2.2.8) に表れる降水粒子の落下による変化の項は、(2.3.54) 式から求める。

水物質の式における鉛直移流項の評価については、単調性を保つために第 2.4.3 項で述べる流束制限関数を用いるが、連続の式、運動量保存の式における PRC 項の影響は小さい。このため、実際の計算では高速化

[7] この他にもセミラグランジュ法などを用いる方法があるが、それについては第 2.6.3 項で紹介する。

```
timestep_long: do                        ! 時間積分のループ開始
  call diagnose_run_long                 ! 診断変数の計算
  call physics_run_long                  ! 物理過程の Fl の計算（現状；放射・境界層・地表面過程）
  call dynamics_run_long                 ! 力学過程の Fl の計算（現状：無し）
                                         !
  RK_long: do rk_count = 1, 3            ! ルンゲクッタ法 (long) のループ開始
    call diagnose_run_rk_long            ! 診断変数の計算
    call physics_run_rk_long             ! 物理過程の Frk の計算（現状：現業想定仕様では無）
    call dynamics_run_rk_long            ! 力学過程の Frk の計算（現状：移流、コリオリ力、曲率、レイリーダンピング）
    call sediment_run                    ! 力学過程の Frk の計算（現状：降水粒子の鉛直移流）
                                         !
    short: do count_s = 1, nsound        ! ショートタイムステップのループ開始
      call diagnose_run_short            ! 診断変数の計算
      call physics_run_short             ! 物理過程の Fs_l の計算（現状：無し）
      call dynamics_run_short            ! 力学過程の Fs_l の計算（現状：無し）
                                         !
      RK_short: do rk_count_s = 1, 3     ! ショートタイムステップの中のルンゲクッタ法のループ開始
        call diagnose_run_rk_short       ! 診断変数の計算
        call physics_run_rk_short        ! 物理過程の Fs_rk の計算（現状：無し）
        call dynamics_run_rk_short       ! 力学過程の Fs_rk の計算（現状：split-explicit 法による時間積分）
      end do RK_short                    ! ショートタイムステップの中のルンゲクッタ法のループ終了
    end do short                         ! ショートタイムステップのループ終了
    call tmanage_post_short              ! ショートタイムステップ後の時間積分（現状：水物質）
                                         !
  end do RK_long                         ! ルンゲクッタ法 (long) のループ終了
  call tmanage_post_long                 ! ロングタイムステップ後の時間積分（現状：地表面温度、蒸発散効率）
                                         !
  call diagnose_adjust_long              ! 診断変数の計算
  call dynamics_adjust_long              ! 力学過程の Fa の計算（現状：無し）
  call physics_adjust_long               ! 物理過程の Fa の計算（現状：雲物理過程）
  call tmanage_post_adjust               ! 時間積分（現状：水物質、温位、密度）
                                         !
end do timestep_long                     ! 時間積分のループ終了
```

図 2.3.1 時間積分の順序を表す模式図。図中 `Fl`, `Frk`, `Fa` はそれぞれ (2.3.55) 式–(2.3.58) 式の $F_{\rm l}, F_{\rm rk}, F_{\rm a}$ を表す。また、`Fs_l`, `Fs_rk` はショートタイムステップで時間積分を行う場合の $F_{\rm l}, F_{\rm rk}$ を表す。

を目的として PRC 項の計算には中央 2 次差分を用いている。

2.3.5 asuca における時間変化率の扱い

この項では、asuca による時間積分において時間変化率をどのように扱うかについて説明する。なお、物理過程の時間変化率の扱いに関しては、第 4.1.1 項で詳しく述べる。

asuca の中で計算される時間変化率には、移流や音波、水物質の落下のように RK3 時間積分によって評価するものや、物理過程のように RK3 ループの外で扱うものがある。また、それらの時間変化率は、各過程の時間変化率を独立に求めるパラレルスプリッティングとして扱うものと、その他の過程による時間変化率を足しあわせた後の状態から時間変化率を求めるシーケンシャルスプリッティングとして扱うものに分けられる [8] 。雲物理過程等の反応の早い項については、シーケンシャルスプリッティングとして別途解いた方が、時間変化率のバランスを取りやすい。

これら時間変化率の扱いを整理するため、パラレルスプリッティングとして扱う時間変化率のうち RK3 ループの外で扱うものを $F_{\rm l}$、RK3 ループ中で計算するものを $F_{\rm rk}$、シーケンシャルスプリッティングとして計算する時間変化率を $F_{\rm a}$ で表した上で、RK3 の時間積分を改めて書くと、

$$\begin{aligned} f^{*} &= f^{t} + F(f^{t}) \cdot \frac{1}{3}\Delta t \\ &= f^{t} + \{F_{\rm rk}(f^{t}) + F_{\rm l}(f^{t})\} \cdot \frac{1}{3}\Delta t \end{aligned} \tag{2.3.55}$$

$$\begin{aligned} f^{**} &= f^{t} + F(f^{*}) \cdot \frac{1}{2}\Delta t \\ &= f^{t} + \{F_{\rm rk}(f^{*}) + F_{\rm l}(f^{t})\} \cdot \frac{1}{2}\Delta t \end{aligned} \tag{2.3.56}$$

$$\begin{aligned} f^{***} &= f^{t} + F(f^{**}) \cdot \Delta t \\ &= f^{t} + \{F_{\rm rk}(f^{**}) + F_{\rm l}(f^{t})\} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{2.3.57}$$

$$f^{t+\Delta t} = f^{***} + F_{\rm a}(f^{***}) \cdot \Delta t \tag{2.3.58}$$

となる。

$F_{\rm l}$ は時間積分ループの初めに計算を行い、RK3 ループ内 $F_{\rm rk}$ の計算を繰り返し、これらの時間変化率を加えた後に $F_{\rm a}$ を計算する。これら一連の計算により、1 回の時間積分を行う。最後に、asuca における時間積分の模式図を図 2.3.1 に示す。

[8] パラレルスプリッティングとシーケンシャルスプリッティングについては、第 4.1.1 項で詳しく述べる。

2.3.6 まとめ

本節では、asuca における時間離散化手法について説明した。

asuca では、精度と安定性、計算効率、必要メモリ量を考慮し、Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法を時間積分スキームとして採用している。また、音波を安定に効率良く計算するために、音波に関連する項のみを短い積分時間間隔で計算し、鉛直方向にはインプリシットに計算する split-explicit 法を採用している。

しかし、数値計算法全般に言えることであるが、どのような問題に対しても精度、安定性、計算効率、必要とするメモリ量の全てに優れる手法は存在しない。今後も各手法の利点欠点を見極め、現業モデルとして必要な要件を踏まえた上で精査していく必要がある。

付録 2.3.A Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法 (RK3) の差分精度

ここでは、RK3 の差分精度について調べる。(2.3.12) 式に (2.3.10) 式、(2.3.11) 式を代入して RK3 を展開すると、

$$\begin{aligned} f_{\rm rk}^{t+\Delta t} =& f^t + F\left[f^t + F\left(f^t + F(f^t)\frac{\Delta t}{3}\right)\frac{\Delta t}{2}\right]\Delta t \\ =& f^t + F(f^t)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{dF}{df}F(f^t)\Delta t^2 \\ &+ \left[\frac{1}{6}\left(\frac{dF}{df}\right)^2 + \frac{1}{8}\frac{d^2F}{df^2}F(f)^2\right]\Delta t^3 \\ &+ O(\Delta t^4) \end{aligned} \tag{2.3.59}$$

となる。$f(t+\Delta t)$ を t のまわりでテイラー展開した式は、

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t) =& f^t + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \\ =& f^t + F(f^t)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{dF}{df}F(f^t)\Delta t^2 \\ &+ \left[\frac{1}{6}\left(\frac{dF}{df}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2F}{df^2}F(f)^2\right]\Delta t^3 \\ &+ O(\Delta t^4) \end{aligned} \tag{2.3.60}$$

であるため、(2.3.59) 式と (2.3.60) 式の差は、

$$\begin{aligned} & f_{\rm rk}^{t+\Delta t} - f(t+\Delta t) \\ &= -\frac{1}{24}\frac{d^2F}{df^2}F(f)^2\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \end{aligned} \tag{2.3.61}$$

となる。すなわち、

$$\frac{d^2F}{df^2} = 0 \tag{2.3.62}$$

となるような問題に対しては (2.3.59) 式と (2.3.60) 式が等しくなるため、3 次精度であるものの、通常の問題に対しては 2 次精度となることが分かる。

付録 2.3.B RK3(Wicker and Skamarock 2002) の計算安定性について

ここでは、RK3 の計算安定性について von Neumann 法を用いて調べる。

次のような 1 次元の移流方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -U\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.3.63}$$

ここで U は風速を表し、空間一様であるとする。k を波数とし、f を三角関数で展開すると、

$$f = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikx} \tag{2.3.64}$$

となるため、各波数成分 $\tilde{f}_k$ 毎に式を整理すると、

$$\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial t} = -ikU\tilde{f}_k \tag{2.3.65}$$

となる。$kU = \omega$ とおくと、

$$\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial t} = -i\omega\tilde{f}_k \tag{2.3.66}$$

となり、これはいわゆる振動系の式となる。$\omega\Delta t = \nu$ とおくと (2.3.10) 式、(2.3.11) 式、(2.3.12) 式は、

$$\tilde{f_k}^* = \tilde{f_k}^t - \frac{i\nu}{3}\tilde{f_k}^t \tag{2.3.67}$$

$$\tilde{f_k}^{**} = \tilde{f_k}^t - \frac{i\nu}{2}\tilde{f_k}^* \tag{2.3.68}$$

$$\tilde{f_k}^{t+\Delta t} = \tilde{f_k}^t - i\nu\tilde{f_k}^{**} \tag{2.3.69}$$

となる。$\tilde{f_k}^*, \tilde{f_k}^{**}$ を消去すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{f_k}^{t+\Delta t} &= \tilde{f_k}^t\left[1 - i\nu\left\{1 - \frac{i\nu}{2}\left(1 - \frac{i\nu}{3}\right)\right\}\right] \\ &= \tilde{f_k}^t\left\{\left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right) + i\left(-\nu + \frac{\nu^3}{6}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.3.70}$$

ここで、

$$\begin{aligned} |\lambda| =& \sqrt{\left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)^2 + \left(-\nu + \frac{\nu^3}{6}\right)^2} \\ =& \sqrt{1 - \frac{\nu^4}{12} + \frac{\nu^6}{36}} \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

とおく。

$|\lambda|$ は解の振幅の増幅率を表し、$|\lambda| > 1$ の場合は計算を繰り返すに従って振幅が増幅してしまうため、安定に計算を行うことができない。安定に計算を行うためには、$|\lambda| \leq 1$ となるように ν を設定する必要がある。

ν はクーラン数と呼ばれる数で、(2.3.71) 式から、RK3 の場合は $\nu < \sqrt{3}$ のときに安定となることが分かる。

参考文献

荒波恒平, 氏家将志, 原旅人, 2012: 物理過程の数値計算. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 111–119.

Asselin, A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Durran, R., 2010: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 516 pp.

Klemp, J. B., W. C. Skamarock, and J. Dudhia, 2007: Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations. *Mon. Wea. Rev.*, **135**, 2897–2913.

Klemp, J. B. and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

2.4 移流スキーム[1]

2.4.1 移流スキームの特徴

移流は、いずれの予測方程式にも現れる基本的な項であるが、非線形であり計算手法により精度や安定性が大きく変わる。この節では、asuca で採用している移流スキームについて説明する。

まず、簡単のため一様流とした場合の 1 次元の移流方程式を考える。物理量を f、風速を u とすると方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (fu)}{\partial x} = 0 \tag{2.4.1}$$

と表される。これを、空間離散化すると、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{2.4.2}$$

となる。これは、図 2.4.1 のように、格子境界 $i-\frac{1}{2}$ からの流入と格子境界 $i+\frac{1}{2}$ からの流出により、格子内の物理量の総量が変わることを表す。

第 2.2.1 項で述べたように、asuca では物理量はセル中心に、u, v, w はセル境界に定義している。このため、セル境界におけるフラックスを計算する際、u, v, w はそのまま用いることができるが、物理量については周辺の格子点を元にした近似値を用いることになる。しかし、この近似値は厳密解とは異なるため、打ち切り誤差と呼ばれる誤差が生じることになり分散性や保存性に影響する。

移流スキームを選択する際に注意する点を以下に挙げる。

精度及び計算効率

セル境界のフラックスを計算するにあたって参照する格子点を増やせば、高精度のスキームを得ることができる。しかし、高精度のスキームほど演算量が多くなり、また参照格子点が増えるために隣接ノードとの通信量が増加し、計算時間がかかることを意味する。このように、精度と計算効率はトレードオフの関係にある。第 1.4.2 項で述べたとおり、asuca ではトータルとしての精度を向上させていくことが必要であるとしているため、移流スキームとして他のモデルでも広く使われている 3 次精度から 5 次精度を目安としており、移流スキームのみをより高精度にすることは考えていない。

単調性

移流は、ただある量を別の場所へ移動させる性質しかないため、移流自体が新たな極値を生じさせることはない。しかし、数値計算においては新たな極値が発生し、例えば質量が負となるような場合が生じうる。このため、新たな極値を生まないような単調性を保証するスキームであることが望ましい。ただし、2 次以上の高次精度差分スキームは解の単調性が保てずに、新たな極値を生じる性質があるという事が Godunov の定理として知られている。単調性を保つためには、1 次差分スキームを用いる、または 2 次以上の差分スキームに対して補正処理を行うといった方法が挙げられる。しかし、1 次差分スキームは精度が低く、スキーム自体に拡散性があるという欠点がある。補正処理を行う場合は、ただ対象となるセルを補正するだけでなく、全体としての総量が変わることがないように周辺セルも含めて補正を行う必要がある。

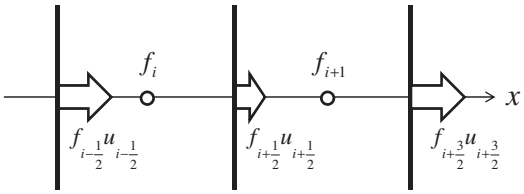

図 2.4.1　1 次元移流スキームの概念図。f は格子中心に定義された物理量、$u_{i-\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+\frac{3}{2}}$ は格子境界の風速で、この図ではいずれも正であるとしている。i 番目の格子から流出するフラックス $f_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}$ は、$(i+1)$ 番目の格子における流入となる。

保存性

例えば乾燥大気の質量の移流を考えた場合、現実大気においてその質量が消えたり生じたりすることはないものの、数値計算においては保存するとは限らない。asuca では有限体積法を採用することで、移流スキームによって計算したあるセル境界におけるフラックスの流出 (流入) は、同じセル境界を持つ隣のセルの流入 (流出) として扱う。これにより保存性は満たされるため、以後は保存性については特に議論しない。

これらの要件を満たし、なおかつ必要メモリ量の少ないスキームが望ましいが、全てにおいて優れているスキームというものはこれまでに見つかっていない。このため、様々なスキームの性質を見極め、必要に応じたスキームを選択する必要がある。

asuca では、これらの要件を勘案し、移流スキームには 3 次精度風上差分を基本とし、単調性を保つために 1 次精度差分を併用する Koren (1993) の流束制限関数を用いている。この節では、まず第 2.4.2 項で Koren (1993) において基本となる 3 次精度風上差分について述べ、第 2.4.3 項で Koren (1993) の流束制限関数による単調性の保証について説明する。

[1] 松林 健吾、河野 耕平、石田 純一、室井 ちあし

2.4.2 3 次精度風上差分

ここでは MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) 法に基づいて高次精度の差分スキームを組み立てる。なお、以下の議論は藤井 (1994) を大いに参考にしている。

MUSCL 法とは、セル境界の値 $f_{i+\frac{1}{2}}$ を周辺のセル中心の値 f_i, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2} などから内挿して求め、それによりフラックスを計算する方法である。これにより高次精度の差分法を得ることができるが、そのままでは新たな極値が生じてしまう。これを避けるため、流束制限関数を導入する。まず、この項では流束制限関数を用いずに高次精度の差分法を導出し、次項で流束制限関数について述べる。

はじめに、 $x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}}$ における f の分布関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ を x_i のまわりでテイラー展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_i) \\ &+ \frac{1}{1!}(x-x_i) f^{(1)}(x_i) \\ &+ \frac{1}{2!}(x-x_i)^2 f^{(2)}(x_i) \\ &+ O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

ただし、$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表わし、

$$\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \tag{2.4.4}$$

である。

有限体積法においては、f_i は格子点 i における値ではなく、$x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}}$ の区間におけるセル平均である ($f(x_i)$ が格子点 i における値である)。このことから次式が成り立つ。

$$f_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx \tag{2.4.5}$$

ここで、格子間隔が等間隔であり、セル境界はちょうどセル中心同士の中間にあるとすると、

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_i = x_i - x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{2} \tag{2.4.6}$$

となるため、(2.4.5) 式に (2.4.3) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} f_i =& \frac{1}{\Delta x}\left[f(x_i)x + \frac{1}{2}(x-x_i)^2 f^{(1)}(x_i) \right. \\ &\left. + \frac{1}{6}(x-x_i)^3 f^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^3)x \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \\ =& f(x_i) + \frac{\Delta x^2}{24} f^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

となる。

この式の導関数について、次のように 2 次精度で近似できると仮定する (具体的な形は後で与える)。

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_i) =& f_i^{(1)} + O(\Delta x^2) \\ f^{(2)}(x_i) =& f_i^{(2)} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

次に、(2.4.8) 式、(2.4.7) 式を (2.4.3) 式に代入し、$f(x_i), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ を消去すると、$|x - x_i| < \Delta x$ であるため、

$$\begin{aligned} f(x) =& f_i + (x-x_i) f_i^{(1)} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ (x-x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right\} f_i^{(2)} \\ &+ O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

となる。従って、セル境界の値は、

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} &= f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &= f_i + \frac{\Delta x}{2} f_i^{(1)} + \frac{\Delta x^2}{12} f_i^{(2)} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

と求まる。ここから、3 点の f を用いて導関数を表すことを考える。3 点を用いて計算を行う場合、風上 2 点、風下 1 点を用いるいわゆる風上差分としなければ、計算が安定に行えないことが知られている。このため、$u > 0$ と $u < 0$ で場合分けして扱う必要がある。

まず $u > 0$ であるとして、f_{i-1}, f_i, f_{i+1} を用いて導関数 $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ を表すと、

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.11}$$

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.12}$$

となり、これらを、(2.4.10) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} =& f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{4} + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{12} \\ &+ O(\Delta x^3) \\ =& \frac{1}{3} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i-1} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

が得られる。これによりセル境界の物理量を 3 次精度で求めることができた。

$u < 0$ の場合は、$f_{i+\frac{1}{2}}$ を f_i, f_{i+1}, f_{i+2} の値を用いて評価すればよい。すなわち、(2.4.9) 式から、

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} f_{i+1}^{(1)} + \frac{\Delta x^2}{12} f_{i+1}^{(2)} + O(\Delta x^3) \tag{2.4.14}$$

として、導関数 $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ も同様に f_i, f_{i+1}, f_{i+2} から求める。

$$f^{(1)}(x_{i+1}) = \frac{f_{i+2} - f_i}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.15}$$

$$f^{(2)}(x_{i+1}) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2.4.16}$$

これらを (2.4.14) 式に代入し、

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}f_i + \frac{5}{6}f_{i+1} - \frac{1}{6}f_{i+2} + O(\Delta x^3) \quad (2.4.17)$$

が得られる。

このようにして求めたセル境界の物理量からセル境界のフラックス $f_{i+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2}}$ を計算すると、移流スキームは 3 次精度の風上差分となる。これは、Wicker and Skamarock (2002) で示されている WRF(Weather Research and Forecasting model) の差分スキームと同じ形である。

2.4.3 流束制限関数を使った高精度風上差分

第 2.4.2 項では 3 次精度風上差分によるフラックスを求めた。しかし、前述のとおり 2 次以上の高次精度スキームは解の単調性を維持できず、1 次差分は単調性を維持できるものの精度が低く、スキーム自体に拡散性があるという欠点がある。

単調性を保ちつつ高精度の計算を行うには、物理量の分布に注目し、周囲の格子と比べて物理量の変化が大きく、新たな極値が生じやすい格子のフラックス計算には 1 次差分を用い、物理量の変化がなめらかな格子では高次精度の差分スキームを用いればよい。このように、物理量の変化のなめらかさに応じて高次と 1 次のスキームを連続的に扱うために用いるのが流束制限関数である。精度の高い高次差分を基本とし、物理量の変化が大きい場合に単調性を保つためにフラックス (流束) を 1 次精度へ制限することから、このように呼ばれている。asuca では、Koren (1993) による流束制限関数を採用しており、この流束制限関数では前項の 3 次精度差分と 1 次精度差分を連続的に接続する関数となっている [2]。

以下に Koren (1993) による移流スキームについて説明する。

まずは $u > 0$ であるとして、セル境界の物理量 $f_{i+\frac{1}{2}}$ が次式のように書けるとする。

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_i + \frac{1}{2}\phi(r_{i+\frac{1}{2}})\,(f_i - f_{i-1}) \quad (2.4.18)$$
$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i+1} - f_i}{f_i - f_{i-1}}$$

ここで、r は場の滑らかさを表し、$r = 1$ のときは f_{i-1}, f_i, f_{i+1} が直線上に並び、もっとも滑らかな状態に対応する。$r < 0$ の場合は極値を持つ状態に対応する。この式における ϕ が流束制限関数であり、場のなめらかさ r に応じて変化することよりセル境界の物理量の計算方法、すなわち差分スキームが変わることになる。次に、この ϕ として、$f_{i+\frac{1}{2}}$ が単調性を維持しつつなるべく高精度となるような関数を考える。

[2] 流束制限関数については、Durran (2010) にも詳しく書かれている。

ここで、ある係数 c_1, c_0 を用いて $\phi(r) = c_1 r + c_0$ と表されるとすると、f は、

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}} =& f_i + \frac{1}{2}(c_1 r_{i+\frac{1}{2}} + c_0)\,(f_i - f_{i-1}) \\ =& f_i + \frac{1}{2}c_1\,(f_{i+1} - f_i) + \frac{1}{2}c_0\,(f_i - f_{i-1}) \\ =& \frac{1}{2}c_1 f_{i+1} + \left(1 + \frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{2}c_1\right) f_i - \frac{1}{2}c_0 f_{i-1} \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

となる。ここで、(2.4.13) 式と比較して、$c_1 = 2/3, c_0 = 1/3$ であれば (2.4.19) 式は (2.4.13) 式と一致する。すなわち、

$$\phi(r) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r \quad (2.4.20)$$

とすれば (2.4.13) 式の 3 次精度風上差分が実現される。

引き続き、単調性を満たすために ϕ に必要な条件を検討する。速度 u を定数とすると、

$$\frac{f_i^{t+1} - f_i^t}{\Delta t} = -u\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^t - f_{i-\frac{1}{2}}^t}{\Delta x} \quad (2.4.21)$$

であるから、クーラン数 $\nu = u\Delta t/\Delta x$ を導入して、

$$\begin{aligned} &\frac{f_i^{t+1} - f_i^t}{f_{i-1}^t - f_i^t} \\ &= \nu\left\{1 + \frac{1}{2}\phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}\right\} \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

と変形できる。

ここで、(2.4.22) 式の左辺が 0 から 1 の間の値をとることは、単調であることの必要十分条件となる。この条件を満たせば、f_i^t と f_{i-1}^t が単調増加 (減少) であれば、f_i^{t+1} と f_{i-1}^{t+1} も単調増加 (減少) となることが保証され、単調性が保たれることになる。このことから、

$$0 \le \nu\left\{1 + \frac{1}{2}\phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}}\right\} \le 1 \quad (2.4.23)$$

となり、$\nu > 0$ であるから、ϕ の満たすべき条件は次のようになる。

$$-2 \le \phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}} \le 2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) \quad (2.4.24)$$

単調性を保証するために 1 次精度差分を用いるため、付録 2.4.A に記した CFL 条件により $0 < \nu < 1$ でなくてはならない。このため、

$$-2 \le \phi(r_{i+\frac{1}{2}}) - \phi(r_{i-\frac{1}{2}})\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}} \le 0 \quad (2.4.25)$$

が得られる。このような条件を満たす ϕ の範囲を求めることは容易ではないが、十分条件として

$$\begin{cases} 0 \le \phi \le 2, \quad \phi \le 2r, & r \ge 0 \\ \phi = 0, & r < 0 \end{cases} \quad (2.4.26)$$

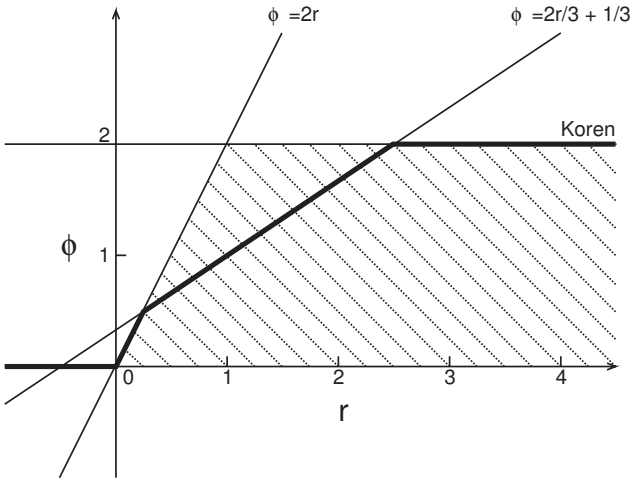

図 2.4.2 Koren (1993) による流束制限関数。ハッチの領域は単調性を保つための十分条件であり、ϕ がこの領域にあればよい。

を取れば上式を満たし、従って単調性を満たすことが保証される。

単調性を満たす流束制限関数はいくつも提案されているが、asuca では、第 2.4.2 項で求めた高次精度風上差分を用いるため、(2.4.26) 式を満たし、多くの r に対して (2.4.20) 式となるような流束制限関数を用いている。これは Koren (1993) の流束制限関数として知られており、

$$\phi(r) = \max\left[0, \min\left\{2r, \min\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r, 2\right)\right\}\right] \tag{2.4.27}$$

という関数で表される。図 2.4.2 にこの関数の形を示す。

ここで例えば、極値を持つような格子点においては $r < 0$ となり、このとき $\phi = 0$ となる。この場合、(2.4.18) 式から、

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_i \tag{2.4.28}$$

となり、隣接格子点値をセル境界で使う 1 次差分となることが分かる。1 次差分は精度は劣るものの単調性は保たれる。

一方、場がなめらかな場合は、$\phi = 1/3 + 2/3r$ となり、前述の高精度の 3 次精度風上差分となることが分かる。なお、$u < 0$ のときについても同様に計算を行うことで、単調性に関する条件として同じ式が求まる。

このように、asuca では Koren (1993) の流束制限関数を用いることで、場のなめらかさに応じて単調性を保ちつつ高精度の差分スキームを用いることが可能となった。ただし、単調性を保証するために 1 次精度風上差分を用いているため、CFL 条件により $0 < \nu < 1$ を満たす必要がある点に注意が必要である。

また、この移流スキームでは、極値や急峻な分布がある格子点では 1 次差分が用いられるため、拡散性を持つことになる。この移流スキーム自体が拡散性を内包する性質については、第 2.6.2 項で具体例と共に詳しく述べる。

付録 2.4.A　CFL 条件

差分スキームにおいて、例えば 1 次精度差分を用いる場合は隣接 1 格子の情報を元にする。この場合、$u\Delta t$ が Δx より大きくなると、隣接 1 格子より遠くの位置を参照することになり、隣接格子点値の外挿値を用いるため、計算不安定となることが知られている。このため、1 次精度差分を安定に計算するための条件は、

$$0 < u\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{2.4.29}$$

となる。すなわちクーラン数 ν は $0 < \nu < 1$ である必要があり、この条件を CFL 条件という。

CFL 条件は参照格子点の数、すなわち差分スキームによって変わり、例えば周囲 5 格子を参照する場合は、CFL 条件は $0 < \nu < 2$ となる。ただし、CFL 条件は付録 2.3.B で示した von Naumann の安定解析による安定条件とは別であり、von Naumann の安定解析では参照格子点数の多い高精度差分ほど安定性が低くなる。

参考文献

Durran, R., 2010: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 516 pp.

藤井孝藏, 1994: 流体力学の数値計算法. 東京大学出版会, 234pp.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

2.5　側面・上部境界条件 [1]

2.5.1　はじめに

数値予報は、これまでに述べたように時間と空間に依存する予報変数に対する偏微分方程式を解くことによって、未来の状態を予想しようとするものである。この偏微分方程式を解くには、初期条件と境界条件が必要であり、このうち境界条件の与え方には、境界上の値を規定する方法や境界における勾配等の性質を規定する方法等 [2] がある。

asuca は有限体積法で離散化しており、個々のセルではそのセル境界におけるフラックスを介して物理量が流入・流出する。計算領域の境界においても同様に領域境界におけるフラックスを介して物理量が流入・流出することを考え、この境界上のフラックスを計算するために必要な値を境界条件として与える。本節では asuca を領域モデル（以下、内側モデルと呼ぶ）として、それより広い領域のモデル（以下、外側モデルと呼ぶ）にネスティングするという利用方法を想定して、その場合の境界付近のフラックスの計算について、第 2.5.2 項で説明する。

外側モデルの計算結果を境界値として利用する際に考慮すべき点として、外側モデルの時空間の解像度が内側モデルよりも一般に粗いこと、また、外側モデルの出力値から境界値を用意することを想定すると、外側モデルの情報は時間方向に間引かれていることが挙げられる。そのため、側面・上部境界値は外側モデルからモデルの空間・時間分解能に応じた内挿処理を行って用意する。このことに関連して、計算領域平均の質量変化が外側モデルのそれに追随するように側面境界の質量フラックスを調節する手法（質量フラックスの時間方向の内挿手法）について、第 2.5.3 項で説明する。

外側モデルの情報を反映させる際に、人為的に設定した（自然界には存在しない）境界において、不自然な波を生成しないことや波を反射させないことに注意が必要となる。境界での波の生成・反射を抑えるために導入するレイリーダンピングについて、第 2.5.4 項で説明する。

なお、本節で用いる各変数の定義は第 2.1 節と同じである。

2.5.2　境界付近におけるフラックスの計算

ここでは、asuca における側面および上部境界の設定内容（格子配置・条件）を説明し、境界付近のフラックスの計算について述べる。第 2.2.1 項で説明したとおり、スカラー変数を配置する p で示したポイントに対し、u, w で示した x, z 方向の風を配置するポイントは半格子ずれることを図 2.5.1 で示している。側面および上部境界は太線で示しており、フラックスの計算のために使う境界値の範囲は図中の青色の塗りつぶしの範囲であり、値の使い方の詳細はこの後で述べる。黒字で示した格子では予報変数を時間積分し、赤字で示した格子は外側モデルから値 [3] を与える。

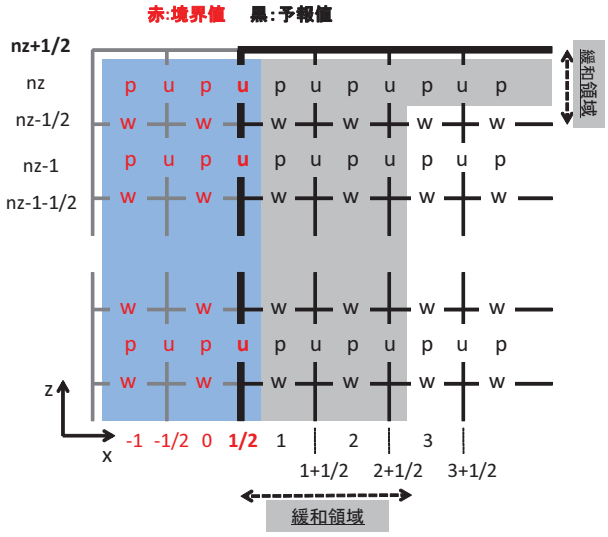

図 2.5.1　asuca の側面・上部境界の格子配置の模式図。計算領域の西端と上端を描いた $x-z$ 断面。スカラー変数を配置するポイント (図中の p) に対して、u, v, w は半格子ずれたポイントに配置される（図中の u, w)。太線が計算領域境界を示し、黒字の格子点値は予報値、赤字の格子点値は境界値である。青色と灰色の塗りつぶしの範囲で境界値が必要である。青色の塗りつぶしの境界値は、境界付近のフラックスの計算に使われる。灰色の塗りつぶしの境界値は、「緩和領域」におけるレイリーダンピングの参照値として用いられる（ここでは側面境界から 2 格子、上部境界から 1 格子を緩和領域に想定した)。数字は格子番号を示す。

asuca の側面境界は、図 2.5.1 に示すように、x 方向には u ポイント（y 方向には v ポイント）に設定される。この側面境界格子（格子番号 (1/2)）におけるフラックスを介して、境界において物理量 ϕ が流入・流出する。ϕ のフラックスの評価に必要な格子数は、移流スキームの精度に依存し、Koren (1993) のスキームでは風上に 2 格子、風下に 1 格子である。したがって、境界でのフラックスを評価するため、計算領域の外側に 2 格子分の境界値を用意しておく必要がある。たとえば、格子番号 (1/2) における ϕ のフラックスは、図の左を風上とすると、格子番号 (-1),(0),(1) の ϕ と格子番号 (1/2) に配置する $\rho U/J$ を用いて計算され、格子番号 $(1+1/2)$ における ϕ のフラックスは、格子番号 (0),(1),(2) の ϕ と格子番号 $(1+1/2)$ の $\rho U/J$ を用いて計算される。

---

[1] 河野 耕平、荒波 恒平

[2] 境界上の値を規定する方法としては、その値を時間的に一定とする固定端条件が、また、境界における勾配等の性質を規定する方法としては、境界における勾配をゼロとする自由端条件が良く知られている。

[3] asuca の予報変数である ρ/J, $\rho u/J$, $\rho v/J$, $\rho w/J$, $(\rho\theta_m)/J$, $\rho q_\alpha/J$ を外側モデルの計算結果から用意する。たとえば、外側モデルが密度ではなく気圧を予報変数とする場合には、状態方程式から密度を診断して求める。

asuca の上部境界は、w ポイントに設定される。この上部境界格子（格子番号 (nz+1/2)）ではフラックスをゼロとする条件を課し、$W = 0$ とする。格子番号 (nz−1/2) における鉛直方向の ϕ のフラックスの評価は、Koren (1993) のスキームではなく、中央 2 次差分で評価し、格子番号 (nz),(nz−1) の ϕ と格子番号 (nz−1/2) の $\rho W/J$ を用いて計算される。したがって、上部境界の外（上）側では外側モデルの値を用意する必要はない。

2.5.3 側面境界のフラックス調節

ここで、側面境界値と領域全体の総質量の時間変化との関係を議論する。

まず、一般座標系での質量保存の式は、(2.1.38) 式より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho\right) = \\ -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{J}\rho U\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\rho V\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho W\right) \\ -\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{J}\rho q_{\alpha} W_{t_{\alpha}}\right) + \frac{1}{J}F_{\rho}\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

である。この式について計算領域全体での体積積分をとる。上式の右辺第 3 項の鉛直流の項は、上部・下部境界で $W = 0$ の条件により、カラム全体の積分をとると消える。右辺第 4 項は、上部境界では $W_{t_{\alpha}} = 0$ の条件により、カラム全体の積分をとると、下部境界でのフラックス（地上降水として領域から流出するフラックス）が残る。また、(2.1.25) 式で定義したように

$$F_{\rho} = Q_{\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{i}}\tilde{f}^{i}_{\rho} \tag{2.5.2}$$

であり、(2.5.2) 式の右辺第 1 項は全ての水物質の生成・消滅項の和なので通常はゼロである。また、(2.5.2) 式の右辺第 2 項は U, V, W および $W_{t_{\alpha}}$ によらないフラックスによる質量の時間変化を表し、

$$\tilde{f}^{3}_{\rho} = \sum_{\alpha}\tilde{f}^{3}_{\rho\alpha} = \sum_{\alpha}\left(\rho\overline{q'_{\alpha}w'}\right) \tag{2.5.3}$$

であるが、上部境界では $\rho\overline{q'_{\alpha}w'} = 0$ の条件により、下部境界でのフラックス（地表面から流入してくる水蒸気フラックス）が残る [4]。したがって (2.5.1) 式を計算領域全体で体積積分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left(\frac{1}{J}\rho\right)d\xi d\eta d\zeta = \\ -\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2}^{\xi=nx+1/2} \\ -\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2}^{\eta=ny+1/2} \\ -\left\{\iint\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{J}\rho q_{\alpha}W_{t_{\alpha}}\right)d\xi d\eta\right\}_{\zeta=1/2} \\ +\left\{\iint\frac{1}{J}\zeta_{z}\left(\rho\overline{q'_{v}w'}\right)d\xi d\eta\right\}_{\zeta=1/2}\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

となる。ここで、nx は ξ 方向の格子数、ny は η 方向の格子数である（以下、本節において同様）。この式は、

- 計算領域内の総質量の時間変化（左辺）

が、

- 領域側面の質量フラックスの総和（右辺第 1, 2 項）
- 地上降水として領域外に出ていく（地上に落下する）質量の総和（右辺第 3 項）
- 地表面から流入する水蒸気フラックスの総和（右辺第 4 項）

によって決まることを示している。右辺第 1, 2 項の領域側面の質量フラックスは、側面境界値から診断して用意するものである。したがって、内側モデルの計算領域の総質量の時間変化は、右辺第 3 項の降水の項と第 4 項の水蒸気フラックスの項の効果を除いて、予め与えられるものとなる。ここで、右辺第 3, 4 項の効果は、右辺第 1, 2 項に比較して平均的に小さく、かつ右辺第 3, 4 項は平均的には相殺関係にあると考えられる [5]。そのため、「内側モデルの領域平均質量の時間変化が外側モデルのそれに追随する」ためには、「内側モデルの領域平均質量の時間変化を外側モデルのそれに追随させる」ような側面境界の質量フラックスを作成しておく必要がある。なお、このことは質量を直接の予報変数とするモデルに限らず、側面境界で質量の流入・流出を考えるモデルには一般に共通する問題であり、気圧を予報変数とする JMA-NHM においても本項と同じ目的で側面フラックスの調節を行っている (斎藤 2008)。

以下では、側面境界の質量フラックス値の作成方法について示す。ここで、領域総質量を $M(t)$、領域側面の質量フラックスの総和を $F(t)$ と表記する。それぞれ、

$$M(t) = \iiint\left(\frac{1}{J}\rho(t,\xi,\eta,\zeta)\right)d\xi d\eta d\zeta \tag{2.5.5}$$

[4] 第 2.1.2 項 (2) で述べたように、(2.5.2) 式の $\partial\tilde{f}^{i}_{\rho}/\partial x^{i}$ の項は、実際には物理過程によって評価された ρ の時間変化率の形で扱うが、(2.5.4) 式では、重力加速度は z 軸及び ζ 軸と平行であるとして $\partial\tilde{f}^{i}_{\rho}/\partial x^{i}$ をベクトルの発散として一般座標変換した形での下部境界のフラックスを明示的に示す。

[5] 全球ではよい近似で成立する。

および

$$F(t) = -\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U(t,\xi,\eta,\zeta)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2}^{\xi=nx+1/2} -\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V(t,\xi,\eta,\zeta)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2}^{\eta=ny+1/2} \tag{2.5.6}$$

である。(2.5.4) 式より、$M(t)$ と $F(t)$ には、地上降水として領域外に出ていく質量および地表面から流入する水蒸気の質量を除いて、

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = F(t) \tag{2.5.7}$$

の関係がある。

ある時刻 t_0 から時刻 t_1 までの外側モデルのフラックス F_{ext} の時間変化を図 2.5.2(左) の曲線で表すとすると、(2.5.7) 式から

$$M(t_1) - M(t_0) = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial M(t)}{\partial t}dt = \int_{t_0}^{t_1}F(t)\,dt \tag{2.5.8}$$

であるから、その時間で変化した計算領域内の総質量の増減は塗りつぶした領域の面積となる。

一方で、内側モデルを計算するにあたって、外側モデルの情報は時刻 t_0 と t_1 の瞬間値しかない。時刻 t_0 と t_1 の質量フラックス、その間の積算としての質量変化量（図 2.5.2(左) の塗りつぶし域の面積）の情報は得られるが、その間の質量フラックスと質量がどのように時間変化したかの情報はない。したがって、内側モデルの時間積分を考えた場合、その間の時刻のフラックスを推定して作成する必要がある。

asuca では (2.5.7) 式の関係を満たす $\rho U(t)/J$, $\rho V(t)/J$ を各境界格子で設定するために以下の手順をとる。

はじめに、各境界格子で時間方向に線形内挿した値を質量フラックスの推定値 $\rho U_g(t,\xi,\eta,\zeta)/J$, $\rho V_g(t,\xi,\eta,\zeta)/J$ とする。その総和を $F_g(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} F_g(t) = &\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2} \\ &-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=nx+1/2} \\ &+\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2} \\ &-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=ny+1/2} \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

である。この場合の内側モデルの領域総質量の時間変化は、図 2.5.2（中）の塗りつぶし域の面積となり、図 2.5.2（左）の塗りつぶし域の面積と一致するとは限らない。そのため、図 2.5.2（左）の塗りつぶし域の面積と一致するように、質量フラックスを調節する必要がある。

次に、(2.5.7) 式の関係を満たすための側面境界の各格子での質量フラックスの推定値 $\rho U_g/J$, $\rho V_g/J$ に対する調節値を $A(t)$ とし、調節後の側面フラックスの総和を

$$\begin{aligned} F(t) = &\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t) + A(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=1/2} \\ &-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho U_g(t) - A(t)\right)d\eta d\zeta\right\}_{\xi=nx+1/2} \\ &+\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t) + A(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=1/2} \\ &-\left\{\iint\left(\frac{1}{J}\rho V_g(t) - A(t)\right)d\xi d\zeta\right\}_{\eta=ny+1/2} \\ &= F_g(t) + 2\left(S_{\eta\zeta} + S_{\xi\zeta}\right)A(t) \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

とする。$S_{\xi\zeta}, S_{\eta\zeta}$ は、計算空間におけるモデル領域の側面の面積である。つまり、$\xi = 1/2$ と $\xi = nx + 1/2$、$\eta = 1/2$ と $\eta = ny + 1/2$ とで調節値の絶対値は同じで逆符号ということを仮定している。$F_g(t), S_{\eta\zeta}, S_{\xi\zeta}$ は既知であるから、$F(t)$ を何らかの方法で決めれば、$A(t)$ が求まり、各側面でのフラックスの調節量が定まる。

ここで、n 個の時刻の境界値毎の領域総質量の値から、その n 時刻間の領域総質量の時間変化を推定して決めることにする。asuca では $M(t)$ がなめらかに変化するように、$M(t)$ を

$$M(t) = a_j + b_j(t - t_j) + c_j(t - t_j)^2 + d_j(t - t_j)^3 \tag{2.5.11}$$

の形を仮定し、スプライン補間で係数 a_j, b_j, c_j, d_j を決めて時間方向に内挿する (添字 j は境界値の存在する時刻を表すインデックス)。係数が決まれば (2.5.7) 式の関係から

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\partial M(t)}{\partial t} \\ &= b_j + 2c_j(t - t_j) + 3d_j(t - t_j)^2 \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

であるから、(2.5.10) 式と (2.5.12) 式から調節値 $A(t)$ を求めることができる。以上のようにしてフラックスを調節した値を側面境界値として用いる。

なお、数値積分の一般的な留意点として、調節した質量フラックスの境界値（時間の関数）を用いて密度を時間積分すると、実際には図 2.5.3 の塗りつぶし領域のように積分時間間隔 Δt ごとに一定の質量変化をする。このため、時刻 t における密度の時間積分をする際のフラックスの境界値は $F(t)$（図 2.5.3 の左図）で

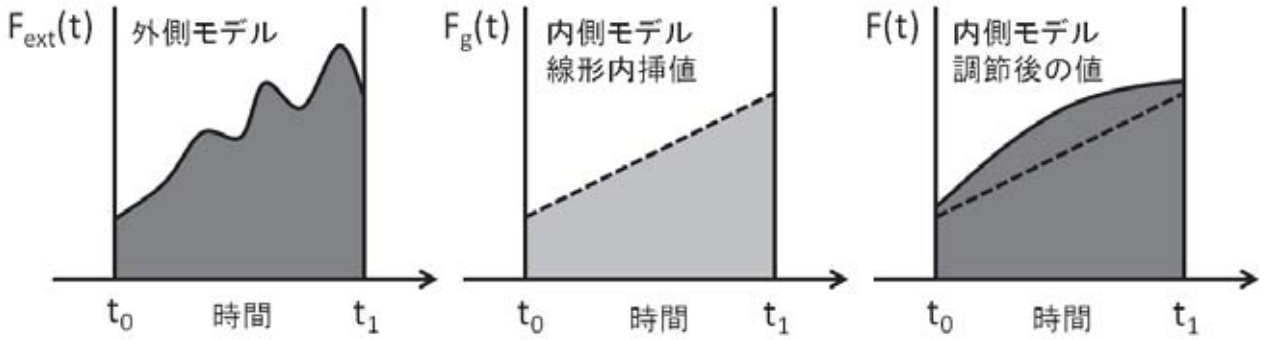

図 2.5.2 側面のフラックス調節の模式図。横軸は時間、縦軸は領域側面の質量フラックスの総和。塗りつぶした面積は、領域総質量の時刻 t_0 からの増分。(左) 外側モデルのフラックスの時間変化、(中) 内側モデルにおいて時刻 t_0 と t_1 のフラックスを線形内挿した場合、(右) 内側モデルにおいて、左図の外側モデルの質量変化に合うように調節した場合。

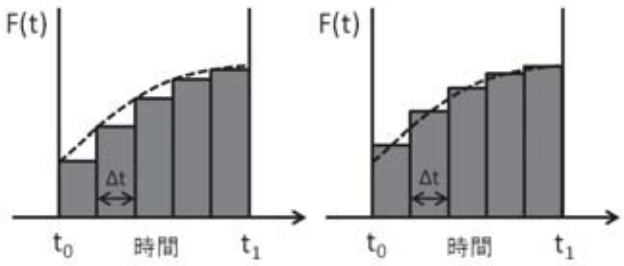

図 2.5.3 調節後の側面フラックスを用いた時間積分の模式図。時刻 t における密度の時間積分に、(左図) 時刻 t における境界の質量フラックスを用いる場合、(右図) 時刻 $t + \Delta t/2$ における質量フラックスを用いる場合。

はなく、$F(t + \Delta t/2)$ の値を用いた方が、外側モデルの質量変化により追随することができる (図 2.5.3 の右図)。

以上で、領域全体の質量変化については、降水や地表面からのフラックスによる影響を除けば、外側モデルに追随できるようになる。ただし、この調節した側面境界値を用いる際、側面境界上の質量フラックスのみを変更すると、その内側の格子とのフラックス差によって音波が生じる [6] ので注意を要する。つまり、調節した側面境界上の質量フラックスとその内側の格子とのフラックス差が大きくならないような措置が必要である。asuca では調節によって生じる隣接の格子間のフラックスの差を、内側領域のすべての格子のフラックスを境界からの距離に応じて線形に変化させることによって軽減させることとし、計算領域内部の質量フラックスに対して (2.5.13) 式の修正を加える。この措置を初期値において施すことによって特定の格子間でフラックス差が大きくならないようにしている。

$$\begin{aligned}\frac{1}{J}\rho U\left(t=0,\xi,\eta,\zeta\right) &= \frac{1}{J}\rho U_a\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ &\quad + \left(1-2\frac{\mathrm{dx}\left(\xi\right)}{\mathrm{DX}}\right) A\left(t=0\right) \\ \frac{1}{J}\rho V\left(t=0,\xi,\eta,\zeta\right) &= \frac{1}{J}\rho V_a\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ &\quad + \left(1-2\frac{\mathrm{dy}\left(\eta\right)}{\mathrm{DY}}\right) A\left(t=0\right)\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

ここで、DX は計算領域の幅 ($\xi = 1/2$ と $\xi = \mathtt{nx} + 1/2$ 間の距離)、$\mathrm{dx}\left(\xi\right)$ は西側境界 ($\xi = 1/2$) からの距離を表し $\mathrm{dx}\left(1/2\right) = 0$, $\mathrm{dx}\left(\mathtt{nx} + 1/2\right) = \mathrm{DX}$ である (η 方向も同様)。また、U_a, V_a は修正前の初期値である。

2.5.4 レイリーダンピング

側面および上部境界において共通して注意すべき点は、人為的に設定した (自然界には存在しない) 境界において、不自然な現象 (波の生成・反射) を起こさないことである。波は何らかの不均質が復元力となって媒質を伝わっていく現象であり、反射は媒質が不連続になる所で起こる。そのため、境界値と一つ内側の格子の値との差が大きい状態になると波の生成・反射が起こりやすい。そのような状態になることを避けるため、asuca では境界の内側にある程度の領域 (緩和領域) を設けて、その領域内では予報値を徐々に境界値に近づけるレイリーダンピングと呼ばれる手法を用いている。

図 2.5.1 は、側面境界から 2 格子、上部境界から 1 格子を緩和領域とした場合の図で、黒字で示した計算領域のうち下線を付した格子でレイリーダンピングが施されることを示す。なお、緩和領域に該当する格子では、それぞれの格子に境界値を用意する必要がある (図中の灰色の塗りつぶしの範囲)。以下、レイリーダンピングの手法について説明する。

[6] 音波は密度の疎密を復元力とする波であるため。

レイリーダンピングは、u, v, w, θ_m の時間変化率[7]に、以下のように徐々に外側モデルの値に近づける効果を加えることにより施される[8]。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -m\,(x,y,z)\,(u - u_{\rm ext}) \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -m\,(x,y,z)\,(v - v_{\rm ext}) \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= -m\,(x,y,z)\,w \\
\frac{\partial \theta_m}{\partial t} &= -m\,(x,y,z)\,(\theta_m - \theta_{m\rm ext})
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

ここで下つき添字 ext を付けたものは、外側モデルから内挿で求めた値である。

$m(x,y,z)$ はダンピングの強度を決めるパラメータ[9]であり、側面・上部境界ではダンピングが最も強く、内部ではゼロになるように決める。

$$m(x,y,z) = \max(m_x, m_y, m_z) \tag{2.5.15}$$

$$m_x = \begin{cases} \gamma_h \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_x}{d_h}\right)\right] & (d_x < d_h) \\ 0 & (d_x \geq d_h) \end{cases} \tag{2.5.16}$$

$$m_y = \begin{cases} \gamma_h \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_y}{d_h}\right)\right] & (d_y < d_h) \\ 0 & (d_y \geq d_h) \end{cases} \tag{2.5.17}$$

$$m_z = \begin{cases} \gamma_v \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{d_z}{d_v}\right)\right] & (d_z < d_v) \\ 0 & (d_z \geq d_v) \end{cases} \tag{2.5.18}$$

ここで d_x, d_y, d_z は側面・上部境界からの距離を、また d_h, d_v はそれぞれ、側面と上部でダンピングをかける範囲を表す[10]。また γ_h, γ_v は、外部から経験的に与えられるパラメータである。

レイリーダンピングは、上記の u, v, w, θ_m に加えて、密度 ρ にも施す場合がある。これは質量保存の観点からは望ましいことではないが、内部領域で不自然な波が発生してしまう場合[11]には、密度にレイリーダンピングを施して、その時間変化を境界付近で抑えることによって、反射した波が内部領域に影響を与える状況を防ぐことができる。

2.5.5 まとめ

本節では asuca を領域モデルとして利用する場合に必要となる境界付近のフラックスの計算について述べた。側面境界においては、境界上のフラックスを介して物理量の流入・流出があり、このフラックスの計算で参照する格子数に応じた境界値が、境界の外側に必要である。これらの境界値は、基本的には外側モデルの値を時間方向に線形内挿した値を用意するが、側面境界上の質量フラックスについては、内側モデルの領域総質量の時間変化を外側モデルのそれに追随させるため、線形内挿した値に対し調節を加えている。上部境界においては、フラックスをゼロとする条件を課すとともに境界付近のフラックスの計算では参照格子点を減らしている。

側面および上部境界では、人為的に設けた境界に起因する不自然な波を生成しないことと境界での波の反射が内部領域に悪影響を与えるのを防ぐことを目的に、境界の内側に緩和領域を設けてレイリーダンピングを施している。緩和領域の幅は実験による確認等を通じて経験的に決められるものであり、その幅に応じた境界値を用意する必要がある。

参考文献

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

斎藤和雄, 2008: 連続式への水蒸気拡散の導入と側面フラックス計算への海面水蒸気フラックスの考慮. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 45–46.

[7] u, v, w, θ_m は予報変数ではないことに注意。例えば u ではなく $\rho u/J$ が予報変数であるため、これらの時間変化率に密度 ρ とヤコビアンの逆数 $1/J$ を乗じたものが予報変数の時間変化率となる。

[8] 境界において $w = 0$ の条件を課しているので、w はゼロに近づける効果を加える。

[9] $\tau = 1/m$ は、(2.5.14) 式の内側モデル値と外側モデル値の差（例えば $u - u_{\rm ext}$ ）が $1/e$ に減衰する時間 (e-folding time) である。

[10] 側面境界と上部境界での「ダンピング」が別々に加えられることがよく行われるが、それでは側面境界かつ上部境界の部分で想定以上にダンピングが強くなってしまう。

[11] 具体的な経験としては、局地解析から予報を開始した場合がある。局地解析は 3 次元変分法で解析され、変数間のバランス関係についてモデルによる拘束がないことから、各変数の修正の大きい場所から音波が伝わる様子が予報初期に見られる。そのため、局地モデルとして利用する場合は、密度にもレイリーダンピングをかける。

2.6 理想実験を通じたドライモデルとしての評価[1]

2.6.1 はじめに

ここまで力学過程の定式化について述べてきた。一般に、どの非静力学モデルにおいても、予報方程式としての運動方程式、連続の式、熱力学の式に、診断式としての状態方程式を基本として、水物質等を予報変数として追加する毎に、それらに対応する予報方程式を追加していくこととなる。

世の中の様々な非静力学モデルでは、これらの方程式を基本とするものの、その後の定式化や離散化によって様々なバリエーションが存在する。例えば、運動方程式や熱力学の式をそのまま用いるか、それとも連続の式と組み合わせるかどうかで移流形式かフラックス形式かが変わってくる。また、連続の式をそのまま用いるか、気圧方程式に変換するかの違いが生じうる。熱力学の式においては、予報変数として温位、温度等いくつかの物理量が選択肢として挙げられる。離散化においてはさらにバリエーションが広がり、時間積分法、移流スキーム、音波・重力波の扱い等のそれぞれで様々な手法が考案されている。

力学コアは第 1.1 節で述べた通り、数値予報モデルの屋台骨であり基盤である。これに物理過程を組み合わせて実際の数値予報を行うこととなるが、基盤が揺らいでいては正確な予測や安定運用ができない。そのため、力学コア単体として問題がないか十分なテストが必要である。

前述の通り、力学過程のスキームの選択には多くの任意性があり、その様々な手法の違いは、最終的には計算速度（実行速度)、予測精度、計算安定性等に反映される。従って、力学過程の開発者は数値予報モデルの利用方法に応じて最適と思われる手法を組み合わせて力学コアを作り上げていくこととなる。

採用するスキームを検討する段階では計算速度に関しては演算量や必要となるデータ通信量等を見積もることによって見当をつけることができる。また、予測精度や計算安定性については離散化することにより省略される項の精度（打ち切り誤差）を見積もることや安定性解析等の手法によって見当をつける。そして、これらの事前の検討に基づいて採用するスキームを決めた後は、実際に組み込んで期待した結果が得られているかを確認する。一方、計算速度については（将来の計算機における性能はともかく）実際に計測すれば簡単に評価することができる。計算精度も実際にテストを行って評価を行うが、いきなり現業数値予報と同様のテストにより評価を行うことは得策ではない。原 (2012a) が述べているように数値予報モデルの中にある様々な過程の相互作用が問題を複雑化するため、採用しようとするスキーム単体の特性を把握することが困難になるためである。また、開発工程を考えると大幅に力学コアを書き換える場合には物理過程の実装が力学過程の実装の後になることが多く（asuca の開発においてもそうであった)、実際には現業数値予報と比較できる段階に達するまでには時間がかかるという事情もある。そのため、力学過程の開発においては物理過程による時間変化率が無視できるような理想的な（仮想的な）条件を考え[2]、また場合によっては水物質の影響を考えない条件によるテストが行われてきた。

このようなテストは開発初期から行えるので、容易にスキームの特性を把握できる。テストに含まれる項は、移流項、気圧傾度力項、コリオリ力項、重力項、曲率項となり（コリオリ力項と曲率項は無視する場合もある)、評価がしやすいという利点がある。また、現象を理解するための理論的研究の結果として解析解が得られたもの（例えば山岳波）があり、現実とかけ離れた仮想的な条件によるテストではなく、そのような現象に対する数値予報モデルとしての性能評価にもなりうる。そこで、asuca の開発においては開発当初より理想実験による力学コアのテストを行ってきた。

さて、力学コアの理想実験による評価では次のような方法がある。

1. 解析解と比較する方法

2. 高分解能数値予報モデル等の結果をリファレンスとして比較する方法

まず、1 の手法について述べる。基礎方程式系の一般解を求めることは現実的でないと考えられるが、何らかの仮定をおくことにより、解析解を求めることができる場合がある。例えば、非線形項を含む方程式の一般解を求めることは困難であるが、線形化することにより一般解を求められる事がある。ここで、ある物理量 A, B に対して、$\partial(AB)/\partial x$ といった非線形項を含む場合に、(2.6.1) 式のように、物理量 A, B を基本場 $\overline{A}, \overline{B}$ とそこからの摂動 A', B' に分ける。

$$A = \overline{A} + A', \quad B = \overline{B} + B' \tag{2.6.1}$$

ここで、元の方程式系を満たすような基本場を考える。例えば、運動方程式、連続の式、温位の式、状態方程式から成る系を考えた場合、定常状態で風速は全てゼロかつ静力学平衡が成り立っている場を考えると、全ての予測式における時間変化率がゼロとなって定常状態を保つこととなり、基本場となりうる。ここでは、物理量 A, B の基本場が x 方向に一様である場合を考え[3]、また摂動が十分小さくそれらの積を無視することがで

[1] 石田 純一 (第 2.6.1 項、第 2.6.4 項、第 2.6.5 項、第 2.6.7 項、第 2.6.8 項、第 2.6.9 項)、河野 耕平 (第 2.6.2 項、第 2.6.6 項)、松林 健吾 (第 2.6.3 項)

[2] 乱流による輸送は無視しないで考えることもある。

[3] 線形化にあたっては、基本場は必ずしも x 方向に一様である必要はなく、x による微分が定数であれば良い。

きるとすると、(2.6.2) 式のように、

$$\frac{\partial}{\partial x}(AB) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{A}+A'\right)\left(\overline{B}+B'\right) \sim \overline{A}\frac{\partial B'}{\partial x} + \overline{B}\frac{\partial A'}{\partial x} \tag{2.6.2}$$

と、非線形項を線形化することができる。このように非線形方程式系を、ある仮定の下で線形な方程式系に近似することにより、解析解を求められる場合がある。このような場合、仮定が成り立つ範囲においては、解析解をいかに精度良く再現できるかが評価のポイントとなる。また、力学コア全体ではなくその一部のみをテストすることも可能である。例えば、移流スキームの評価においては、1 次元移流方程式を用い、流れの場を一様とすれば解析解は簡単に求められるので、それと比較すればよい。

次に、2 の手法について述べる。1 の手法は解析解といったいわば「正解」を基に評価するものであるが、適用できる条件は限られる。これと異なり、2 は柔軟な条件での評価が可能となる。結果を比較するためのリファレンスは、より高精度の数値計算によって得られると考える。時間積分や空間差分には様々な離散化手法があり、一般に、計算精度と実行速度はトレードオフの関係にある。そして、現業数値予報モデルにおいては、実行時間の制約から多少計算精度を犠牲にしても実行速度が速い手法を採用することが多い。このため、高次精度の離散化手法を用いた数値予報モデルの結果と比較・評価することが有効である。また、分解能は予測精度に大きな影響を与えるが、これも現業数値予報の観点からは計算時間の制約により十分な分解能を取れないこともありうる。そこで、高分解能モデルを実行して、結果を比較用のリファレンスとすることが考えられる。

また、両者いずれにおいても他の数値予報モデルの結果と比較することもできる。既に述べた通り、力学コアの出発点である基礎方程式系は同じであっても、離散化まで含めると様々なバリエーションが存在する。力学コアの構築にあたっては、数値予報モデルの利用目的についての観点が基礎にあり、それを具現化するために様々な手法から開発者が最適と考える手法を選択する。しかし、あらゆる手法を自ら実装することは非常に開発コストがかかる。その場合、異なるスキームを用いている他の数値予報モデルの結果は、自ら実装する前のレビューとして有効であろう。

次項から asuca の力学コアの開発において実施した理想実験の結果について述べる。第 2.6.2 項と第 2.6.3 項は 1 次元移流方程式を用いた理想実験である。第 2.6.4 項以降は乾燥大気の非静力学方程式系全てを含む理想実験である。第 2.6.4 項、第 2.6.5 項では方程式系を線形化して導出した解析解との比較を行い、第 2.6.6 項以降はリファレンスや他のモデルの結果との比較を行った。特に、asuca は JMA-NHM の後継モデルとして開発を進めているため、JMA-NHM との比較も行っている。

なお、asuca の力学コアの設定については、実験の条件に合わせて変更すべき設定（水平格子間隔、鉛直層間隔、積分時間間隔、上部スポンジ層の有無や強さ、下部境界条件として摩擦の有無、側面境界条件）を変更する以外は現業運用で想定する設定と同じに固定している。JMA-NHM の場合は、数値拡散の強さ、移流補正スキームの有無等の力学コアの設定が実験によって異なる場合がある。

2.6.2 一様流による 1 次元移流

(1) はじめに

本項では、流れの場を一様とした場合の 1 次元移流方程式を用いたテストについて述べる。このテストは移流スキームの基礎的な性質の把握によく用いられ、一例として JMA-NHM の移流スキームの開発においてもその結果が示されている (藤田 2003)。

第 2.1.1 項に述べた基礎方程式は、いずれも移流項を含んでいる。物理量 ϕ の 1 次元移流方程式は流れの速度を u として以下のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (\phi u)}{\partial x} = 0 \tag{2.6.3}$$

ここで、流れの場を一様 ($u(x) = c$ で一定) とした場合、その解析解は初期状態 $f(x)$ により $\phi = f(x - ct)$ で与えられ、これは ϕ が時間とともに形を変えずに速度 c で平行移動することを意味する。この解析解をリファレンスとして、第 2.4 節で導入した移流スキームが、第 2.3.2 項で述べた時間積分スキームとの組み合わせにおいて、期待される性質を満たしているかを確認することができる。解析解が得られる単純化した流れの問題において、移流スキームの基礎的な性質を把握しておくことは、より複雑な流れの問題に対する移流スキームの振る舞いを考える上での拠りどころとなる。

第 2.4 節で述べたように、asuca の移流スキームには、なるべく高精度を保ちつつ、単調性を保証するために Koren (1993) の流束制限関数を導入した。以下の実験では、解析解と比較して数値解の精度が保たれているか、単調性が保持されているかに着目して実験結果を見ていく。

(2) asuca と JMA-NHM のスキームの構成

ここでは、テストの対象とする asuca と JMA-NHM のスキームの構成について説明する。

asuca では時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、Koren (1993) の流束制限関数によって移流項を評価する。Koren (1993) の流束制限関数は、風上 3 次差分をベースとしつつ、局所的な場に応じて風上 1 次差分の単調性を利用することで、なるべく高精度を保ちつつ単調性を維持するように構築されている（第 2.4 節）。

JMA-NHM では時間積分にリープフロッグ法を用い、

Asselin のタイムフィルター[4] (Asselin 1972) を併用し、中央 4 次差分によって移流項を評価する。JMA-NHM の標準的な利用では単調性を満たすために Kato (1998) による移流補正を用いている。さらに、高波数成分を取り除くために、水平 4 次線形拡散[5]、非線形拡散[6] (Nakamura 1978) を併用している。ここで、Asselin のタイムフィルター、水平 4 次線形拡散、非線形拡散はそれぞれパラメータの設定が必要である。

(3) 実験設定

一定の移流速度で矩形波[7] を移流させるテストを行う。移流速度は $u = 20$ m/s で一定とする。格子間隔は LFM を想定して $\Delta x = 2$ km とし、x 方向に 200 格子を配置する。初期の分布として n 格子分の区間 $(n\Delta x)$ に矩形波の初期分布（例えば図 2.6.1 の赤線）を与え、周期境界条件を課して時間積分する。以下では、初期分布の矩形波の幅（スケール）と高さ（振幅）によってテストを 3 つに分けて、それぞれの着目点と設定を説明する。

解像できるスケールの移流テスト

一つ目の実験では、$20\Delta x$ の区間に矩形の初期分布を与える。一般に、精度のよい数値解を得るには、扱う対象の空間スケールに対して、ある程度細かく格子間隔を設定する必要がある。ここで与える $20\Delta x$ の幅は、格子間隔に対して十分に大きく、解像できる（精度のよい数値解が得られる）スケールと考えられる。asuca のスキームによる結果について、解析解と比較して数値解の精度が保たれているか、単調性が保持されているかを確認する。また、asuca の開発理念のひとつとして目指している人為的な数値拡散の排除が実現できているかについて JMA-NHM と比較する。

積分時間間隔は LFM を想定して、asuca では $\Delta t = 16$ 秒、JMA-NHM では $\Delta t = 8$ 秒とした。

まず、asuca で採用するスキームである、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、Koren (1993) の流束制限関数によって移流項を評価する実験を行う。また、Koren (1993) の流束制限関数に対する比較のため、移流項の評価に風上 1 次差分および風上 3 次差分を用いた実験を併せて行う。ここで、各実験の説明の先頭括弧内にはその実験名を記述する（以下、同様）。

- asuca
  - (A1) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: Koren (1993) の流束制限関数
- asuca との比較用
  - (AC1) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: 風上 1 次差分
  - (AC2) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: 風上 3 次差分

JMA-NHM については、(2) で説明した JMA-NHM で用いているそれぞれの手法の効果も見るため、以下の組み合わせで実験を行う。

- JMA-NHM
  - (N1) 時間積分：リープフロッグ法、移流項：中央 4 次差分
  - (N2) 実験 N1 に Asselin のタイムフィルターを併用
  - (N3) 実験 N2 に移流補正を併用
  - (N4) 実験 N3 に水平 4 次線形拡散を併用
  - (N5) 実験 N4 に非線形拡散を併用

ここで、Asselin のタイムフィルター、水平 4 次線形拡散、非線形拡散のそれぞれパラメータはいずれも LFM と同じ設定とする。

解像できるスケールの移流テスト（対象とする振幅を変えるテスト）

二つ目の実験では、$20\Delta x$ の区間に矩形の初期分布を与えるが、その高さ（振幅）を 10 倍に設定する。この実験を通じて、JMA-NHM の非線形拡散の特徴である、同じパラメータ設定でも非線形拡散は物理量分布の振幅の大きさによって拡散のかかり方が異なる[8]（大きな振幅の分布に対してより強い拡散がかかる）ことの影響を考察する。

ここでは、asuca と JMA-NHM について

- 初期値の矩形領域の高さを 10 倍にするテスト
  - (A_10) スキームは実験 A1 に同じ
  - (N_10) スキームおよびパラメータ設定は実験 N5 に同じ

を行う。

対象とするスケールを変えるテスト

三つ目の実験では、初期分布の矩形の幅を変えて実験を行う。ここでは、asuca の移流スキームが、どの程度のスケールの現象に対して精度を保てるか、あるいは単調性を保てるかを確認する。また、精度を保てないスケールに対しては、計算安定性の観点から誤差が

---

[4] Asselin のタイムフィルター (Asselin 1972) は以下の式で表される。

$$\phi(t) = \phi(t) + 0.5\nu\left\{\phi(t-\Delta t) - 2\phi(t) + \phi(t+\Delta t)\right\}$$

[5] 水平 4 次線形拡散は以下の式で表される。

$$\mathrm{D}_{2\mathrm{D}} = \frac{1}{16 m_{2\mathrm{D}} \Delta t}\left\{(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right\}$$

[6] 非線形拡散 (Nakamura 1978) は以下の式で表される。

$$\mathrm{D}_{\mathrm{NL}} = \frac{1}{8 m_{\mathrm{NL}} \Delta t}\left\{(\Delta x)^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right\}$$

[7] 矩形波は単純な形でありながら様々な波長のスペクトルを持っており、波長に依存するような数値解の誤差が現れやすいため、このようなテストでの精度の確認に適している。

[8] 物理要素によって拡散のパラメータ設定を変えることはできる。

表 2.6.1 実験名と設定の一覧表

解像できるスケールの移流テスト 矩形波の幅：20 Δx				
テストの対象	実験名	時間積分法	移流スキーム	数値拡散
asuca	A1	3段階ルンゲクッタ法	Koren(1993)のスキーム	なし
asucaの比較用	AC1		風上1次差分スキーム	
	AC2		風上3次差分スキーム	
JMA-NHM	N1	リープフロッグ法	中央4次差分スキーム	なし
	N2	リープフロッグ法 + Asselinのタイムフィルター		
	N3		中央4次差分スキーム + 移流補正	
	N4			水平4次線形拡散
	N5			水平4次線形拡散 + 非線形拡散
解像できるスケールの移流テスト（対象とする振幅を変えるテスト） 矩形波の幅：20 Δx、ただし、矩形の高さを10倍とする				
テストの対象	実験名	時間積分法	移流スキーム	数値拡散
asuca	A_10	3段階ルンゲクッタ法	Koren(1993)のスキーム	なし
JMA-NHM	N_10	リープフロッグ法 + Asselinのタイムフィルター	中央4次差分スキーム + 移流補正	水平4次線形拡散 + 非線形拡散
対象とするスケールを変えるテスト 矩形波の幅：32 Δx, 16 Δx, 12 Δx, 8 Δx, 4 Δx, 2 Δx				
テストの対象	実験名	時間積分法	移流スキーム	数値拡散
asuca	A_Δ	3段階ルンゲクッタ法	Koren(1993)のスキーム	なし
asucaの比較用	AC_Δ		中央4次差分スキーム	水平4次線形拡散

成長しないことが望ましく、その点を確認する。

この実験では、$32\Delta x, 16\Delta x, 12\Delta x, 8\Delta x, 4\Delta x, 2\Delta x$ の矩形を初期値として与える。積分時間間隔は一つ目の実験と同じ $\Delta t = 16$ 秒である。

asuca のスキームおよびその比較のため、以下の実験を行う。

- asuca
  - (A_Δ) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: Koren (1993) の流束制限関数（スキームは実験 A1 に同じ）
- asuca との比較用
  - (AC_Δ) 時間積分: 3 段階ルンゲクッタ法、移流項: 中央 4 次差分、に水平 4 次線形拡散を併用

以上のここまで説明した実験について、実験名とその設定を表 2.6.1 にまとめるので適宜参照いただきたい。

(4) 解像できるスケールの移流テスト

asuca のテスト結果を図 2.6.1 に示す。実験 A1 の Koren (1993) の流束制限関数による数値解（緑線）は、実験 AC1 の風上 1 次差分による数値解（青線）に比較して解析解からの減衰が小さい。また、実験 AC2 の風上 3 次差分による数値解（紫色線）に見られるような元の分布に比較して上下にはみ出すところ（オーバーシュート、アンダーシュート）が見られず、単調性が保持されており良好な結果である。

次に、JMA-NHM のテスト結果について、図 2.6.2 に実験 N1 （緑線）、実験 N2（青線）の結果を示し、図 2.6.3 に実験 N3（緑線）、実験 N4（青線）、実験 N5（紫色線）の結果を示す。

移流補正を加えた実験 N3 の結果（図 2.6.3 の緑線）から分かるように、JMA-NHM ではこの移流補正が単調性の維持に大きく寄与している。この図で実験 N3 の結果の難点をあげれば対称性がやや崩れている点である。また、移流補正をした場合、保存性が厳密には成り立たたず、この実験では総量が 1%程度増加した。水平 4 次線形拡散、非線形拡散を併用した場合の実験 N4, N5 の結果（それぞれ図 2.6.3 の青線、紫色線）は、上流側と下流側の対称性も崩れていない。

JMA-NHM では、実験 N5（図 2.6.3 の紫色線）で良好な結果を得ることができたが、Asselin のタイムフィルター、水平 4 次線形拡散、非線形拡散について、それぞれのパラメータの設定を必要とした。一方、asuca では、実験 A1 の結果（図 2.6.1 の緑線）を得るためにパラメータを設定する必要はなく、人為的な数値拡散を用いなくても良好な結果を得ることができた。

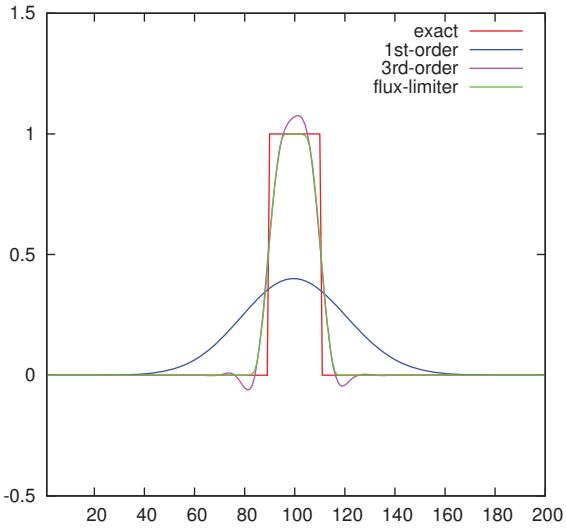

図 2.6.1　1 次元移流方程式の数値解。周期境界条件で 2 周期後の結果。解析解 (exact) を赤線で示した。時間積分法は 3 段階ルンゲクッタ法による。Koren (1993) の流束制限関数（実験 A1、緑線）、風上 1 次差分（実験 AC1、青線）、風上 3 次差分（実験 AC2、紫色線）による計算結果を示す。

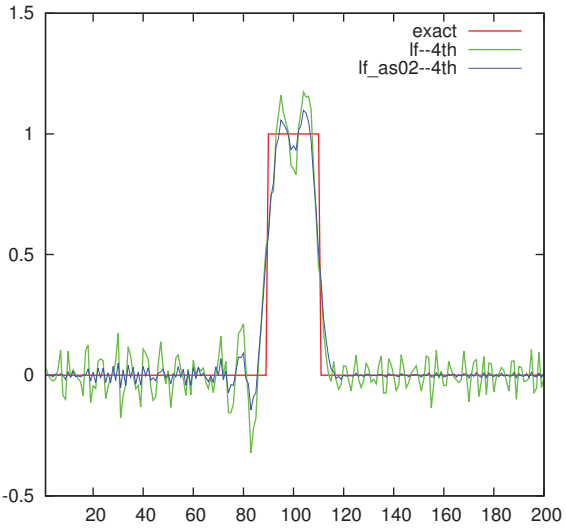

図 2.6.2　図 2.6.1 と同じ。ただし、時間積分法はリープフロッグ法により、中央 4 次差分（実験 N1、緑線）、Asselin のタイムフィルターを適用した結果（実験 N2、青線）。

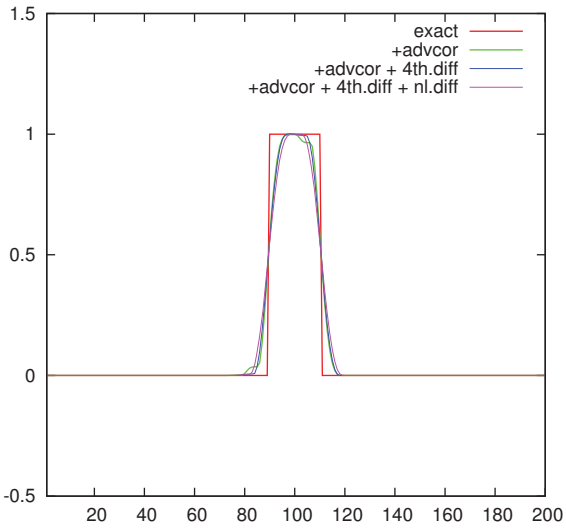

図 2.6.3　図 2.6.2 のつづき。移流補正（実験 N3、緑線）、水平 4 次線形拡散（実験 N4、青線）、非線形拡散（実験 N5、紫色線）を加えた結果。

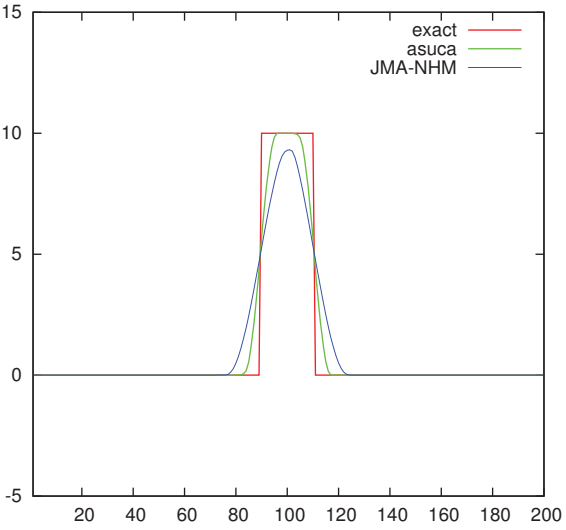

図 2.6.4　1 次元移流方程式の数値解。図 2.6.3 等と比較して、初期値の高さ（振幅）を 10 倍にした。周期境界条件で 2 周期後の結果。解析解 (exact) を赤線で示した。asuca のスキーム（実験 A_10、緑線）、JMA-NHM のスキーム（実験 N_10、青線）の計算結果。

(5)　解像できる空間スケールの移流テスト（対象とする振幅を変えるテスト）

ここでは、これまで (4) に述べた実験（実験 N5、図 2.6.3 等）に比べて初期値の矩形領域の高さを 10 倍にする実験 A_10 および実験 N_10 の結果について述べる。この実験結果を図 2.6.4 に示す。実験 N_10 と実験 N5 は同じパラメータ設定であるが、図 2.6.4 の青線で示した実験 N_10 の JMA-NHM の計算結果は、実験 N5 の結果 (図 2.6.3 の紫色線) に比較して、より強く数値拡散がかかり、減衰が大きくなってしまっている。一方、図 2.6.4 に緑線で示した実験 A_10 の asuca の計算結果は、実験 A1 の結果（図 2.6.1 の緑線）と比較して分かるように、波の振幅の大きさによって元の解に対する結果が変わるという性質はない。

(6)　対象とするスケールを変えるテスト

ここでは初期に与える矩形の空間スケール（幅）を変えて、それに対する移流スキームの振る舞いを確認する。矩形の幅は実験設定で述べたとおり、$32\Delta x, 16\Delta x, 12\Delta x, 8\Delta x, 4\Delta x, 2\Delta x$ とする。

図 2.6.5 は、asuca と同じく、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、Koren (1993) の流束制限関数によって移流項を評価した結果である（実験 A_Δ)。上段

の左から幅が $32\Delta x$, $16\Delta x$, $12\Delta x$、下段の左から $8\Delta x$, $4\Delta x$, $2\Delta x$ の矩形を初期値として与えた実験の結果を示している。図 2.6.5 の結果は、上段の $12\Delta x$ 以上のスケールの矩形については単調性を維持しつつ減衰が小さい。一方、下段に示した、それ以下のスケールでは数値解の減衰が大きくなっており、$4\Delta x$ の波では解析解の半分程度まで減衰し、$2\Delta x$ の波ではさらに減衰している。

図 2.6.6 に上記の実験 A_Δ の結果を考える上での対比として、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を用い、移流項を中央 4 次差分で評価して適当な水平 4 次線形拡散をかけた結果を示す（実験 AC_Δ）。図 2.6.6 を見ると、どのスケールの波にもアンダーシュートが見られ、上段の $12\Delta x$ 以上である大きなスケールの矩形についても小さなスケールのオーバーシュート、アンダーシュートが見られるなど、ノイズが生じてしまっている。これは、中央 4 次差分の性質から想定される結果である。$4\Delta x$, $2\Delta x$ の波についてもノイズが見られるが、矩形波のピーク値という観点では、図 2.6.5 の結果よりも減衰が小さいように見える。しかし、実験 AC_Δ（図 2.6.6）の $4\Delta x$, $2\Delta x$ の減衰が小さい結果は、オーバーシュートの性質が適当な数値拡散によって抑えられて、極値としては偶然に元の値に近い結果となったためと考えられる。

$2\Delta x$ の波は、格子点で現象を波として表現するときの限界となるスケールであり、一般に数値拡散はこの程度のスケールの波をノイズと捉えて振幅を抑えるよう設計されている。テスト A_Δ の結果（図 2.6.5）のように asuca ではこのスケールの波をきちんと減衰させる性質があるため別途人為的な数値拡散を加える必要性がない。

(7) まとめ

一様流による 1 次元移流によるテストにおいて asuca の時間積分スキームと移流スキームの特徴を確認した。

「解像できるスケールの移流テスト」（20 格子幅の矩形の物理量分布を移流させるテスト）では、asuca は任意性のあるパラメータを用いないスキームで単調性を維持しつつ解析解に近い計算結果を得た。

「対象とする振幅を変えるテスト」（矩形の物理量分布の高さを 10 倍にするテスト）では、JMA-NHM では非線形拡散を併用することによって、解の絶対値の大きさによって結果の形状が変わる性質があるのに対し、asuca はそのような性質は持たないことが分かった。

「対象とするスケールを変えるテスト」（物理量分布の矩形の幅を小さくしていくテスト）では、asuca で選択したスキームは、解像されるべきスケールの波を良く解像し、一方で解像できないスケールの波は減衰させる性質であることを確認した。このことは、人為的な数値拡散を排除するという asuca の開発理念（第 1.4 節）を実現できていることを意味するものと考えている。

2.6.3 水物質落下の 1 次元テスト

(1) はじめに

asuca では、水物質落下の計算方法を組み込むにあたり、JMA-NHM で採用されている Kato (1995) によるボックスラグランジアンスキームと、短い時間間隔で繰り返し積分を行う time-split 法と Koren (1993) の流束制限関数を用いる方法を比較し、その結果精度と安定性に優れる後者を採用している。また、その後も計算効率改善のために他スキームとの比較を行なっている。

この項では、まず水物質落下計算の特徴について述べ、asuca における計算方法としてこれまでに検討を行った 5 種類の手法について説明する。そして、1 次元テストを元に比較した結果を紹介する。

(2) 降水落下計算の特徴

まず、第 2.3.4 項で述べたように、水物質の落下を含めた鉛直移流は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha\right) + \left\{\frac{1}{J}\rho_\alpha(W + W_{t_\alpha})\right\}_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = R_{q\alpha} \tag{2.6.4}$$

ここで、ρ_α は水物質の密度、W は大気の鉛直速度、$R_{q\alpha}$ は水平移流や摩擦などその他の項にあたる。W_{t_α} は大気に対する水物質の相対的な落下速度であり、混合比から診断的に計算される (山田 2003; 原 2012b)。移流速度が予報変数となっていた第 2.4 節と異なり、移流速度は移流対象によって診断的に求めている。

(2.6.4) 式の鉛直移流項の計算においては、第 2.4.1 項で述べた移流スキームと同様に、計算効率がよく、安定性が高く、保存性を満たし、高精度で必要メモリ量の少ないスキームが望ましいが、残念ながら全てを満たす手法は見つかっていない。このため、水物質の落下計算に必要な要件を勘案した上でスキームを選択する必要がある。

水物質の落下計算では、移流スキームと異なり次の点にも注意が必要となる。一般に、モデルの鉛直層は下層ほど層間隔が細かくなり、最下層では数 10 m となる。一方、W_{t_α} は混合比が大きくなると 10 m/s を越えることがあるため、CFL 条件を満たすように安定に計算を行うには積分時間間隔を小さくする必要がある。asuca で LFM を実行する場合、現状では積分時間間隔 $\Delta t = 50/3 \simeq 16.67$ 秒としているが、特段の処理を行わない場合は、安定に計算を行うために、例えば積分時間間隔を $\Delta t = 4$ 秒以下にする必要がある [9] 。このように、水物質の落下速度に合わせて全体の積分時間間隔を決めると、積分時間間隔を小さくする必要

[9] 鉛直層間隔は山のないところの最下層で 40 m であり、水物質の落下速度を最大 10 m/s として考えた場合。

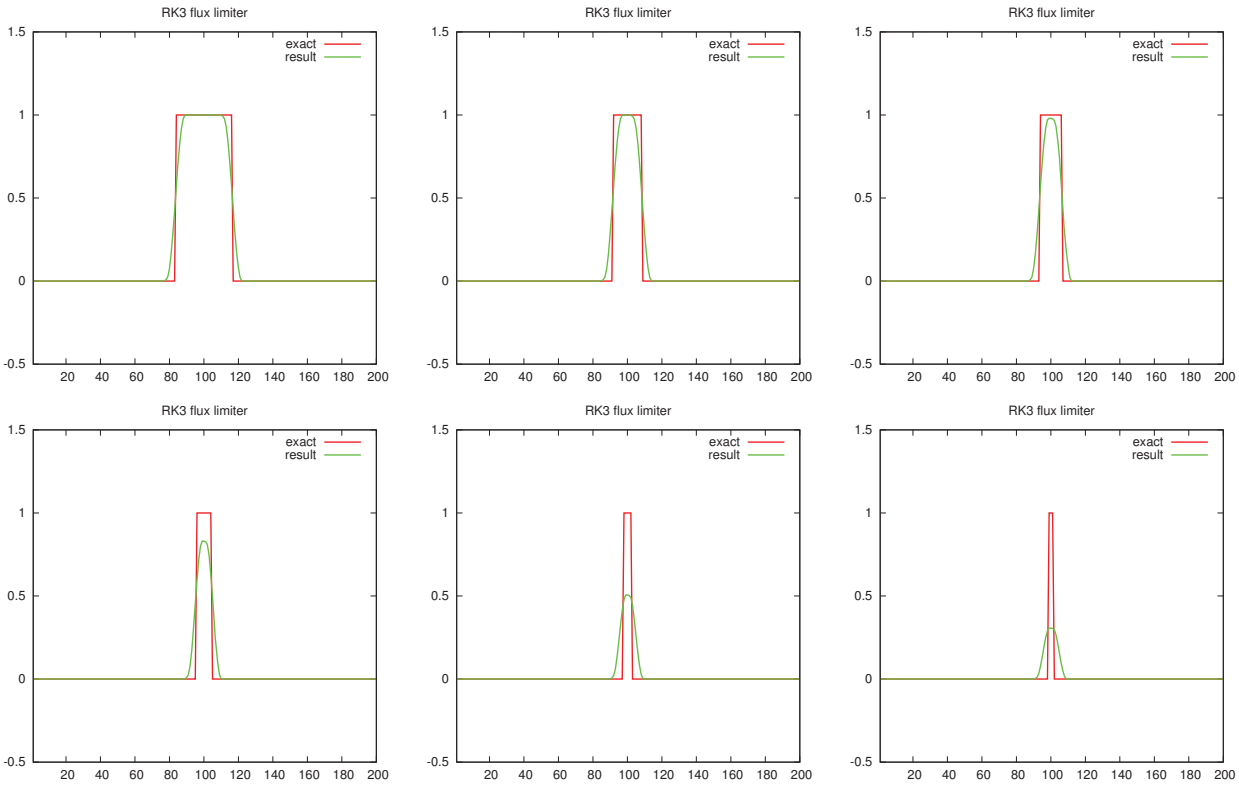

図 2.6.5　対象スケールによる移流スキームの振る舞い。周期境界条件で 2 周期後の結果。Koren (1993) の流束制限関数、時間積分法に 3 段階ルンゲクッタ法を用いた（実験 A_Δ）。（上段）左から $32\Delta x$, $16\Delta x$, $12\Delta x$、（下段）左から $8\Delta x$, $4\Delta x$, $2\Delta x$ の矩形を初期値として与えた結果。

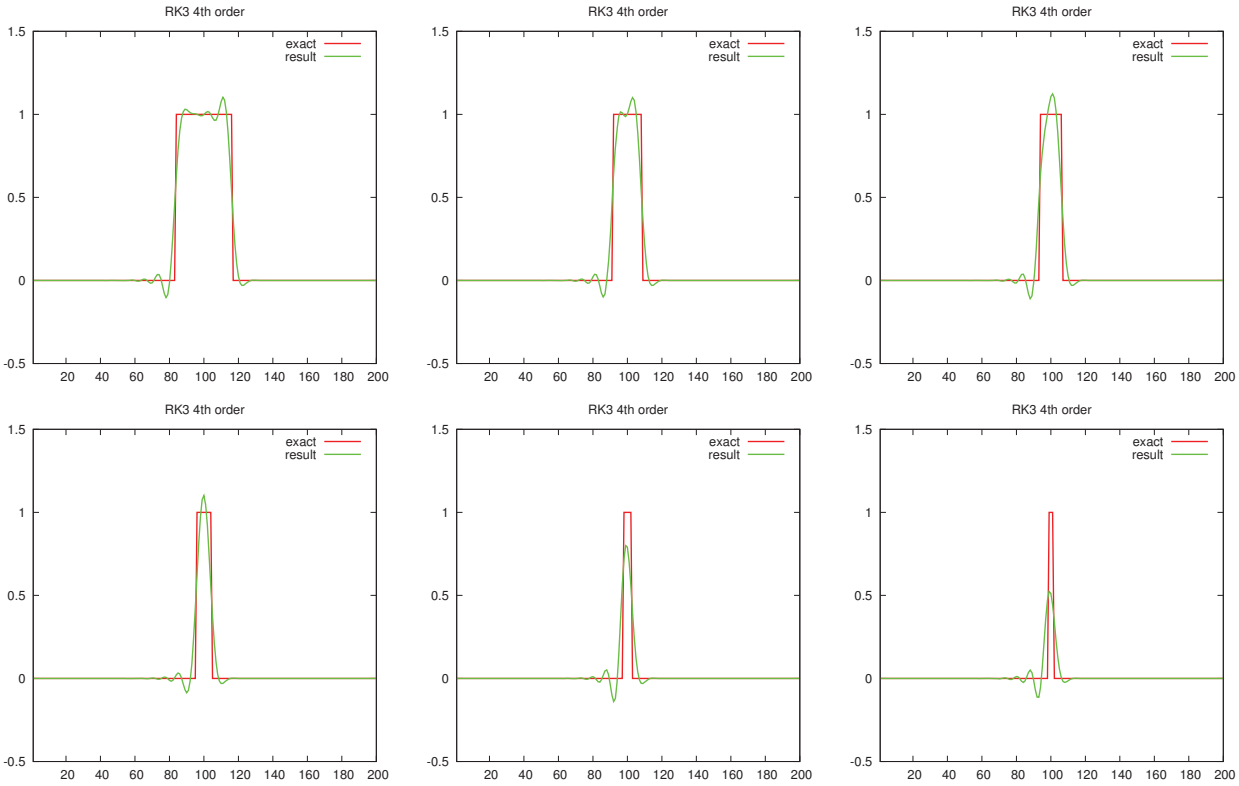

図 2.6.6　図 2.6.5 に同じ。ただし、中央 4 次差分に 4 次水平拡散を併用（実験 AC_Δ）。

があり、非常に計算時間がかかるため、工夫が必要になる。また、移流スキーム同様に水物質の質量が負の値とならないようにする必要がある。この要請は質量の性質から自明であるが、単調性を保証しないスキームでは負の値が生じうる[10]ため、負値補正などの処理を行う必要がある。

(3) これまでに検討したスキーム

移流スキームは、オイラー的に考える方法とラグランジュ的に考える方法の2つに大きく分けることができる。オイラー的に考える方法では、第2.4節のように、あるセル境界のフラックスを求め、流入・流出を考える。

ラグランジュ的に考える手法では、積分時間間隔の中で、あるセル内の水物質がどこに到達するかを計算する (到達点探索)、あるいはあるセルに到達する水物質はどこから来たものかを計算する (上流点探索)。この手法では、CFL条件による制約を受けないため大きなクーラン数でも安定して計算を行うことができるものの、積分時間間隔内で水物質及び落下速度は一定であるとの仮定に基づいているため、クーラン数が大きくなるに従って精度が低下する点に注意が必要となる。また、Smolarkiewicz and Pudykiewicz (1992) で示されているように、セミラグランジュ法はCFL条件による制限を受けないものの、計算安定性を保つために次の条件を満たす必要がある。

$$\frac{(W+W_{t_\alpha})_{k+\frac{1}{2}}-(W+W_{t_\alpha})_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta z_k}\Delta t \leq 1 \quad (2.6.5)$$

ただし、Δz_k は、k 層目のセルの鉛直層間隔を表す。この条件をLipschitz条件といい、積分する時間の中であるセルを上流点とする水物質を別のセルを上流点とする水物質が追い越してはいけないことを意味する。このため、セミラグランジュ法を用いる場合でも、Lipschitz条件を満たすように短い積分時間間隔に分割して扱う必要がある。また、水物質の落下計算にセミラグランジュ法を用い、大気の鉛直移流と分けて計算を行う場合は、大気の上昇流により水物質が同じ高度にとどまるような状況になると計算安定性に問題が生じうる点に注意が必要となる。

これまでに、オイラー的な手法としては、

- time-split 法と Koren (1993) を用い、落下速度を線形補間する方法 (以下、asuca の方法と呼ぶ。)

を検討し、ラグランジュ的な手法としては、

- ボックスラグランジアンスキーム (Kato 1995)
- PPM[11], PRM[12] を用いたセミラグランジュ法
- minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法

の検討を行った。以下に、これらのスキームの概要について説明する。

asuca の方法

asuca では、鉛直方向の移流に関する項を安定に計算できるように短い積分時間間隔に分割して扱う time-split 法を用いている。水物質の移流計算には、他の移流計算と同様に Koren (1993) の流束制限関数を用いる。

移流スキームとしては基本的に3次精度風上差分 (ただし、水物質分布が急峻な場では1次精度) を用いることになるため、精度が高いことが利点として挙げられる。しかし、降水により積分時間間隔の分割が多く起こるような状況では計算量が多くなり、降水の状況に応じて実行時間が変わりうる点に注意が必要となる。

ボックスラグランジアンスキーム (Kato 1995)

このスキームは JMA-NHM で採用している手法である。ボックスラグランジアンスキームでは、まず各セル内における水物質と落下速度が平均値により一定であると仮定する。そして、図2.6.7のように、Δt の間、落下速度は一定のまま水物質が落下すると考える。すなわち、箱状の水物質が落下するのをラグランジュ的に計算するイメージであり、それがこのスキームの名前の由来となっている。そして、Δt 秒後に落下した水物質を合計することで、Δt 秒後の水物質の分布を求める。

ボックスラグランジアンスキームはセル内の水物質を一様に仮定しているため一次精度であるものの、ラグランジュ的に扱うため積分時間間隔を長くとることができる。ただし、Kato (1995) でも述べられているクーラン数があまり大きくなると安定に計算が行えない点に注意する必要がある。また、水物質の落下と上昇流による移流を別々に計算することになるため、計算安定性に問題が生じうる。

PPM, PRM によるセミラグランジュ法

水物質の落下計算のように、落下速度が大きくCFL条件が厳しい場合は、セミラグランジュ法を用いることで効率的に計算を行える場合がある。セミラグランジュ法では、セル境界を通過する水物質の上流点を探索し、その上流点からセル境界までの水物質の量の積算値を計算することによってフラックスを求める。ただし、水物質は各セルの平均値として与えられているため、何らかの方法で上流点からセル境界までの水物質分布を求める必要がある。セミラグランジュ法では、このセル間の水物質の分布を決める補間関数に何を用いるかによって精度が左右される。ただし、高精度な補間関数では単調性が保たれずに新たな極値が生じたり、負値が生じる場合があるため、これを抑えるために補正を行うスキームが提案されている。この高精度かつ単調性を保証する補間関数の計算、及び上流点探索には計算コストがかかり、実行時間とのトレードオ

[10] 例えば、差分法により新たな極値が生じることによるものや、セミラグランジュ法の補間関数が0以下となることによるものが考えられる。
[11] Piecewise Parabolic Method の略
[12] Piecewise Rational Method の略

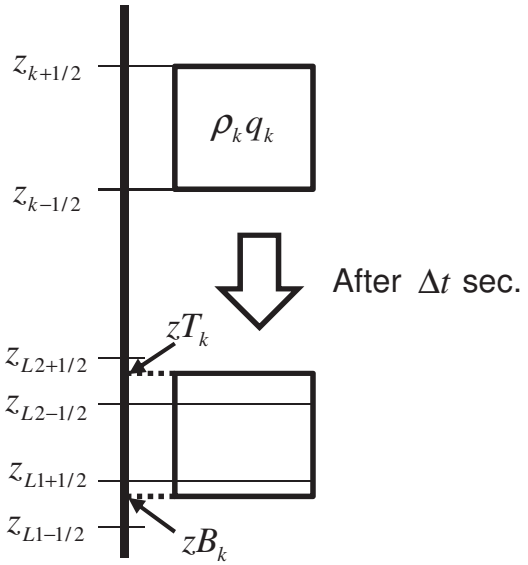

図 2.6.7　ボックスラグランジアンスキームの概念図。Kato (1995) を元に作成。z_k にある水物質が、セル内一定の速度で箱状に落下し、Δt 秒後の水物質の下端が $z_{L1+1/2}$ と $z_{L1-1/2}$ の間の zB_k に、上端が $z_{L2+1/2}$ と $z_{L2-1/2}$ の間の zT_k に到達することを表す。

フとなる。水物質の落下計算に必要な精度を満たしつつ、なるべく高速な補間関数が求められる。

これまでに、高精度の補間関数として Colella and Woodward (1984) による PPM と、Xiao and Peng (2004) による PRM について検討を行った。PPM は、補間関数に 2 次曲線を用い、この関数に対して急勾配な場合の線形化、単調性のための処理を施すことで高精度かつ単調性を得ようとする方法である。PRM は、PPM を元にしている手法で、補間関数に有理関数を用いることで単調性を保つための処理を少なくすることが可能となっている。

これらの方法の利点として、高精度な補間関数を用いるために精度が高いこと、単調性を保証するスキームであることが挙げられる。しかし、上流点探索と高精度補間関数の計算に時間がかかること、水物質の落下の計算と大気の上昇流による移流を別々に計算するため、安定性が損なわれる点が欠点として挙げられる。

minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法

この手法は、前述のスキームに対する検討を踏まえてさらに高速なスキームを得るために、現在東京工業大学と共同で開発しているものである。

この方法では、補間関数として 3 次精度と 1 次精度の関数を考える [13]。第 2.4 節で述べたように、3 次精度の補間関数は精度は高いが単調性が維持できないのに対し、1 次精度の補間関数は精度は低く減衰性があるものの、単調性が維持できる特徴がある。minmod 流束制限関数を使うことで、これらの補間関数を水物質の分布によって切り替え、単調性を維持しつつなるべく高精度の計算を行うものである。minmod 流束制限関数を図 2.6.8 に示す。この方法は補間関数が PPM や PRM に比べ非常に単純であるため、流束制限関数を計算する必要はあるものの、計算コストは低い。ただし、このスキームでは補間関数の計算が単純な反面、補間した値が負値となることがありうる。これにより水物質の無いセルからフラックスの流出が計算される状況がありうるため、フラックス調整などの処理が必要となる。

[13] 3 次精度補間の場合は 2 次曲線による補間、1 次精度補間の場合はセルの値そのものとなる。

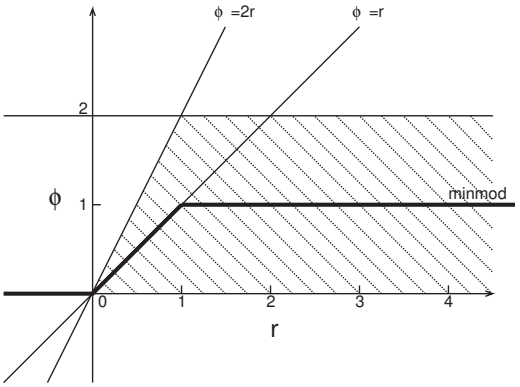

図 2.6.8　minmod 流束制限関数。図 2.4.2 に同じ。

(4)　1 次元テストの設定

前述のスキームを比較する際に用いた 1 次元テストについて説明する。

水物質の鉛直移流のみの振る舞いを調べるため、(2.6.4) 式において、簡単のために大気の鉛直速度 $W = 0$ として、水物質の落下のみを考える。この時、解くべき方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{J}\rho_\alpha\right) + \left(\frac{1}{J}\rho_\alpha W_{t_\alpha}\right)_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = 0 \qquad (2.6.6)$$

となる。

1 次元テストとして、Kato (1995) による実験を行う。これは、図 2.6.9 の赤線のような混合比分布の水物質をおき、時間積分を行うにしたがってどのように分布が変化するかを調べるものである。

なお、鉛直層設定は単純化して一定 (70 m 間隔) とし、$\Delta t = 30$ 秒であるとする。この設定で実験を行うと、落下速度の大きい所ではクーラン数が 1 を超える格子が生じるので、計算安定性に関しても調べることができる。理想的な水物質の分布の時間変化を図 2.6.9 に示す。これは、長い計算時間をかけて、高精度スキー

ム[14] により非常に短い積分時間間隔で計算した場合の結果である。このように、新たな極値が現れず、減衰が生じていない分布となることが望ましい。

この理想分布と比較し、積分後の分布が図 2.6.9 と大きく違わないかによって精度を確認する。また新たな極値が生じていないかにより、単調性を確認する。実行時間については、この 1 次元テストを SR16000M1 上で 10000 回繰り返し行った際の実行時間を元に比較した。ただし、このテストは現業時に用いる層間隔や積分時間間隔とは異なるため、単純に実行時間の比較はできない点に注意が必要である[15]。

以下では、この 1 次元テストを用いて各スキームを比較する。

(5) 比較結果

各スキームによる 1 次元テストの結果を図 2.6.10 から図 2.6.14 に、各スキームの結果及び実行時間を表 2.6.2 にまとめる。

以下、各スキームの特徴について詳しく見る。

asuca の方法

図 2.6.10 を見ると、分布の形状は理想的な分布と概ね一致しているものの、水物質の極大値が時間が進むに連れて増加しており、単調性が保たれていないことが分かる。これは、セル境界における落下速度の計算方法に起因する。

第 2.2.3 項で述べたように、有限体積法では水物質の混合比は各セルの平均値としてセル中心に定義される。第 2.4 節で示した移流計算ではセル境界に風速が定義されていたのに対し、水物質の落下速度は水物質の混合比から診断され、セル中心で診断されることになるため、何らかの方法でセル境界の落下速度を求める必要がある。この方法では、セル境界における落下速度を単純内挿により求めているが、これは 2 次精度の補間にあたる。Godunov の定理により、1 次以上のスキームには単調性は保証されない。このため、第 2.4 節で求めた移流スキームを降水落下の移流計算に用いても単調性を保つことはできない。もしセル境界における落下速度の計算に、後述する PPM のような単調性のある高精度補間を用いれば、図 2.6.10 のような数値振動は生じなくなるが、計算コストが増加してしまう。

また、第 2.3.4 項で示したように、この方法ではある鉛直カラム内全体のクーラン数を調べ、その中でクーラン数が条件を破らないように短い積分時間間隔を決める。分割した短い時間積分では、第 2.3.2 項で述べた Wicker and Skamarock (2002) による 3 段階ルンゲクッタ法による計算を行う。このため、分割した短い時間積分内で 3 ステップの計算を行うため、降水により短い積分時間間隔への分割が多く起こる状況では実行時間が長くなる。これは、日々決められた時刻までに実行を終える必要がある現業モデルとしては、運用上問題となりうる。

しかし、この方法では水物質の落下と上昇流を併せて扱うことができるため、後述するボックスラグランジアンスキームやセミラグランジュ法より安定性が高い。また、その他の予報変数の移流計算と同じスキームであるため、予報変数間で不整合が起きにくいといった点も利点として挙げられる。

現在、asuca では安定性と精度、及びその他の移流計算との整合性を考慮し、このスキームを採用している。これまでに特に目立った問題は生じていないものの、ここで示したように実行時間と単調性の面で問題が生じうるため、今後別のスキームへの変更を検討する必要があるだろう。

ボックスラグランジアンスキーム

図 2.6.11 の 1 次元テストの結果をみると、特に目立った新たな極値は生じていないものの、各予想時刻において上部で分布が歪んでいる様子がみえる。

ボックスラグランジアンスキームでは、セル内の水物質がその平均値で一定であるとしており、これは 1 次精度の補間にほかならない。また、本来はその時間内で水物質の分布は絶えず変化し、落下速度も変化しているはずである。水物質の混合比は小さければ小さいほど落下速度は小さいと診断されるため、図 2.6.9 のように時間が経った後も上層に水物質が残った分布となるはずである。しかしながらボックスラグランジアンスキームでは積分時間間隔内は落下速度一定として計算しているために分布が広がらず、初期の分布を保ったまま落ちてくるために歪んだ分布となる。

このようにボックスラグランジアンスキームはクーラン数が 1 より大きい状況でも動作するものの、精度が低下する。実際に、初期の水物質分布を変えてテストを行った際にはノイズが生じることがあった。また、1 次精度であるため、逆に積分時間間隔が短い場合は解の拡散性が大きく、減衰が大きい結果となる (図略)。

ボックスラグランジアンスキームを用いる場合は、水物質の落下計算と鉛直風による移流を分けて計算することになるため、計算安定性の面でも問題となりうる。

PPM, PRM によるセミラグランジュ法

図 2.6.12、図 2.6.13 を見ると、PPM と PRM で共に弱い減衰が生じているが、補間関数に単調性を保つための処理を行っているため、新たな極値は生じておらず、単調性は保たれている。しかし、PPM, PRM によるセミラグランジュ法は、他のラグランジュ的な手法に比べて比較的実行時間が長い (表 2.6.2)。これは、いずれの方法も補間関数が複雑であるがゆえに計算に時間がかかることを表している。このように、これらの

[14] 移流スキームには Koren (1993) を用い、セル境界の落下速度計算に PPM を用いた。

[15] セミラグランジュ的な手法では、格子間隔が可変の場合は到達点または上流点の格子番号を求める処理が複雑になるため、さらに計算時間を要する。

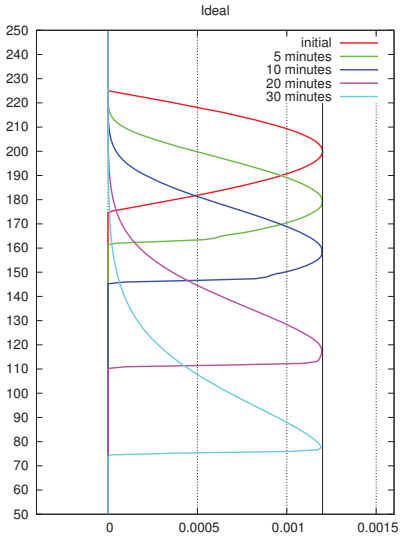

図 2.6.9　水物質落下の 1 次元テストの理想的な結果。各線が予想時刻別の水物質の混合比の分布を表す。縦軸は鉛直方向の格子番号で、格子番号が大きいほど高度が高い。横軸は混合比 [kg/kg] を表す。

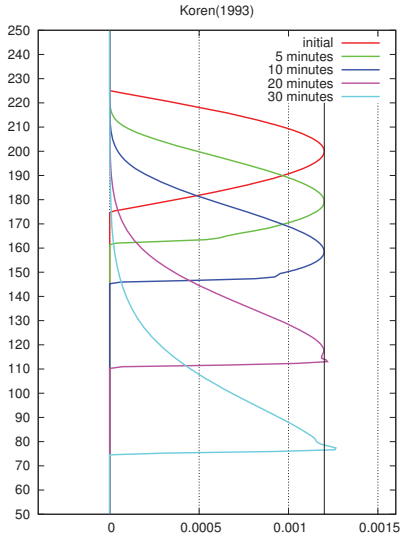

図 2.6.10　Koren (1993) による 1 次元モデルの結果。グラフは図 2.6.9 に同じ。

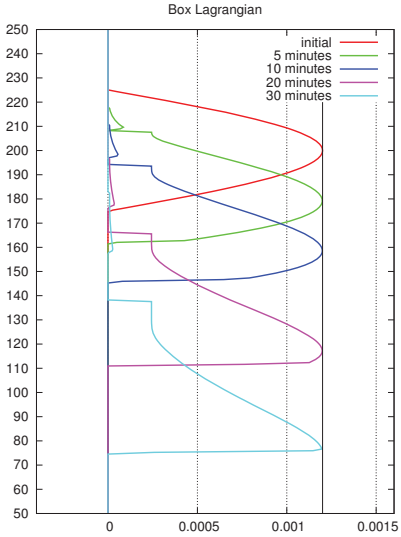

図 2.6.11　図 2.6.9 に同じ。ただし、ボックスラグランジアンスキーム (Kato 1995) による。

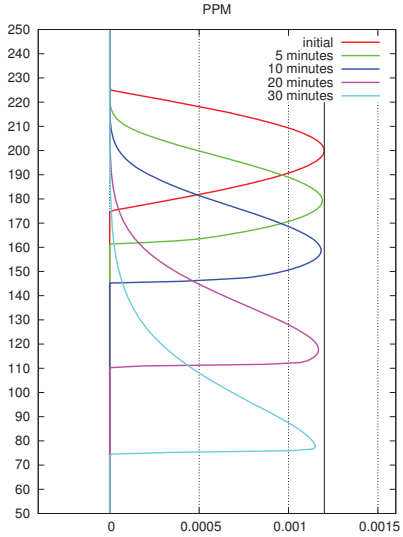

図 2.6.12　図 2.6.9 に同じ。ただし、セミラグランジュ法で補間関数は PPM(Colella and Woodward 1984) による。

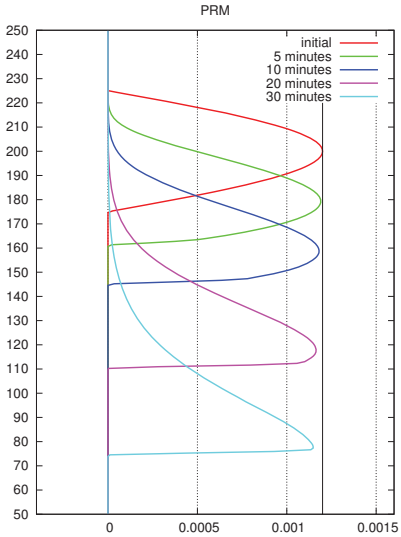

図 2.6.13　図 2.6.9 に同じ。ただし、セミラグランジュ法で補間関数は PRM(Xiao and Peng 2004) による。

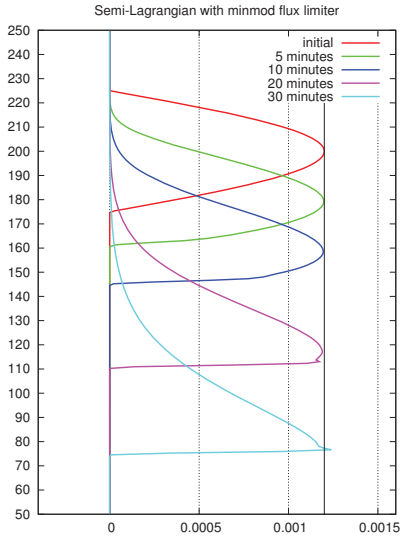

図 2.6.14　図 2.6.9 に同じ。ただし、minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法による。

表 2.6.2　1 次元テストによる各スキームの特性。実行時間は SR16000M1 上で 1 次元テストを 10000 回繰り返すのに要した時間。ただし、現業時に用いる鉛直層の設定とは異なるため、単純な比較ができないことに注意が必要。○ は該当する性質を満たしていること、△ は問題を生じる可能性があることを表す。

スキーム	基本精度	安定性	単調性	保存性	実行時間（単位は秒）	備考
asucaの方法	3次	○	△ セル境界の落下速度を線形内挿により計算	○	144	その他の予報変数の移流と整合
ボックスラグランジアンスキーム(Kato 1995)	1次	△ 大気の鉛直流と別に計算	△ クーラン数が大きくなると保証されない	○	7	
PPM によるセミラグランジュ法	3次	△ 大気の鉛直流と別に計算	○	○	48	
PRM によるセミラグランジュ法	3次	△ 大気の鉛直流と別に計算	○	○	60	
minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法	3次	△ 大気の鉛直流と別に計算	△ セル境界の落下速度を線形内挿により計算	○	32	負値補正を行う

スキームは精度は高く、単調性は保証されているものの、計算コストが大きい。また、ボックスラグランジアンスキーム同様に、水物質の落下と鉛直風による移流を別に扱うために、計算安定性に問題が生じうる。

minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法

1 次元テストの結果 (図 2.6.14) を見ると、精度では問題ないものの、極大値が元より大きくなっており、単調性を保てていないことが分かる。これは、セル境界の落下速度を線形内挿によって求めていることと、前述のフラックス調整を行なっていることが原因と考えられる。この方法では、水物質の質量が負の値となるような場合はフラックスの量を調整し、1 つ上のセルに戻す処理を行っており、これにより極大値が元より大きくなっている。表 2.6.2 に示すように、このスキームは精度、実行速度では概ね問題ないものの、単調性に課題が残る。セル境界の落下速度の計算及びフラックス調整に対して何らかの対応を行う必要があるだろう。

(6)　まとめ

本項では、asuca の水物質の落下計算スキームとしてこれまでに検討した様々なスキームを紹介し、その利点と欠点を示した。

asuca に降水落下スキームを組み込む際には、ボックスラグランジアンスキームと、time-split 法と Koren (1993) の流束制限関数を用い落下速度を線形補間で求める方法を検討した。その結果、安定性と精度、そして他の移流計算との整合性を考慮し、後者の手法を用いることとした。しかし、この方法は事例により実行時間が変わり、単調性が保てないという難点がある。

ここで紹介したように、セミラグランジュ法を用いれば CFL 条件の制約を受けないため、実行時間のばらつきを抑えることが期待できる。しかし、上流点の探索と高精度補間関数は計算に時間がかかり、たとえ高精度の補間関数を用いたとしてもクーラン数が大きな状況では精度が低下し、水物質の質量が負となる場合もありうる。また、水物質落下と大気の上昇流を別に扱うことで、計算安定性に問題が生じうる。

精度と安定性、計算コストはいずれもトレードオフの関係にあり、万能なスキームは存在しない。水物質の落下計算に関わる要件について今後も精査し、要求に沿ったスキームを選択していく必要がある。

謝辞

minmod 流束制限関数によるセミラグランジュ法については、開発にあたり東京工業大学の青木尊之教授、下川辺隆史助教、小野寺直幸特任助教に助言とご支援をいただきました。

2.6.4　2 次元定常山岳波

2 次元定常山岳波は、方程式系を線形化することにより解析解を導くことができる実験として有名である。前項までに述べてきた移流方程式の理想実験と異なり、乾燥大気に対する非静力学方程式系全てを含んでおり、力学過程の性能が端的に表れる。また、この実験では非静力学効果をほとんど無視できるような条件を与えることも、その逆も可能であり、非静力学効果が無視できないような場合には、非静力学モデルと静力学モデルの違いがよく表れる。以上から、非静力学モデルの開発の歴史において、初期の段階から使われてきた実験手法である。第 1.2.1 項で述べてきた郷田・栗原 (1991) や室井 (1998) には 2 次元定常山岳波の実験結果が示されている。また、Ikawa and Saito (1991) には、3 次元定常山岳波のシミュレーション結果が述べられている。JMA-NHM の開発においては力学過程の改良を行った際に、この 2 次元定常山岳波をテストすることもよく行われており、移流スキーム (藤田 2003) や鉛直ハイブリッド座標 (石田 2008) の開発においても利用されている。

ここで、前に述べた線形化の手法を通じて、非静力学方程式系と静力学方程式系の違いを簡単に見る。水

平 1 次元、鉛直 1 次元（z とする）の 2 次元とし、一様な水平風 u_0 を与えたときの定常状態における鉛直風 w は、非静力学方程式系と静力学方程式系を線形化し、$w = \hat{w}\exp(ikx)$ の形の解を考えると、$\hat{w}$ は

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + (l^2 - \delta k^2)\hat{w} = 0 \tag{2.6.7}$$

で表される微分方程式の解となる（式の導出は付録 2.6.A を参照）。ここで、l はブラント・バイサラ振動数 N を用いて $l^2 = N^2/u_0^2$ と表される。また、δ は 0 か 1 をとりうるパラメータであり、1 の場合は鉛直方向の運動方程式を解く非静力学方程式系を表し、0 の場合は静力学方程式系を表す。この式において、非静力学系と静力学系との違いは $l^2 - k^2$ と l^2 の違いであるから、水平波数 k の大きさが l と比べて無視できない波数に対しては両系の違いが大きくなる。

上に示した線形微分方程式はブシネスク系から導出しているため、鉛直方向の密度の変化は考慮していない。また、解析解の導出を行うためには境界条件を含める計算がもう少し必要となる。紙幅の関係もあり、郷田・栗原 (1991) を参考に、ここで扱う条件における解析解の結果のみを示す (郷田・栗原 (1991) における境界条件は本項でのテストの条件と同じ) 。下部境界条件として高さ h、半値幅 a をパラメータとして $h(x) = h/(1+(x/a)^2)$ で表されるベル型の山を考える。また、上部境界条件として開放境界条件をとる。上記では水平波数 k を持つ波のみを考えたが、様々な波数を持つ波の重ねあわせとして考えると、解析解は次の式で表される。

$$w(x,z) = \left(\frac{\overline{\rho}(0)}{\overline{\rho}(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}\left\{iahu_0 \int_0^\infty e^{ika} e^{i(kx+\mu z)} dk\right\} \tag{2.6.8}$$

ここで、i は虚数単位であり、Re は実部を表す。また、$\overline{\rho}$ は基本場の密度（高度の関数）であり、$\mu = (l^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ である。非静力学系と静力学系の違いについては前述の議論がそのまま成り立ち、k が l に比べて無視できない場合に違いが大きくなる。この解は様々な水平波数を持つ波の重ね合わせであるが、一番寄与が大きい最大振幅を持つ波数は $k = 1/a$ であるため、l と $1/a$ の比として $al = Na/u_0$ が非静力学効果を見積もるパラメータとなる。すなわち、この値が 1 より十分大きければ、非静力学効果は小さく (従って、静力学近似による違いは小さく)、1 に近ければ非静力学効果を無視できなくなる。

さて、ここでは、いくつかのモデルによる結果とも比較を行うために、“A Standard Test Set for Nonhydrostatic Dynamical Cores of NWP Models” [16] の設定を用いた実験結果を示す (以下ではこのウェブサイトを「非静力学コアの標準テストサイト」という)。このテストセットは、2003 年にドイツで開催された SRNWP ワークショップ [17] における、Bill Skamarock (米国大気研究センター)、Jim Doyle (米国海軍研究事務所) 、Peter Clark、Nigel Wood (英国気象局) の講演が基となっており、上記ウェブサイトに設定が記載されている。

この設定では山岳の高さが 1 m と低いことが一つの特徴である。解析解を見れば分かる通り、山岳の高さは鉛直風の振幅の形状には影響を与えず、単純に振幅は山岳の高さに比例するのみである。線形化することにより解析解と比較する際に、一様な水平風及び鉛直風がゼロの状態を基本場として、そこからの摂動が極めて小さいとして解析解を導いている。そこで、解析解と比較するために水平風の基本場からのずれや鉛直風そのものの大きさがなるべく小さくなるような実験設定が好ましい。しかし、基本場からのずれが小さくなると計算誤差が大きくなりやすくなる。例えば、u の微分項は線形化した方程式系においては u の摂動の微分であるが、asuca においてはそのまま u の微分として扱っている。そのため、微分を差分で近似した場合に、桁落ちが発生しやすくなり、計算結果に誤差の影響が現れやすくなることが考えられる。山岳の高さを低くしてもノイズが少なく解析解を再現できるかどうかの評価は数値予報モデルの計算誤差の評価ともなるであろう。

JMA-NHM の力学過程に関するパラメータは LFM で用いている設定と同じである。なお、既存の論文・報告等で示されている実験結果と今回の結果が異なる場合があることに注意が必要である。

ここでは、「非静力学コアの標準テストサイト」の設定に従い、非静力学効果が小さいケースと、非静力学効果が無視できないケースの 2 例について比較を行う。

この実験においては上部境界条件が解析解を導出する際に用いた条件と異なる（解析解を導出する際には開放境界条件とし、asuca 及び JMA-NHM はスポンジ層を適用して鉛直風をゼロに近づける）ことに注意が必要である。境界条件の違いにより上層では結果の違いが大きくなることが考えられることから、スポンジ層の適用高度より下層について比較を行っている（以下に示す図はスポンジ層より下層のみをプロットしている)。

(1) 非静力学効果が小さいケース

設定として以下を用いる。

- 格子間隔：水平 2 km、鉛直 250 m
- 予報領域：水平 80 km、鉛直 30 km [18]
- 山の半値幅 $a = 10$ km

[16] `http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests` に設定や結果が掲載されている。

[17] プログラムは `http://srnwp.met.hu/workshops/BadOrb_2003/srnwp2003_program.pdf` を参照のこと。

[18] ウェブサイトには “41 × 121points” と書かれているが、実験においては 40 × 120 格子として、予報領域が一致するようにしている。

- 山の高さ $h = 1$ m
- 水平風速 $u_0 = 20$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.02$ s^{-1}
- 予報時間：250 分
- 積分時間間隔：asuca は 15 秒、JMA-NHM は 5 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

この設定では $Na/u_0 = 10$ であり、非静力学効果は小さいと見做せる。

図 2.6.15 に解析解、asuca 及び JMA-NHM の結果を示す。JMA-NHM の方が全体的にやや歪んだ形をしている一方で、asuca の方がなめらかな結果が得られている。なお、JMA-NHM の場合は周期境界条件の扱いに問題がある可能性があり、このテストにおいては、水平方向の予報領域が狭いことが悪影響を与えていると考えている。また、鉛直風の強さを比較すると、JMA-NHM ではかなり弱い鉛直風しか計算していないのに対して、asuca の場合はほぼ解析解に近い結果を与えている。

(2) 非静力学効果が無視できないケース

設定として以下を用いる。

- 格子間隔：水平 400 m、鉛直 250 m
- 予報領域：水平 144 km、鉛直 30 km
- 山の半値幅 $a = 2$ km
- 山の高さ $h = 1$ m
- 水平風速 $u_0 = 10$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.01$ s^{-1}
- 予報時間：150 分
- 積分時間間隔：asuca は 3 秒、JMA-NHM は 1 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

この設定では $Na/u_0 = 2$ であり、非静力学効果は無視できなくなる。

この場合の結果を同様に図 2.6.15 に示す。非静力学効果が無視できる場合は、山岳波は山岳の上方に伝播していくが、非静力学効果が無視できない場合には山岳風下側に広がっていく結果となる。asuca, JMA-NHM ともに、解析解と比較して風下側への広がり具合は同程度であるが、非静力学効果が小さい実験と同様、JMA-NHM では解析解と比較して鉛直風が弱い。一方、asuca の場合は非静力学効果が小さい実験と同様にほぼ解析解と近い結果を与えている。

2.6.5 周期境界条件における重力波

これは Skamarock and Klemp (1994) で示されている実験であり、非静力学ケースと静力学ケースの 2 例がある。前項と同様に、線形化することにより解析解を導いている。asuca のように重力波をインプリシットに扱う非静力学モデルにおいては重力波に対する安定性や予測精度を確認することができる。非静力学ケースにおいては積分時間間隔を短く取り、精度良く重力波を表現できるかどうかを確認する。一方、静力学ケースにおいては、積分時間間隔を長くした場合に、想定通り重力波を安定化できているかを確認する。また、移動する系を与えた場合は、水平方向の対称性を確認することが重要である。

この実験の条件として、水平 1 次元（以下、東西とする）と鉛直 1 次元の 2 次元とする。山岳等の地形は存在せず、地表面 ($z = 0$ m) において、温位 $\theta = 300$ K、気圧 $p = 1000$ hPa とし、ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.01$ s^{-1} となるように温位が鉛直方向に変化する状況を考える。モデルトップの高度を H として、この中に (2.6.9) 式 で表される微小な温位偏差 ($\Delta\theta_0 = 0.01$ K) を与える。

$$\theta(x, z) = \Delta\theta_0 \frac{\sin(\pi z/H)}{1 + (x - x_c)^2/a^2} \tag{2.6.9}$$

ここで、x_c は微小な擾乱の中心であり、a は擾乱のサイズを表すパラメータである。また、東西方向には周期境界条件を考えるとともに、東西風は風速ゼロもしくは東向きに一様な風速 U を与える。この設定において、微小な温位偏差により重力波が生じ、東西方向に伝播しつつ、一様流があれば系全体が東へ動いていくこととなる。

この場合の温位の解析解は Skamarock and Klemp (1994) によると次式で表される。

$$\theta(\tilde{x}, z, t) = \theta(\tilde{x}, z, 0) + \Delta\theta_0 a \sin(lz) \times \int_0^\infty \frac{k^2 N^2}{k^2 N^2 + l^2 f^2} e^{-ak} (\cos\lambda t - 1) \cos k\tilde{x}\ dk \tag{2.6.10}$$

ここで、$\tilde{x} = x - Ut$、$l = \pi/H$、f はコリオリパラメータである。また、

$$\lambda^2 = \frac{k^2 N^2 + l^2 f^2}{k^2 + l^2} \tag{2.6.11}$$

である。

テストは非静力学ケースと静力学ケースの 2 例を行った。以下に、それぞれの設定を示す [19]。

[19] Skamarock and Klemp (1994) は、系全体が動く速度として $U = 20$ m s^{-1} を与えているが、asuca では系全体が動く速度を与えるオプションを持たない。非静力学ケースではコリオリ力がない設定のため、初期値として $u = 20$ m s^{-1} を与えることで代用した。静力学ケースではコリオリ力により東西風 u が変わるために、同様の手段が取れない。そこで初期値として $u = 0$ m s^{-1} とした。

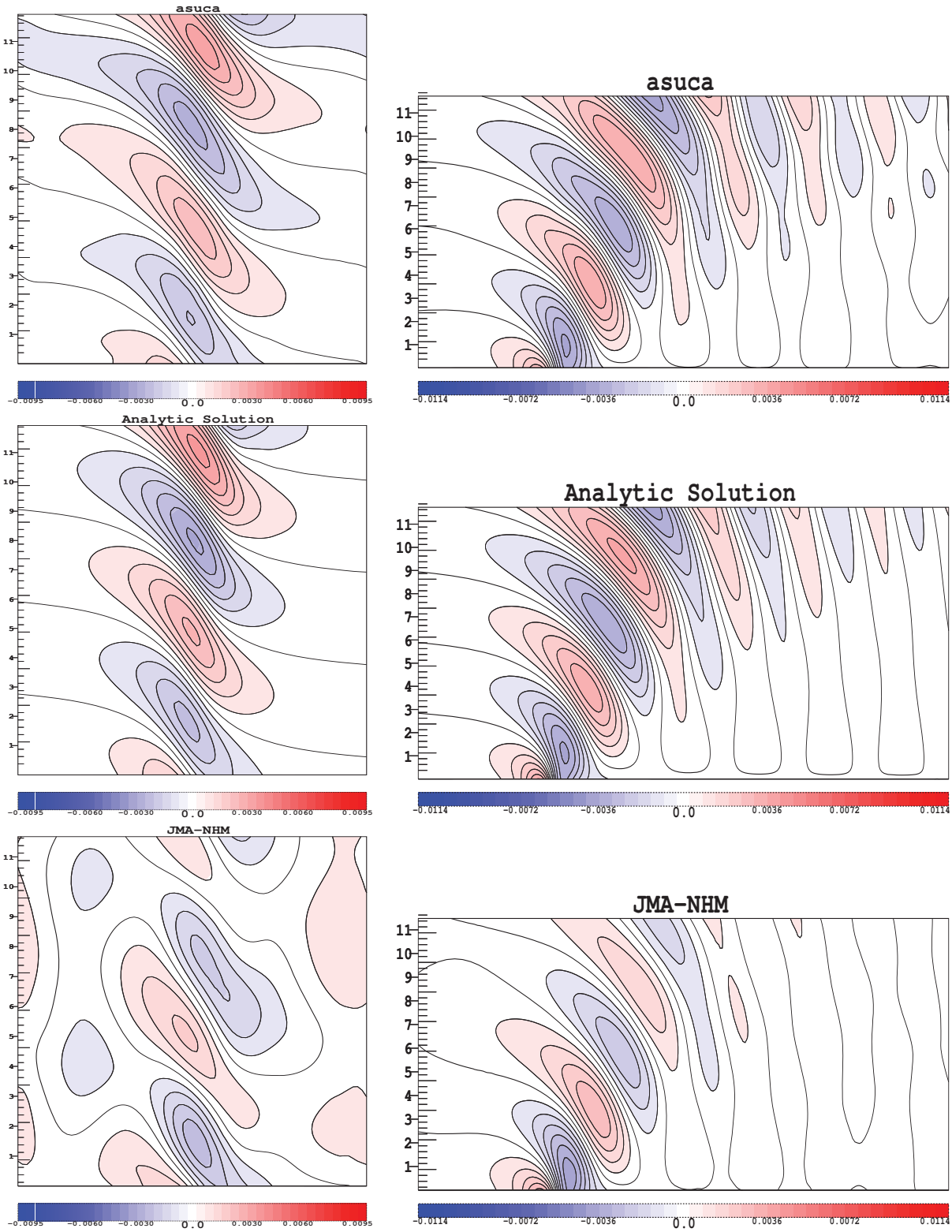

図 2.6.15　2 次元定常山岳波の実験結果。鉛直風の水平・鉛直断面図。左列が非静力学効果が小さいケースによる結果で右列が非静力学効果が無視できないケースによる結果。上段が asuca による結果、中段が解析解、下段が JMA-NHM による結果。等値線間隔は左列は 5.0×10^{-4} m s^{-1}、右列は 6.0×10^{-4} m s^{-1}。

非静力学ケース

- 格子間隔：水平 1000 m、鉛直 1000 m
- 予報領域：水平 300 km、鉛直 10 km
- 積分時間間隔：12 秒
- コリオリパラメータ：$f = 0\ \mathrm{s}^{-1}$
- 東西方向の風速 u の初期値：$20\ \mathrm{m\ s}^{-1}$
- 予報時間：3000 秒
- 初期擾乱の位置：領域中心より 50 km 西側。
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。スポンジ層は無し。
- 側面境界条件：周期境界条件

静力学ケース

- 格子間隔：水平 20000 m、鉛直 1000 m
- 予報領域：水平 6000 km、鉛直 10 km
- 積分時間間隔：200 秒
- コリオリパラメータ：$f = 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$
- 東西方向の風速 u の初期値：$0\ \mathrm{m\ s}^{-1}$
- 予報時間：60000 秒
- 初期擾乱の位置：領域中心。
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。スポンジ層は無し。
- 側面境界条件：周期境界条件

非静力学ケースでは、重力波が鉛直方向に対称な構造を保ちながら伝播していくことや、東西流があるために移動する系で見れば東西対称になるといった対称性がどの程度保てるか確認することが必要となる。一方、静力学ケースにおいては積分時間間隔が 200 秒と、重力波により制限される積分時間間隔 ($1/N = 100$ 秒) と比べて長いことが問題となる。スプリットして扱う場合とインプリシットに扱う場合は、積分時間間隔を長く取れることの確認と、重力波の予測精度が悪くならないことの確認が必要となる [20] 。

この実験結果を図 2.6.16 に示す。非静力学ケースでは、予報時間 3000 秒時点の結果を示している。結果を解析解と比較すると、東西方向の位相は概ね一致しているものの、東西方向の対称性はわずかに崩れており、東側の温位の振幅の方が西側のそれより小さい。これは、asuca の移流計算において、東側の温位に対しては系の動く速度と自らが伝播する速度の和が用いられるのに対し、西側の温位に対しては両速度の差が用いられるため、移流スキームが内包する拡散させる性質の現れ方が異なったためと考えられる。また、解析解は鉛直方向に対称であるのに対して、asuca による結果は若干非対称となっているが、これは鉛直分解能が粗いためと考えている。この実験の WRF-ARW（ARW は Advanced Research WRF の略）による結果が前述の「非静力学コアの標準テストサイト」に示されており [21] 、鉛直方向の非対称性については同程度の結果となっている。

静力学ケースの結果は、一様流をゼロとしていることもあり、水平方向の対称性は良好である。非静力学ケースと同様に鉛直方向にやや非対称であるものの、概ね解析解に近い結果を与えていると言えるだろう。WRF-ARW の結果と比較しても概ね同等である。静力学ケースの設定は前述の通り、重力波が計算安定条件に関わってくる。asuca においては重力波を split-explicit 法で扱っていることから、積分時間間隔を長くしても安定に計算できることと、重力波の表現について確認が必要である。このテストにおいて、重力波による制限よりも長い積分時間間隔をとっても実際に安定に計算できること (他モデルとの比較のため、本報告では積分時間間隔が 200 秒の結果を示すが、1200 秒でも安定に計算できたことを確認している。) 、また、asuca の split-explicit 法による重力波の扱いには実装を含めて特に大きな問題はないことが確認できたと考えている。

2.6.6 暖気塊のテスト

本項で述べる暖気塊 (warm bubble) のテストは、計算領域内に相対的に高温位の気塊を置いて浮力を強制的に与え、その気塊の上昇が正しく表現できるかを確認するものである。この設定は、現実の対流現象を単純化したものであり、このテストを通じて対流現象の表現に重要な役割を果たす鉛直方向の運動方程式の気圧傾度力と浮力項、移流項に関する定式化・離散化の妥当性を検証することができる。また、一様な水平風速を与えることで、第 2.6.2 項の一様流の 1 次元移流のテストに鉛直方向の運動を加えて拡張したテストと位置づけることもでき、その場合は対流現象と背景場としての水平移流をあわせた、より総合的な力学のテストになる。暖気塊のテストには様々な設定が存在するが、ここでは Wicker and Skamarock (1998) の設定を元に asuca の暖気塊のテストを行う。比較のために JMA-NHM についても同じ実験を行う。

また、積分時間間隔・格子間隔を変更した場合の実験結果の確認も行う。数値計算の誤差は時間・空間の離散化の間隔に依存するため、積分時間間隔・格子間隔を粗くした場合に計算結果が変わらなければ、それは時空間の刻みに依存しない解であり結果の妥当性が高いと考えられる。このテストでは、格子間隔に対してどの程度のスケールまで精度よく気塊の上昇を表現できるかということを確認できる。また、計算結果が変わる場合には、どのように変わるかが重要であり、計算安定性の観点から誤差が成長することは望ましくない。

(1) 実験設定

本実験の計算は $x - z$ の 2 次元で行い、水平 20 km、鉛直 10 km を計算領域とする。初期設定として周囲の

[20] 重力波をイクスプリシットに扱うモデルでは、積分時間間隔を短くすることによる計算時間の増加を評価する。

[21] http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests/IG_waves/ig_wave.html

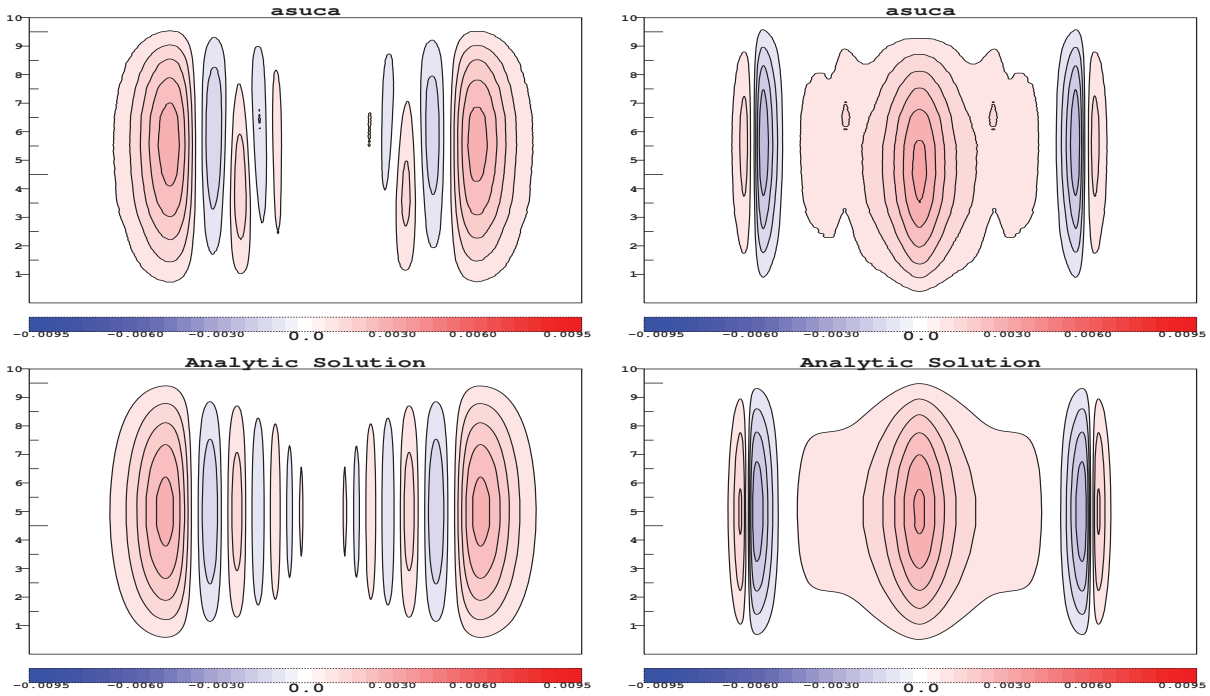

図 2.6.16　asuca による重力波の実験結果。温位の偏差を東西・鉛直断面図。上段は asuca による結果。下段は解析解。左図が非静力学のテストケース、右図が静力学のテストケースの結果。等値線間隔は 5×10^{-4} K である。

中立大気よりも高温位 (+2 K) の直径 4 km の暖気塊を領域中央の高さ 2 km に置く。積分時間は 1020 秒とし、積分時間間隔は $\Delta t = 2$ 秒とする。水平方向には周期境界条件を適用する [22]。

高解像度実験

ここでは、水平格子間隔 $\Delta x = 125$m、鉛直層間隔 $\Delta z = 125$ m の実験を高解像度実験と位置づけて、

- 水平風速をなし (0 m/s) とする実験、
- 一様な水平風速 20 m/s を与える実験、

を行う。

積分時間間隔を変えるテスト

水平風速 20 m/s を与える実験について、積分時間間隔を変更したテストを行う。積分時間間隔を $\Delta t = 1$ 秒から $\Delta t = 5$ 秒まで 1 秒刻みに変更する。

水平格子間隔を変えるテスト

水平格子間隔を変えるテストでは、$\Delta x = 500$ m および $\Delta x = 1000$ m と水平格子間隔を粗くした低解像度実験として、

- 水平風速をなし (0 m/s) とする実験、
- 一様な水平風速 20 m/s を与える実験、

を行う。

一様な水平風速 20 m/s を与える実験では、風速 0 m/s の場合と同じ構造を保ちつつ水平に移流することが期待されるため、水平風速をなし (0 m/s) とする実験結果をリファレンスとすることができる。また、高解像度実験の結果は、低解像度実験のリファレンスとすることができる。高解像度実験の一様な水平風速 20 m/s を与える実験が、Wicker and Skamarock (1998) の設定に一致する。

[22] 鉛直方向には、上部境界で $w = 0$ m/s の条件となるが、上端の影響を受けないとみなせる範囲で実験を行う。気塊の上昇が早すぎて上端の影響が見られる場合は、鉛直層数を増やして計算領域の上端高度を上げる。

(2)　高解像度実験

水平風なしの実験

図 2.6.17 に水平風がない場合の asuca の計算結果を示す。また、比較のため図 2.6.18 に JMA-NHM の計算結果を示す。asuca, JMA-NHM の結果から、暖気塊が水平方向に広がりながら周囲の大気を巻き込むようにして真上に上がっていく様子が分かり、気塊の上昇高度も概ね両モデルで一致している。上昇流に二つの極大がある構造も asuca, JMA-NHM ともに概ね同じように表現している。なお、JMA-NHM の力学過程に関する設定は LFM と同じとしているが、数値拡散をかけていない点は LFM と異なる。数値拡散を用いなかった理由は、この実験において数値拡散をかけると、図 2.6.18 に見られる細かなノイズは除去できるものの、上昇流の二つの極大などの細かな構造も失われるためである。

水平風速 20 m/s を与える実験

この実験では Wicker and Skamarock (1998) と同様に、水平一様風速 20 m/s を初期値として与える。asuca, JMA-NHM の結果をそれぞれ図 2.6.19、図 2.6.20 に示す。

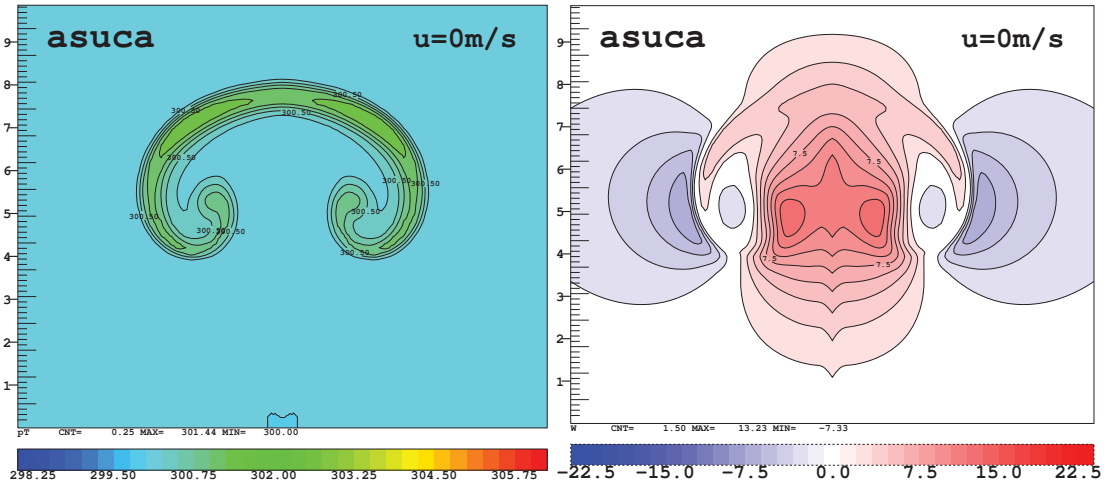

図 2.6.17　asuca の実験結果 (水平風速 0 m/s)。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左) 温位 (K)、(右) 鉛直速度 (m/s)

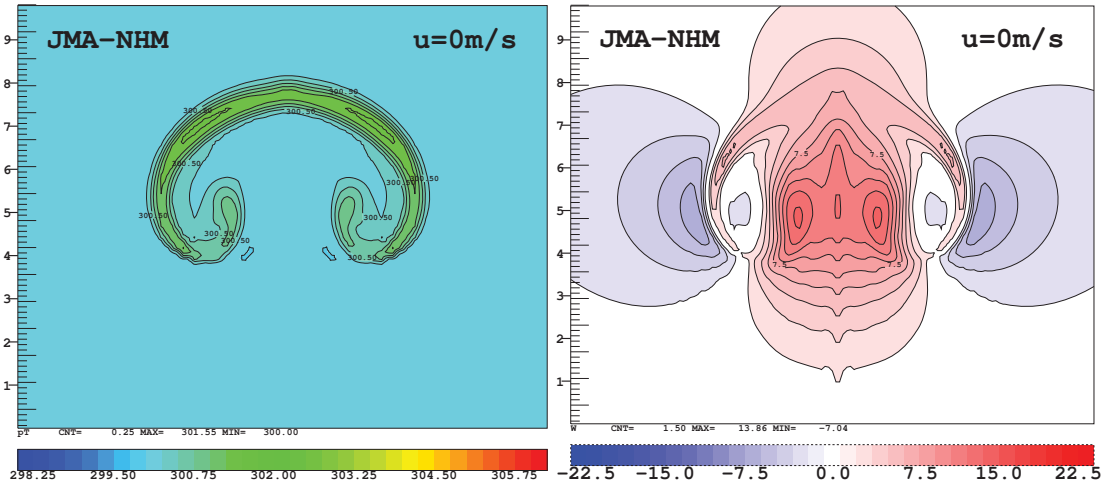

図 2.6.18　JMA-NHM の実験結果 (水平風速 0 m/s)。横軸 (x)：4 km-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左) 温位 (K)、(右) 鉛直速度 (m/s)

図 2.6.19 の asuca の計算結果は、水平風速 0 m/s の場合の図 2.6.17 と同様に気塊の対称性が保たれ、周囲の大気を巻き込む形状も崩れておらず、全体的に良好な結果である。細かく見ると、風速 0 m/s の結果と比べて、やや上部が平たくなって全体に平滑化された構造になっているが、asuca の移流スキームは拡散の性質を持っているため、数格子スケールの分布を減衰させる性質があり、このような結果になっていると考えられる。この結果は、Wicker and Skamarock (1998) の結果と比べても概ね同等の結果である。

一方、図 2.6.20 の JMA-NHM の計算結果を水平風速 0 m/s の場合の図 2.6.18 と比較して見ると、気塊の対称性が崩れ、上昇流に二つの極大がある構造も失われていることが分かる。藤田 (2003) は、移流補正によって波形の歪みが生じることを指摘している。なお、この実験では、JMA-NHM の積分時間間隔を短くして $\Delta t = 1$ 秒とした。このことについては次の (3) で述べる。

(3)　積分時間間隔を変えるテスト

図 2.6.20 に示した水平風速 20 m/s を与える実験において、JMA-NHM の積分時間間隔を短くして $\Delta t = 1$ 秒とした理由は、$\Delta t = 2$ 秒による計算では、図 2.6.20 よりも、さらに対称性が崩れ、気塊の上昇位置も著しく低くなってしまったためである（図 2.6.21)。このことから、JMA-NHM の計算結果は、積分時間間隔への依存性が大きいと言える。また、1 秒刻みに Δt を大きくしていくと $\Delta t = 4$ 秒で計算が計算不安定となった。一方、asuca は $\Delta t = 5$ 秒まで安定に計算することができ [23]、Δt を変更した場合でも $\Delta t = 2$ 秒の場合とほぼ同じ計算結果が得られ、積分時間間隔に依存しないことを示す良好なテスト結果となっている。

[23] 一様水平風速 20 m/s に対流運動に伴う水平風が加わるため、$\Delta t = 6$ 秒では水平のクーラン数が 1 を超える。

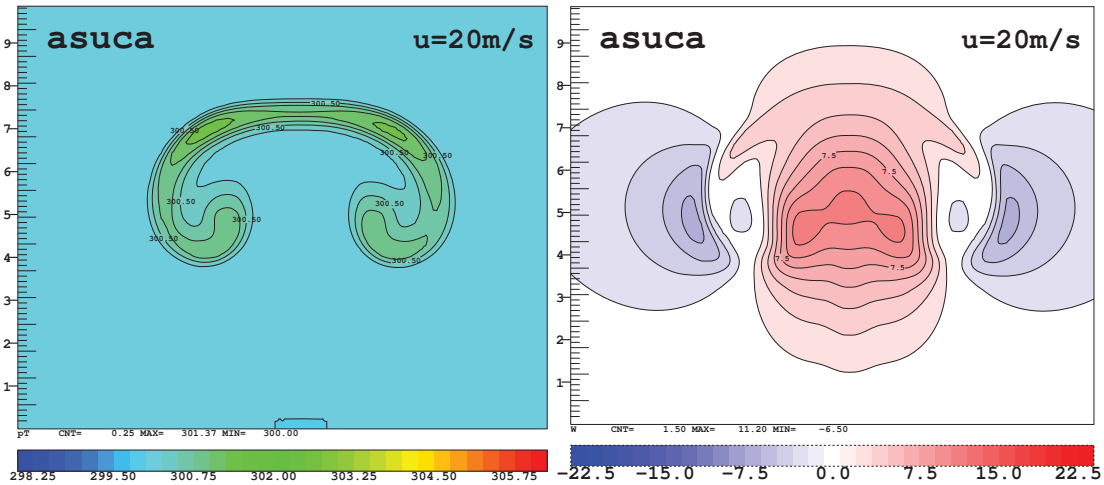

図 2.6.19　asuca の実験結果 (水平風速 20 m/s)。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左) 温位 (K)、(右) 鉛直速度 (m/s)

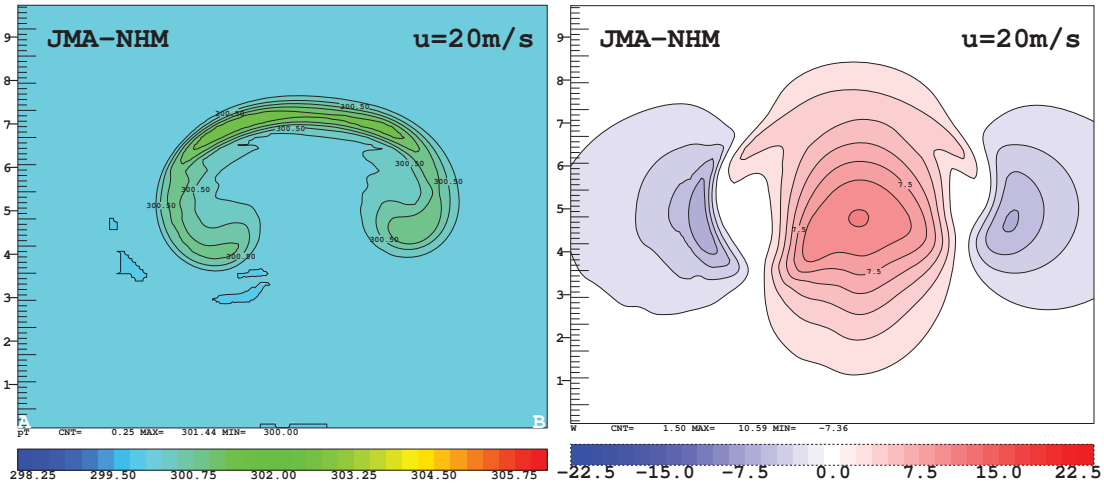

図 2.6.20　JMA-NHM の実験結果 (水平風速 20 m/s)。横軸 (x)：4-16km（計算領域 20km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左) 温位 (K),（右）鉛直速度 (m/s)。積分時間間隔 $\Delta t = 1$ 秒。

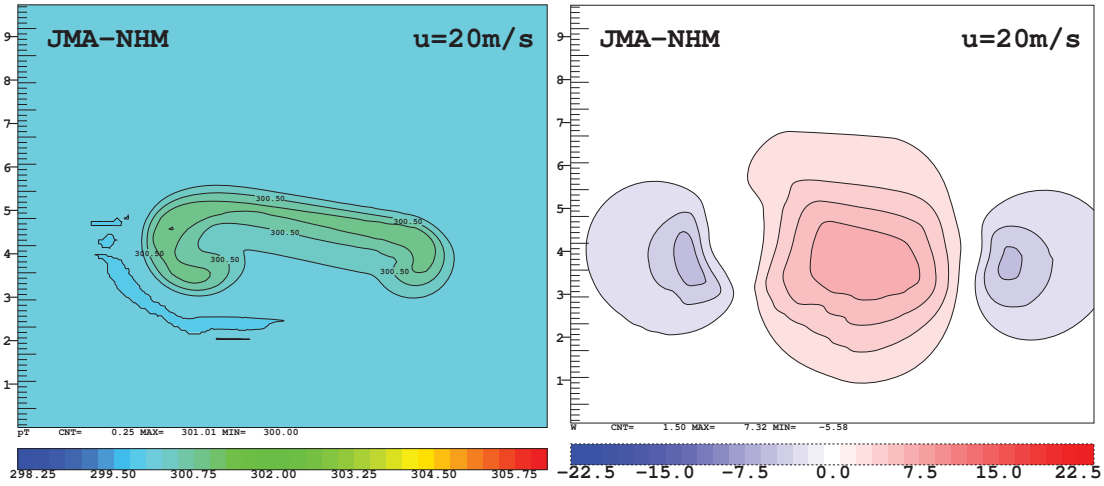

図 2.6.21　JMA-NHM の実験結果 (水平風速 20 m/s)。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち)、縦軸 (z):0-10 km。(左) 温位 (K)、（右）鉛直速度 (m/s)。積分時間間隔 $\Delta t = 2$ 秒とした場合。

(4) 水平格子間隔を変えるテスト

次に水平格子間隔を変えたときの振る舞いを確認するため、水平格子間隔を粗くしたテストを行う。これまでの $\Delta x = 125$ m の設定では、初期値の暖気塊の直径が 32 格子に相当していたが、ここでは $\Delta x = 500$ m、$\Delta x = 1000$ m と 2 種類の設定で実験する。これらの実験ではそれぞれ、初期値の暖気塊の直径が 8 格子、4 格子に相当する。低解像度実験における理想的な振る舞いとして、高解像度の実験結果を粗視化した結果が得られることが望まれる。

水平風なしの実験

まず、水平風速 0 m/s の場合について確認する。図 2.6.22 を見ると、asuca は解像度を落としていっても気塊の上昇位置が変わらず、高解像度実験と同じ現象を粗視化した表現になっていることが分かる。一方、図 2.6.23 から、JMA-NHM は $\Delta x = 1000$ m まで解像度を落とすと気塊の上昇が速くなってしまう[24] ことが分かる。この計算結果は、高解像度実験を粗視化した表現となっておらず、さらに、このような発達する方向の誤差は計算安定性の観点から望ましくない。この JMA-NHM の低解像度実験に対して数値拡散をかけると、気塊の上昇を抑えることができる（図略）。数格子程度のスケールの現象を扱う場合に、JMA-NHM では人為的な数値拡散が必要があることが、このことからも示唆される。

水平風速 20 m/s を与える実験

次に、水平風速 20 m/s を与えた場合について確認する。asuca の計算結果を図 2.6.24 に示す。asuca では、移流スキームに内包される拡散性によって温位のピークが減衰し、したがって気塊の上昇位置は高解像度の場合に比較して低くなる。この結果は、第 2.6.2 項の図 2.6.5 で見た一様流における 1 次元移流テストにおいて、矩形波のスケールが小さい場合に、波の振幅が減衰した結果からも理解できる。JMA-NHM の場合も asuca と同様に、気塊の上昇位置は高解像度の場合に比較して低くなる。しかし、低解像度の水平風速 0 m/s の実験で見られた気塊上昇が速くなる傾向により、asuca より上昇位置が高い結果が得られている（図略）。

(5) まとめ

ここまで、暖気塊の実験により、asuca の力学による対流表現についての基礎的な特性を確認した。

水平風がない場合の高解像度の実験では、気塊が水平方向に広がりながら周囲の大気を巻き込むようにして真上に上がっていく様子が再現された。水平風速を与えて気塊を水平移流させた場合にも、水平風がない場合とほぼ同じ構造を保って暖気塊が上昇し、全体的に良好な結果であった。細かい構造はやや失われたが、拡散性を内包する移流スキームの性質から理解できる結果であった。

また、JMA-NHM では CFL 条件を満たしている場合でも、積分時間間隔を変更してクーラン数が大きくなると結果が大きく変わってしまう性質があるが、asuca ではこの点が改善されていることを確認できた。

解像度を粗くした実験では、水平風がない場合は、高解像度実験の結果を粗視化した結果が得られた。ただし、水平風を与えて移流スキームの寄与が大きくなる実験では、高解像度実験に比べて気塊の上昇位置が低くなって計算精度を保てなかった。この特徴は、解像できないスケールの波は減衰させるという第 2.6.2 項で確認した移流スキームの性質から理解できるものである。解像できないスケールに対するこの性質は、数値計算の誤差が成長する方向にはないことを示しており、計算安定性の観点では望ましい結果である。

[24] そのため、鉛直層数を増やして計算領域の上端高度を上げている。

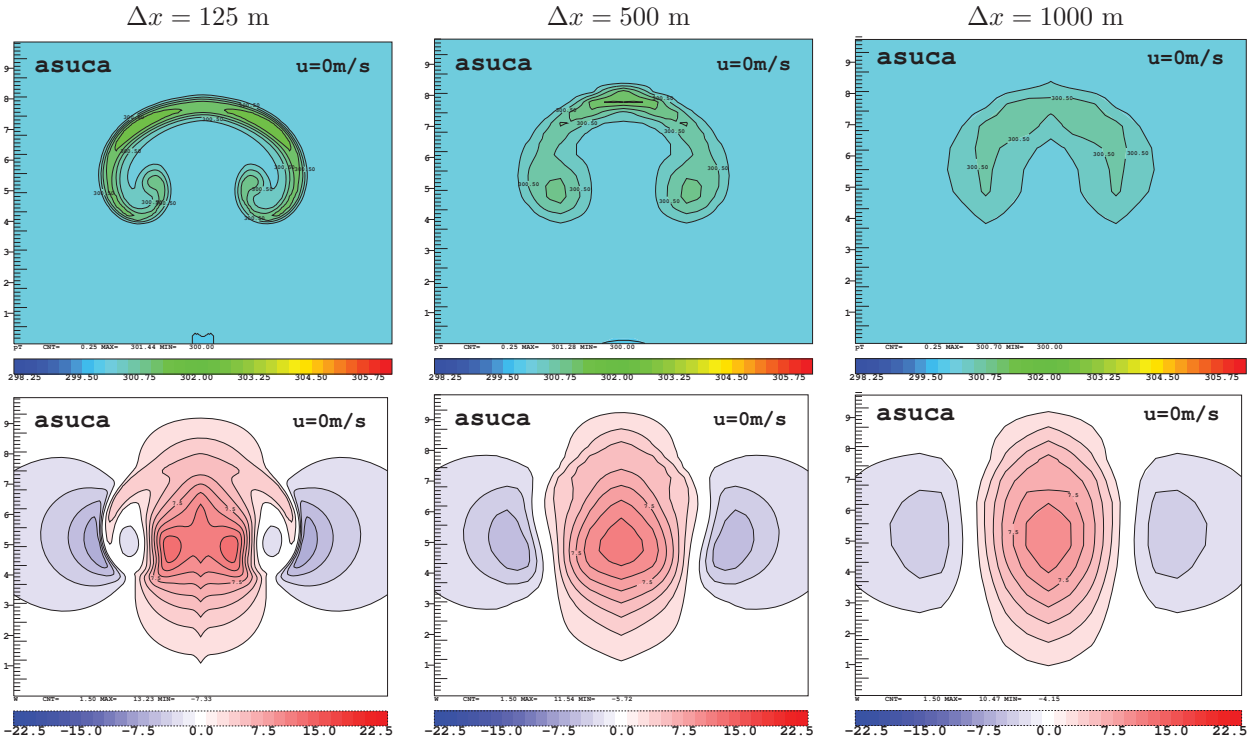

図 2.6.22　asuca の実験結果（水平風速 0 m/s）の解像度依存性。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち）、縦軸 (z):0-10 km。（左）$\Delta x = 125$ m,（中）$\Delta x = 500$ m,（右）$\Delta x = 1000$ m。（上段）温位 (K),（下段）鉛直速度 (m/s)。

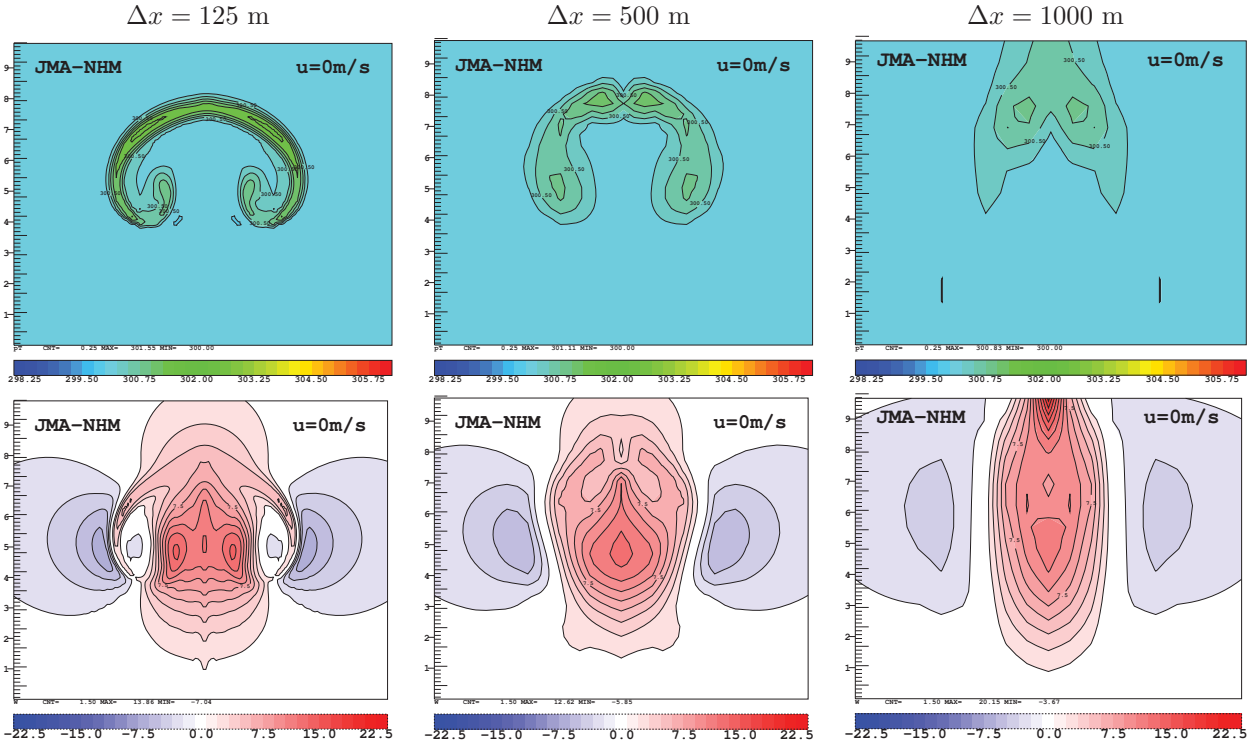

図 2.6.23　JMA-NHM の実験結果（水平風速 0 m/s）の解像度依存性。（左）$\Delta x = 125$ m,（中）$\Delta x = 500$ m,（右）$\Delta x = 1000$ m。（上段）温位 (K),（下段）鉛直速度 (m/s)。

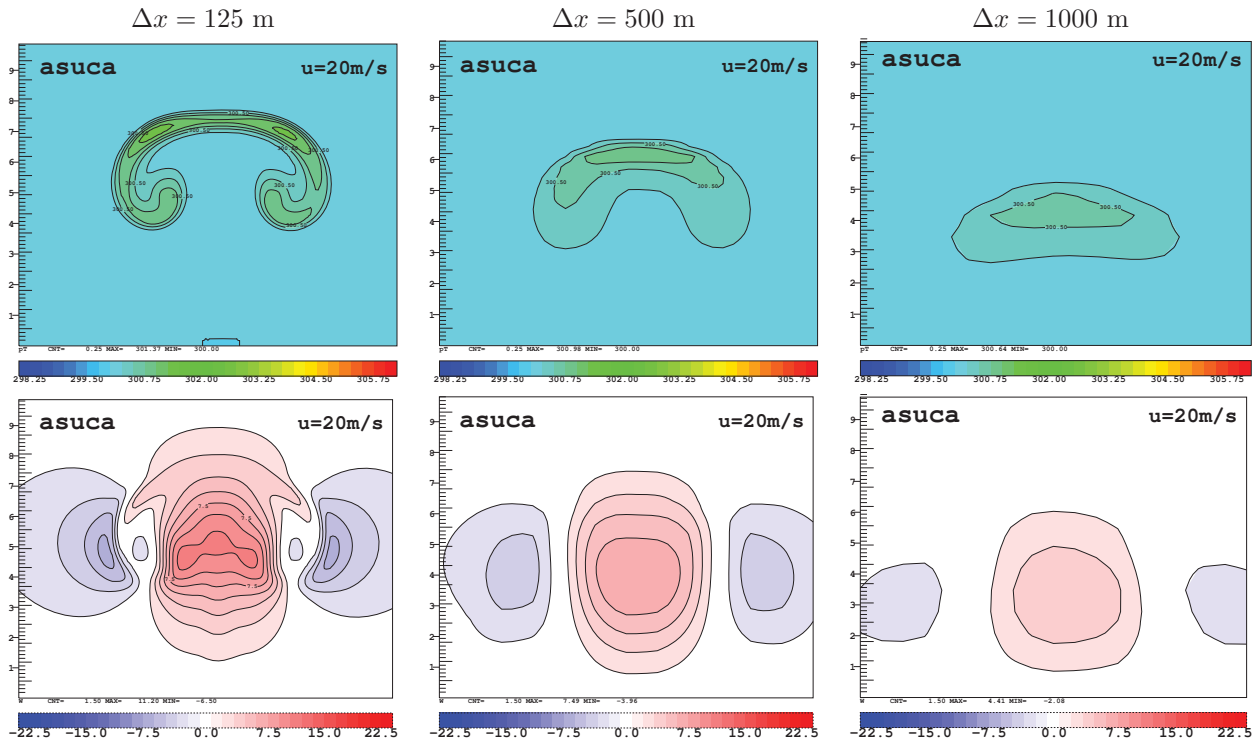

図 2.6.24　asuca の実験結果（水平風速 20 m/s）の解像度依存性。横軸 (x)：4-16 km（計算領域 20 km のうち）、縦軸 (z):0-10 km。（左）$\Delta x = 125$ m,（中）$\Delta x = 500$ m,（右）$\Delta x = 1000$ m。（上段）温位 (K),（下段）鉛直速度 (m/s)。

2.6.7　重力流

この項で説明する実験は、Straka et al. (1993) で示されたものである。計算領域に相対的に低温位の気塊をおいて、その振る舞いを見る。この冷気塊は、予報開始とともに落下し、地表面に達した後に、左右（東西）対称に広がっていく。この実験では大きい温位偏差を持つ冷気塊を置くことにより、強い下降流を生じさせ、素早く東西に広がるような急変する現象に対して、安定かつ精度よく時間積分が可能であるかを確認するものである。第 2.6.4 項、第 2.6.5 項 で示した実験は定常状態から微小な偏差を与えることにより、線形化した方程式の解析解と比較したものであるが、この実験では低温位の気塊の偏差が小さいと見做すことはできず、従って、線形化することによって得られる解析解と比較することができない。このため、リファレンスとして Straka et al. (1993) の結果及び asuca の格子間隔を小さくした結果を用いて比較する。

この実験は水平 1 次元と鉛直 1 次元の 2 次元であり、予報領域は 51.2 km ×6.4 km とする。これにあわせて、例えば格子間隔が 50 m のときは格子数を 1024×128 と、格子間隔が 400 m のときは格子数を 128×16 と設定する。地形は存在しない。実験では温位 $\theta = 300$ K の一定値とした上で、予報領域の中心に、以下の式で表される温位偏差を与える。

$$\Delta\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } L > 1.0 \\ -15.0\left\{\cos(\pi L) + 1.0\right\}/2 & \text{if } L \le 1.0 \end{cases} \tag{2.6.12}$$

ただし、

$$L = \left\{ \left(\frac{x - x_c}{x_r} \right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r} \right)^2 \right\}^{0.5} \tag{2.6.13}$$

である。ここで、$x_c = 25.6$ km, $x_r = 4.0$ km, $z_c = 3.0$ km, $z_r = 2.0$ km である。すなわち、領域中心の高度 2 km に最大 −15 K の偏差を持つ冷気塊をおく。また、初期状態における水平風・鉛直風はともにゼロとし、数値粘性として $\nu = 75$ m^2 s^{-1} を与える。

この実験は東西に対称な設定のため全領域の図を示す必要はなく、片側半分だけに着目すれば良い（ほぼ対称であることを確認している）。asuca による実験結果を示したものが図 2.6.25 である。Straka et al. (1993) の Figure 3 にリファレンスとして、格子間隔 25 m の結果が示されており、asuca による格子間隔 50 m 及び 100 m の実験はこれとほぼ同等の結果となっている。また、Straka et al. (1993) では格子間隔が 200 m を超えると計算誤差により後方で冷気塊がちぎれていくよ

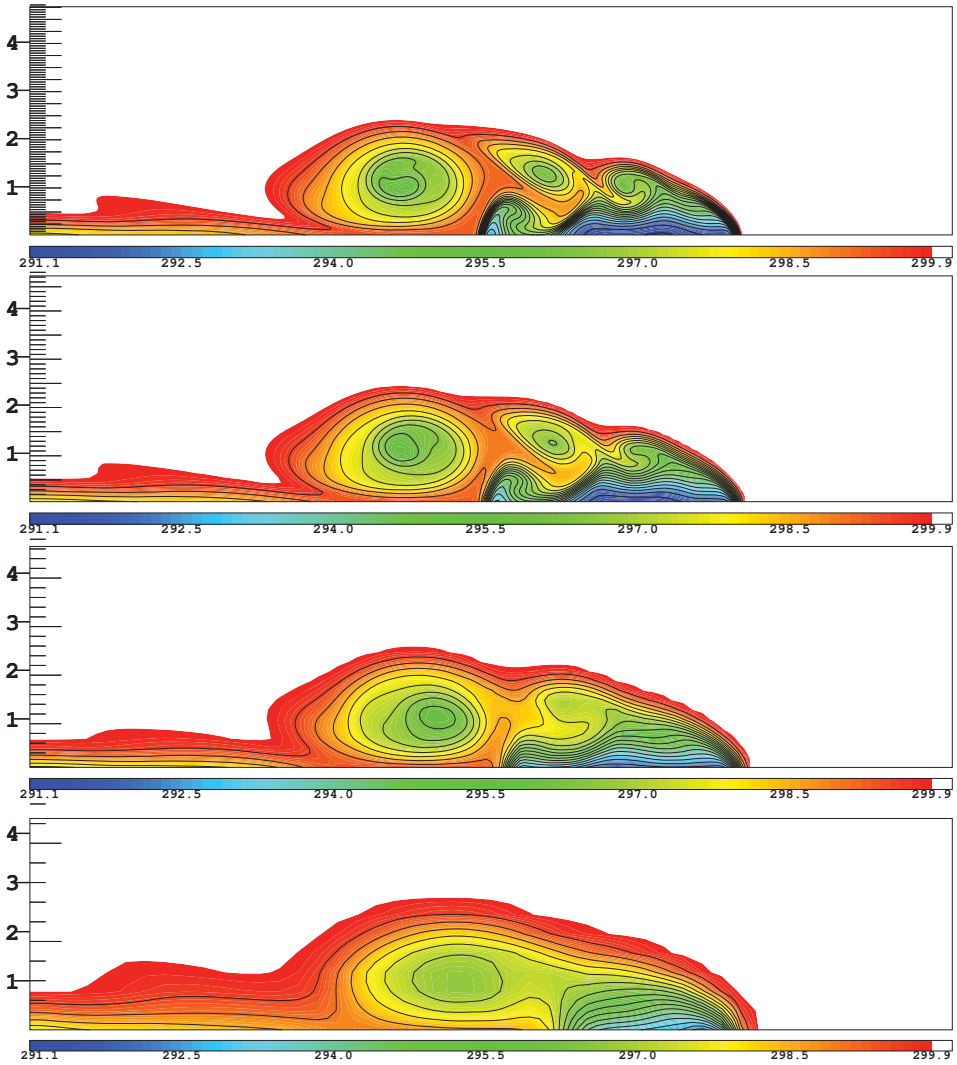

図 2.6.25　asuca による重力流の実験結果。温位の東西・鉛直断面図 (等値線間隔は 0.5 K)。それぞれの予報時間は 15 分。上からそれぞれ格子間隔 50 m, 100 m, 200 m, 400 m の結果。

うな結果となっているが、asuca の場合は格子間隔が 400 m でもそのような状況は見られない。「非静力学コアの標準テストサイト」には移流スキームとして 5 次風上差分及び 2 次中央差分を用いた WRF の結果が掲載されている [25]。それと比較すると、asuca は Koren (1993) による流束制限関数を用いているために、なめらかな場において風上 3 次差分、急変する場では風上 1 次差分の精度しかないものの、WRF の風上 5 次差分による結果と同様になっている。風上 5 次差分スキームと比較した場合、流束制限関数は打ち切り誤差が大きいものの、単調性を保てること、水平方向に参照する格子数が少なくて済むため並列計算効率が高くなることなどの長所がある。この実験において、asuca の移流スキームは精度と計算効率のバランスをうまく保っていることが確認できたと考えている。

また、予報時間が 15 分経過した後の温位の最大値と最小値を表 2.6.3 に示す。問題設定の状況から明らかに温位の最大値は 300 K を超えないはずである。また、温位の最小値については数値粘性の効果もあり、評価は難しいが少なくとも 285 K 以下にはならないはずである。asuca による実験ではこの通りの結果となっており、Koren (1993) による移流スキームが有効に働いていると言えるだろう。

表 2.6.3　重力流実験における、予報時間が 15 分のときの温位の最大値と最小値。

	最大値	最小値
格子間隔 50m	300.00K	294.39K
格子間隔 100m	300.00K	294.74K
格子間隔 200m	300.00K	295.38K
格子間隔 400m	300.00K	295.68K

[25] http://www.mmm.ucar.edu/projects/srnwp_tests/density/density.html

2.6.8　St-MIP

St-MIP とは Steep Mountain Model Intercomparison Project の略であり、急峻な地形を扱う実験であり、Satomura et al. (2003) により提唱されたものである。2 次元定常山岳波の実験である点は第 2.6.4 項と同じであるが、急峻な地形を扱う点が異なる。このため、基本場からの偏差は小さいとはみなせなくなり、線形化した方程式系から得られた解析解との比較は難しくなる。この実験では、急峻な地形がある場合に asuca でも採用しているような座標変換前の z 軸と座標変換後の ζ 軸が平行である座標、すなわち、水平面が鉛直軸と直交しない座標においては、地形の急峻さに応じた誤差が生じて計算不安定につながる可能性がある。そのため、この実験には急峻な地形における計算安定性を確認する目的がある。Satomura et al. (2003) には 6 つのケースについて述べられており、この論文で用いられたモデル (JMA-NHM, CReSS, TSO) では JMA-NHM の semi-implicit 版を除いて全てのテストケースの実行に成功している。ここでは、急峻な地形に対する計算安定性を確認するために、Satomura et al. (2003) のテストケースの中からもっとも急峻な地形を用いる A4 と D2 のケースについて行った実験結果を示す。設定は第 2.6.4 項と同様に示すと次の通りとなる。

ケース A4

- 格子間隔：水平 5 m、鉛直 5 m
- 予報領域：水平 10000 m、鉛直 1250 m
- 山の半値幅 $a = 50$ m
- 山の高さ $h = 100$ m
- 水平風速 $u_0 = 10$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.02$ s^{-1}
- 予報時間：10 分
- 積分時間間隔：0.25 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

ケース D2

- 格子間隔：水平 50 m、鉛直 50 m
- 予報領域：水平 100 km、鉛直 17.5 km
- 山の半値幅 $a = 250$ m
- 山の高さ $h = 500$ m
- 水平風速 $u_0 = 10$ m s^{-1}
- ブラント・バイサラ振動数 $N = 0.01$ s^{-1}
- 予報時間：100 分
- 積分時間間隔：2 秒
- 下部境界条件：摩擦無し
- 上部境界条件：固定条件。ただし、スポンジ層を用いる。
- 側面境界条件：周期境界条件

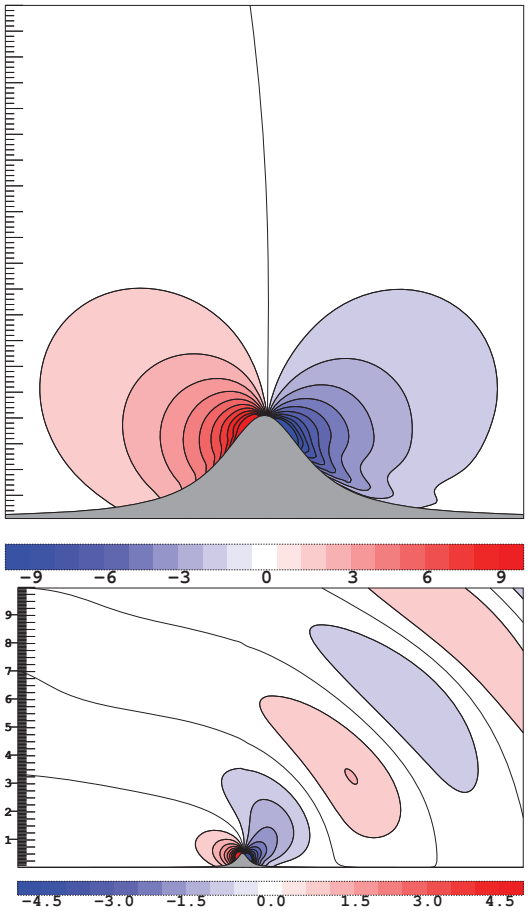

図 2.6.26　asuca による St-MIP 実験の鉛直流の水平・鉛直断面図。上段は Satomura et al. (2003) の A4 設定による実験結果であり、等値線間隔は 1.0 m s^{-1} である。また、下段は Satomura et al. (2003) の D2 設定による実験結果であり等値線間隔は 0.5 m s^{-1} である。いずれも急斜面を持つ実験であるが、安定に計算できていることがわかる。

これらはいずれも 45 度の急斜面を持つ設定である。これらの設定における asuca のテスト結果を図 2.6.26 に示す。asuca では安定に計算を実行できていることがわかる。

2.6.9　終わりに

本節では様々な理想実験による asuca の力学コアのテスト結果について説明してきた。本節で扱った実験設定のいずれに対しても asuca は良い結果を示すことができたと考えている。また、asuca のテストにおいては、現業モデルとして想定する仕様と比較して、水平格子間隔や鉛直層間隔の違いによる積分時間間隔の違いと解析解と比較するために、上部・下部・側面境界条件が実験によって一部異なる以外は全て同じ仕様としている。JMA-NHM の場合は、数値拡散等の設定に任意性のあるパラメータがあり、同一の設定で様々な実験に対応させることは困難である（実験ごとに最適な設定を探し出すことを行えば、ここで示した結果よりも良い結果が得られる可能性がある）。しかしながら、現業モデルの運用においては現象ごとに設定を変

えることはできない。複数の実験に対して、現業利用と同じ仕様で性能を評価し、良い結果を得られたことは asuca の大きな長所と考えている。

理想実験はここで示したもの以外にもいろいろあり、少しずつ評価を加えていきたいと考えている。また、既に示した実験においても誤差の評価といった、より詳細な解析も行われており、同様の取り組みは asuca においても必要であると考えている。

さらに、ここで示した理想実験とは、単に現在のモデルが正しいかどうかを確認するためだけに行うのではなく、問題点を抽出して改良につなげていくためのものでもある。ここで報告した結果を得るまでに、これらの実験を通じて評価・改良を行ってきた成果は大きいと考えているが、現在の結果をベースとしてさらなる高度な目標に向かって開発を進めていきたいと考えている。

付録 2.6.A　2 次元定常山岳波における定常な鉛直風が従う微分方程式の導出

ここでは、2 次元定常山岳波における定常な鉛直風 w が従う微分方程式 (2.6.7) 式を導出する。なお、理論的研究や本テストでリファレンスとする解析解の導出においては非弾性近似を用いることや、また水平風が鉛直方向に変化する場合を扱うことがあるが、ここでは簡単のために、ブシネスク方程式系を出発点とし、また、水平風を高度によらず一定値とする。定常山岳波については様々な文献があり、斉藤 (1994) や小倉 (1997) のような和文による解説・報告書もある。詳細についてはそれらの文献もあわせてご覧いただきたい。

水平 1 次元（x とする）、鉛直 1 次元（z とする）の 2 次元で断熱を仮定したときのブシネスク方程式系は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+\frac{\theta'}{\theta_0}g\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\\
\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}&=0
\end{aligned}\qquad (2.6.14)$$

ここで、u, w, p, θ, ρ はそれぞれ水平風速、鉛直風速、気圧、温位、密度である。また、g は重力加速度であり定数である。下付き添字 0 は時間や空間によらない定数を表し、プライムをつけた物理量は水平一様で静力学平衡を満たす場からの偏差を表す。ここで、この方程式系を線形化するために、物理量を基本場と摂動に分ける。まず、基本場として、温位と気圧は水平一様かつ静力学平衡を満たし水平流が場所によらず一定かつ鉛直流がゼロがである場を考え (水平一様で鉛直方向に変化する基本場はオーバーラインで表すとする) 、基本場とそこからの摂動（偏差と区別するためにダブルプライムで表すとする）に分ける。すなわち、$u = u_0 + u''$, $w = w''$, $\theta = \overline{\theta} + \theta''$, $\theta' = \theta''$, $p' = p''$ とする。これらを方程式系に代入し、摂動（やその微分）の積を微小量として無視し、さらに定常状態であることから摂動の時間微分もゼロとすると次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
u_0\frac{\partial u''}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial x}\\
\delta u_0\frac{\partial w''}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p''}{\partial z}+\frac{\theta''}{\theta_0}g\\
\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial w''}{\partial z}&=0\\
u_0\frac{\partial \theta''}{\partial x}+w''\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}&=0
\end{aligned}\qquad (2.6.15)$$

ここで新たに導入した δ は 0 か 1 をとりうるパラメータであり、1 の場合は鉛直方向の運動方程式を解く非静力学方程式系を表し、0 の場合は静力学方程式系を表す。水平方向及び鉛直方向の運動方程式をそれぞれ z と x で微分すると p'' を消去することができ、さらに、連続の式や温位の式を用いて u'' と θ'' を消去すると、以下の式が得られる。

$$\delta\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w''}{\partial z^2}+l^2 w''=0 \qquad (2.6.16)$$

ただし、

$$l^2=\frac{1}{{u_0}^2}\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}=\frac{N^2}{{u_0}^2} \qquad (2.6.17)$$

である。ここで、N はブラント・バイサラ振動数である。さらに、$w'' = \hat{w}\exp(ikx)$ の形の解を考えると、$\hat{w}$ は

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2}+(l^2-\delta k^2)\hat{w}=0 \qquad (2.6.18)$$

で表される。

参考文献

Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Colella, P. and P. R. Woodward, 1984: The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *J. Comput. Phys.*, 174–201.

藤田司, 2003: 移流スキーム. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 35–50.

郷田治稔, 栗原和夫, 1991: 非静力学モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 37 号, 気象庁予報部, 67–82.

原旅人, 2012a: 理想実験による物理過程の評価. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 130–137.

原旅人, 2012b: 雲物理過程. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 76–89.

Ikawa, M. and K. Saito, 1991: Description of a nonhydrostatic model developed at the Forecast Research Department of the MRI. *Tech. Rep. MRI*, **28**, 238pp.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Kato, T., 1995: A Box-Lagrangian Rain-Drop Scheme. *J. Meteor. Soc. Japan*, **73**, 241–245.

Kato, T., 1998: Numerical simulation of the band-shaped torrential rain observed over southern Kyushu, Japan on 1 August 1993. *J. Meteor. Soc. Japan*, **76**, 97–128.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

室井ちあし, 1998: 非静力モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 44 号, 気象庁予報部, 25–41.

Nakamura, H., 1978: Dynamical effects of mountains on the general circulation of the atmosphere: 1. Development of finite-difference schemes suitable for incorporating mountains. *J. Meteor. Soc. Japan*, **56**, 317–339.

小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論. 東京大学出版会, 215pp.

Smolarkiewicz, P. K. and J. A. Pudykiewicz, 1992: A Class of Semi-Lagrangian Approximations for Fluids. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2082–2096.

斉藤和雄, 1994: 山越え気流について（おろし風を中心として）. 天気, **41**, 731–750.

Satomura, T., T. Iwasaki, K. Saito, C. Muroi, and K. Tsuboki, 2003: Accuracy of terrain following coordinates over isolated mountain: Steep mountain model intercomparison project (St-MIP). *Ann. Dis. Prev. Res. Inst.*, **46B**, 337–346.

Skamarock, W. C. and J. B. Klemp, 1994: Efficiency and accuracy of the Klemp-Wilhelmson time-splitting technique. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 2623–2630.

Straka, J. M., R. B. Wilhelmson, L. J. Wicker, J. R. Anderson, and K. K. Droegemeier, 1993: Numerical solutions of a non-linear density current: a benchmark solution and comparisons. *Intl. J. Numerical Methods in Fluids*, **17**, 1–22.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 1998: A Time-Splitting Scheme for the Elastic Equations Incorporating Second-Order Runge-Kutta Time Differencing. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 1992–1999.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

Xiao, F. and X. Peng, 2004: A convexity preserving scheme for conservative advection transport. *J. Comput. Phys.*, 389–402.

山田芳則, 2003: 雲の微物理過程. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 52–76.

2.7 水平波数スペクトル分布の確認 [1]

2.7.1 はじめに

大気の東西風、南北風、温位の水平波数スペクトル分布（以下、スペクトル分布とする）は、メソスケールでは波数の −5/3 乗に比例する [2] ことが観測から知られており (Nastrom and Gage 1985)、数値予報モデルでも、基本的な性能としてこの分布が再現されることが求められる。一方で、モデルの水平格子間隔に近いスケール（高波数側）では、以下で述べるようにエネルギーを意図的に減衰させて、スペクトル分布としては実大気のそれよりも低エネルギー側に乖離させる必要がある (Skamarock 2004)。

本節では、モデルにおいて高波数側のエネルギーを減衰させる措置が必要な理由とそこから期待されるスペクトル分布の特徴について説明し、asuca の予報値におけるスペクトル分布を確認する。

2.7.2 実大気と数値予報モデルのスペクトル分布

ここでは、数値予報モデルにおいて高波数側のエネルギーを減衰させる措置が必要な理由とそこから期待されるスペクトル分布について、Skamarock (2004) に基づいて説明する。

図 2.7.1 はモデル予報値のスペクトル分布の模式図である（横軸は波数、縦軸はスペクトル密度の両対数グラフ）。横軸は右に行くほど高波数（水平スケールが小さい）となる。波数 k の −5/3 乗に比例する実大気のスペクトルは図 2.7.1 の左右の図において “correct spectrum” として示される線に対応する。数値予報モデルの基本的な性能としてこの傾きが再現されることが求められる。ただし、モデル計算上、原理的にモデルの水平格子間隔の 2 倍のスケールまでしか扱えないことや、計算安定性を確保するために、高波数側のエネルギーを減衰させる措置（人為的な数値拡散や数値計算スキームに内包される数値拡散）が必要なことなどから、高波数側の表現には限界がある。高波数側のエネルギーを減衰させる措置は、以下の観点で必要である。図 2.7.1 の右図は、高波数側のエネルギーを減衰させる措置をしない場合に起こりうるスペクトル分布の模式図である。自然界に存在する低波数側から高波数側へのエネルギーカスケード（大きな渦が壊れることで小さなスケールへエネルギーが伝達される）が、モデルの水平格子間隔のスケールで人為的な下限があることにより、高波数側でエネルギーが蓄積されてしまう状態となる。そのような状態は、低波数側（モデルで良く解像できるスケール）の現象にも悪影響を与えうるため望ましくない。そのため、モデルの水平格子間隔のスケールに近い高波数側ではエネルギーを減衰させる措置が必要となる。図 2.7.1 の左図は、その措置

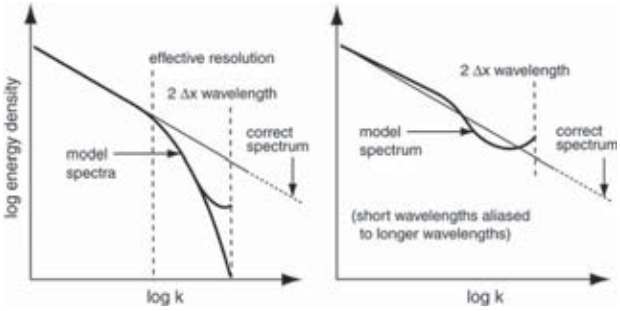

図 2.7.1 数値予報モデルの “spectral tails” の模式図。(Skamarock 2004) の Fig.10 を引用。（左）高波数側でエネルギーを適切に減衰させた場合。実大気のスペクトル分布 (correct spectrum) からモデル予報値のスペクトル分布が乖離しはじめるスケールが実効解像度 (effective resolution) とされる。領域モデルは $2\Delta x$ のところでややめくれあがることが多いとされる。（右）高波数側でエネルギーを減衰させない場合。その場合には、$2\Delta x$ のスケールにエネルギーが蓄積して低波数側に悪影響を与えうる。

がなされた状態の、モデルとして期待されるスペクトル分布を示している。また、この措置（高波数成分の扱い）によってモデルのスペクトル分布が実大気のスペクトル分布から下側に乖離しはじめるスケールが、スペクトル分布の観点でのモデルの実効解像度 (effective resolution) とされる。

また、モデルの実効解像度以下のスペクトル分布が実大気のそれに近い方が良いのは一つの見方として確かであるが、スペクトル分布には位相誤差に関する情報は含まれないことに留意する必要がある。このことに関して、Skamarock (2004) は、WRF モデル (Skamarock et al. 2008) の調査結果として、モデルの拡散性を弱めると高波数側のスペクトル分布が実大気のそれに近づくが、予報結果には悪影響があったこと、それは位相誤差による問題と考えられることを述べている。つまり、実効解像度以下のスペクトル分布が実大気に近い方が必ずしも良いとは限らないことを示している。一般に、モデルの高波数成分には位相誤差による高波数の数値振動（ノイズ）が多く含まれやすく、このことからも図 2.7.1 の左図のように高波数側のエネルギーを減衰させた状態が望ましいと言える。

次項では、この観点に基づいて asuca の予報値におけるスペクトル分布を確認する。

2.7.3 asuca のスペクトル分布

図 2.7.2 に、水平格子間隔 2 km の asuca について、ある事例の予報結果における温位のスペクトル分布を示す [3]。また、比較のため JMA-NHM の結果も示す。両モデルともにスペクトル分布の −5/3 の傾きを約 20 km の水平スケールまで再現できている。したがって、この図から読み取れるこのケースでの水平実効解像度

[1] 河野 耕平
[2] 両対数グラフで描くと傾き −5/3 の直線になる。
[3] 本節で述べるスペクトル分布の傾向は事例にあまり大きく依存しない。

は asuca, JMA-NHM ともに約 20 km であり、そこから高波数側でスペクトル分布が実大気のそれから下側に乖離しはじめることから、低波数側に影響を与えないように高波数側のエネルギーが適切に減衰できていることを示している。

2.7.4　asuca と JMA-NHM の高波数成分の扱い

図 2.7.2 の asuca と JMA-NHM のスペクトル分布の下がり方には違いがあり、これは両モデルの高波数側でエネルギーを減衰させる措置（高波数成分の扱い）の違いを反映したものと考えられる。実際に、両モデルでは高波数成分の扱い方が異なるので、以下でこの点について説明する。

JMA-NHM は人為的な数値拡散を付加することによって、モデル内に存在する数値スキームに起因する高波数の数値振動（ノイズ）を除去する設計となっている。このとき、数値拡散に係る任意性のあるパラメータを適切に調整する必要がある。参考として JMA-NHM の数値拡散の強さを変えた場合のスペクトル分布への影響を図 2.7.3 に示す。最も上に位置するスペクトルの線は、数値拡散を施さない場合の結果であり、徐々に数値拡散を強めると高波数側のみスペクトル密度が小さくなっていく様子が分かる。図 2.7.2 の JMA-NHM の結果は、パラメータを調整し、高波数の数値振動（ノイズ）を減衰させた結果のスペクトル分布であると言える。しかし、数値拡散のパラメータ調整が「適切」かどうかの直接的な指標がないことから、その調整は JMA-NHM の現業運用において難しい問題であった (石田 2008)。

JMA-NHM におけるこの問題を踏まえ、asuca では、そもそも除去すべきノイズを生じさせないように、第 2.3.2 項および第 2.4 節で示したように、時間積分法に 3 段階ルンゲクッタ法を用いるとともに、移流スキームに Koren (1993) の流束制限関数を導入した。その結果得られた図 2.7.2 のスペクトル分布から、経験的なパラメータ調整を必要とする人為的な数値拡散にはよらずに、また、JMA-NHM と比較して実効解像度を低下させることなく、高波数側のエネルギーを減衰させていることを確認できた。

2.7.5　まとめ

本節では、Skamarock (2004) に基づき、数値予報モデルにおいて高波数側のエネルギーを減衰させる措置が必要な理由とそこから期待されるスペクトル分布について説明した。図 2.7.2 の結果から、asuca では、経験的なパラメータ調整を必要とする人為的な数値拡散にはよらずに、低波数側に悪影響を与えないように高波数側のエネルギーを減衰させることができており、数値予報モデルとして期待されるスペクトル分布が得られていることを確認した。また、モデル予報値のスペクトル分布が実大気のそれから下側に乖離しはじめるスケールで定義される実効解像度 (Skamarock 2004) は、JMA-NHM と比較して変わらないことを確認した。

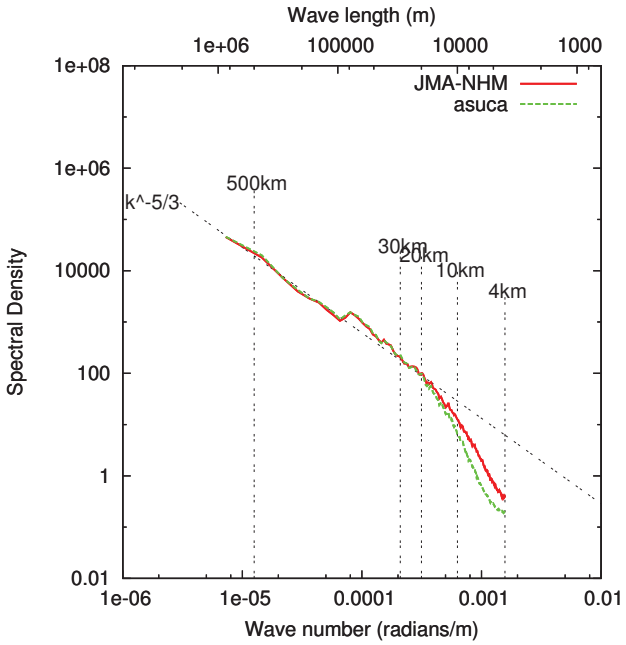

図 2.7.2　温位の水平波数スペクトル分布。赤が JMA-NHM, 緑が asuca。高度 3000 m-12000 m の平均値。

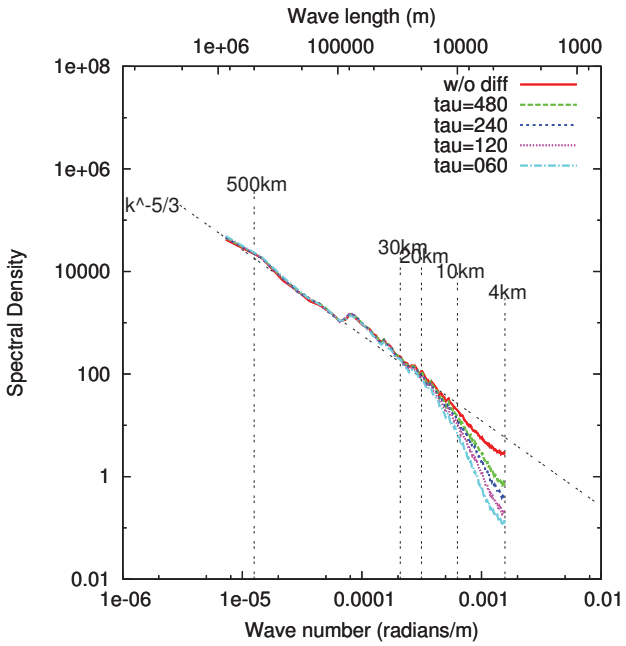

図 2.7.3　温位の水平波数スペクトル分布。JMA-NHM の数値拡散の強さを変更した結果。数値拡散を強めていくにしたがって高波数側のスペクトル密度が小さくなる。

参考文献

石田純一, 2008: 数値拡散の強さの変更. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 54.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

Nastrom, G. D. and K. S. Gage, 1985: A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 950–960.

Skamarock, W. C., J. B. Klemp, J. Dudhia, D. O. Gill, D. M. Barker, M. G. Duda, X. Y. Huang, W. Wang, and J. G. Powers, 2008: *A Description of the Advanced Research WRF Version 3.* NCAR TECHNICAL NOTE, 113pp.

Skamarock, W. C., 2004: Evaluating mesoscale NWP models using kinetic energy spectra. *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 3019–3032.

第3章　データ同化システム

3.1　asuca 変分法データ同化システム [1]

3.1.1　はじめに

本章では、asuca を基にした変分法データ同化システム (asuca-Var) の概要を示す。数値予報におけるデータ同化の主な役割は、観測データと数値予報モデルを利用して数値予報モデルの初期値を作成することにある。変分法データ同化手法は、変分原理と最尤推定に基づくデータ同化手法であり、背景場の時間発展を考慮しない 3 次元変分法、時間発展を考慮する 4 次元変分法、そして、アンサンブル摂動を利用して背景誤差に流れ依存性を考慮するハイブリッド変分法等がある。asuca-Var は、それら変分法データ同化手法を用いて asuca の初期値を作成するデータ同化システムである。

まず、asuca-Var の構成と、その構成要素の役割を示す。次に、変分法に基づいた解析値の導出を行い、asuca-Var の各種設定を示す。そして、背景誤差に流れ依存を考慮したデータ同化手法への拡張を述べる。各項目において、計算資源の節約や開発効率の向上のための取り組みも紹介する。

なお、ここでの記述は、気象庁予報部 (2010)、Bannister (2008)、Lahoz et al. (2010)、淡路ほか (2009) を参考にした。適宜、ご参照いただきたい。

3.1.2　asuca-Var の構成

asuca-Var は、asuca の初期値を作成することを目的とした変分法データ同化システムである。その構成要素は、第 1.4.3 項 で述べられているとおり、予報モデル「asuca」、観測値を用いて最適解の計算を行う解析本体「asuca-Var コア」、予報値に作用し観測相当量を求める「観測演算子」である。そして、asuca と観測演算子は、気象庁の物理過程ライブラリ (原 2012) を利用している。特に、観測演算子は、asuca の開発プロジェクト以外の「外部パッケージ」の利用を想定している。ここで、外部パッケージとは汎用性のある観測シミュレーションのためのプログラム群を指し、欧州衛星開発機構が開発を主導する高速放射伝達モデル (the fast Radiative Transfer model for TOVS: RTTOV; Saunders et al. 1999) が、その一例である。

図 3.1.1 は、asuca-Var の構成要素である asuca、asuca-Var コア、物理過程ライブラリ、観測演算子と外部パッケージの関係を示したものである。asuca、物理過程ライブラリ、観測演算子は、それぞれ非線形 (NL)、接線形 (TL)、随伴 (AD) コードを持つ。asuca-Var コアは、それらを統合し、プレコンディショニング、限定メモリ準ニュートン法による極小値探索、システム全体の制御等を行うデータ同化システムの心臓部として機能する。また、3 次元変分法 (3D-Var)、4 次元変分法 (4D-Var)、流れに依存した背景誤差の利用 (Hybrid) など、その目的に応じて機能をパラメータの設定で切り替えることができるように実装している。

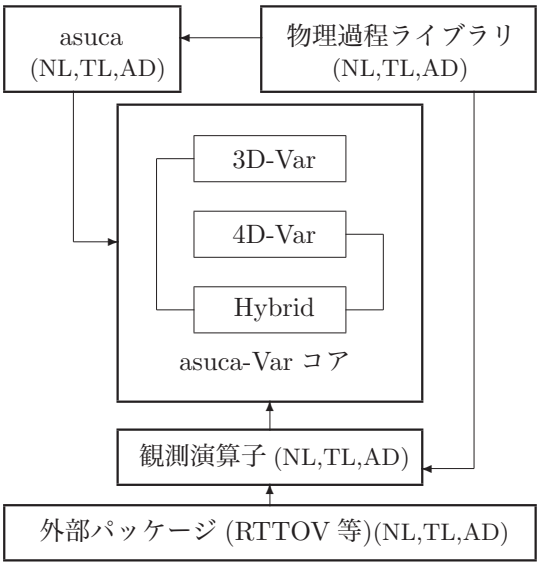

図 3.1.1　asuca、物理過程ライブラリ、観測演算子、外部パッケージ、asuca-Var コアの関係。矢印は、参照元と参照先の依存方向を表す。

なお、上記で述べたように、NL、TL、AD コードをデータ同化システムの心臓部から分離することにより、予報モデルや観測演算子の更新に伴う asuca-Var コアの修正を最小限に抑えることができ、バグの混入防止や複数開発者による作業効率の向上が期待できる。特に、予報モデルが、NL の他に TL,AD を持つ意義は、データ同化システムと予報モデルとの乖離を防止できる点にある。その詳細は次節で議論される。

3.1.3　解析値の導出

時刻 t におけるモデル変数を要素に持つ状態ベクトルを $\mathbf{x}_t$ とし、時刻 $t=0$ における第一推定値を $\mathbf{x}_0^{\mathrm{b}}$ とする。また、それぞれの真値からの差を $\delta\mathbf{x}_t$ と $\delta\mathbf{x}_0^{\mathrm{b}}$ と表す。このとき、背景誤差共分散行列は、

$$\mathbf{B}_0 = \left\langle \delta\mathbf{x}_0^{\mathrm{b}}, \delta\mathbf{x}_0^{\mathrm{b}\,\mathrm{T}} \right\rangle \tag{3.1.1}$$

で与えられる。ここで、$<\cdot,\cdot>$ は、平均を表す。

次に、時刻 t における観測値を要素にもつ観測ベクトルを $\mathbf{y}_t$ と定義する。状態ベクトルから、$\mathbf{y}_t$ に対応する観測相当量ベクトルへの変換を行う非線形観測演算子を $\mathcal{H}_t$ とする。また、$\mathbf{y}_t$ と真値との差を $\delta\mathbf{y}_t$ とすると、観測誤差共分散行列は、

$$\mathbf{R}_t = \left\langle \delta\mathbf{y}_t, \delta\mathbf{y}_t^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{3.1.2}$$

で与えられる。同化期間を $t=0$ から $t=t_{\mathrm{a}}$ までとす

[1] 幾田 泰酵

ると、評価関数 J は、

$$J = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_0^{-1}\left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^{\mathrm{b}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{t_{\mathrm{a}}}\left(\mathcal{H}_t\left(\mathbf{x}_t\right) - \mathbf{y}_t\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_t^{-1}\left(\mathcal{H}_t\left(\mathbf{x}_t\right) - \mathbf{y}_t\right) + J_{\mathrm{p}} \tag{3.1.3}$$

となる。ここで、J_{p} は拘束項を表す。また、システム誤差は考慮しないものとする。

なお、状態ベクトルの時間発展は、時刻 t から $t+\Delta t$ までの非線形時間発展演算子 $\mathcal{M}_{t,t+\Delta t}$ を用いて

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathcal{M}_{t,t+\Delta t}\left(\mathbf{x}_t\right) \tag{3.1.4}$$

と表す。ここで、Δt は、モデルの積分時間間隔である。

次に、数値的極小値探索の繰り返し回数を i とおき、探索過程で更新された状態ベクトルを $\mathbf{x}_0^{(i)}$ とする。そのときの修正量を

$$\delta\mathbf{x}_0^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)} - \mathbf{x}_0^{\mathrm{b}} \tag{3.1.5}$$

とし、$\mathbf{y}_t$ と時刻 t の第一推定値 $\mathbf{x}_t^{(0)}(=\mathcal{M}_{0,t}(\mathbf{x}_0^{\mathrm{b}}))$ からシミュレートした観測相当量との差を

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathcal{H}_t\left(\mathbf{x}_t^{(0)}\right) \tag{3.1.6}$$

とする。また $\mathcal{M}_{t,t+\Delta t}(\cdot)$ の接線形演算子 $\mathbf{M}_{t,t+\Delta t}$ は、

$$\mathcal{M}_{t,t+\Delta t}\left(\mathbf{x}_t^{\mathrm{b}} + \delta\mathbf{x}_t^{(i)}\right) = \mathcal{M}_{t,t+\Delta t}\left(\mathbf{x}_t^{\mathrm{b}}\right) + \mathbf{M}_{t,t+\Delta t}\delta\mathbf{x}_t^{(i)} + \mathcal{O}\left(\left|\delta\mathbf{x}_t^{(i)}\right|^2\right) \tag{3.1.7}$$

を満たすヤコビ行列として定義し、同様に、$\mathcal{H}_t(\cdot)$ の接線形演算子 $\mathbf{H}_t$ は、

$$\mathcal{H}_t\left(\mathbf{x}_t^{\mathrm{b}} + \delta\mathbf{x}_t^{(i)}\right) = \mathcal{H}_t\left(\mathbf{x}_t^{\mathrm{b}}\right) + \mathbf{H}_t\delta\mathbf{x}_t^{(i)} + \mathcal{O}\left(\left|\delta\mathbf{x}_t^{(i)}\right|^2\right) \tag{3.1.8}$$

を満たすヤコビ行列として定義する。このとき、接線形モデルの時間発展は、$\mathbf{M}_{t,t+\Delta t}$ を用いて

$$\delta\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{(i)} = \mathbf{M}_{t,t+\Delta t}\delta\mathbf{x}_t^{(i)} \tag{3.1.9}$$

と書ける。

時刻 t_{a} までの接線形時間発展演算子を含めた観測演算子を

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_{\Delta t}\mathbf{M}_{0,\Delta t} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{t_{\mathrm{a}}}\mathbf{M}_{0,t_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

と定義し、(3.1.10) 式と同様に、$\mathbf{d}_t$ で構成される行列を $\hat{\mathbf{d}}$ とする。このときの観測誤差共分散行列は、

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathrm{diag}\left[\mathbf{R}_0, \cdots, \mathbf{R}_{t_{\mathrm{a}}}\right] \tag{3.1.11}$$

となる。さらに、$\mathbf{B}_0$ の演算を簡略化するためモデル変数 $\delta\mathbf{x}_0$ から制御変数 $\delta\chi_0$ への変数変換

$$\delta\chi_0 = \mathbf{B}_0^{-1/2}\delta\mathbf{x}_0 \tag{3.1.12}$$

を行う。ここで、$\delta\chi_0$ は、

$$\left\langle \delta\chi_0, \delta\chi_0^{\mathrm{T}} \right\rangle = \mathbf{I} \tag{3.1.13}$$

を満たすベクトルであり、$\mathbf{B}_0^{1/2}$ は、

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^{1/2}\left\langle \delta\chi_0, \delta\chi_0^{\mathrm{T}} \right\rangle \left(\mathbf{B}_0^{1/2}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.1.14}$$

$$\equiv \mathbf{B}_0^{1/2}\mathbf{B}_0^{\mathrm{T}/2} \tag{3.1.15}$$

を満たす行列である。(3.1.10) 式、(3.1.11) 式及び (3.1.12) 式の変数変換の結果、評価関数 (3.1.3) 式の最小化問題は、$\delta\chi_0$ 表現の次式に帰着する。

$$\min_{\delta\chi_0^{(i)}} J\left(\delta\chi_0^{(i)}\right) = \min_{\delta\chi_0^{(i)}}\left[\frac{1}{2}\left\|\delta\chi_0^{(i)}\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\hat{\mathbf{R}}^{-1/2}\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}_0^{1/2}\delta\chi_0^{(i)} - \hat{\mathbf{R}}^{-1/2}\hat{\mathbf{d}}\right\|_2^2 + J_{\mathrm{p}}\left(\delta\chi_0^{(i)}\right)\right] \tag{3.1.16}$$

ここで、$\|\cdot\|_2$ は、L^2 ノルムを表す。また、(3.1.16) 式の勾配は、

$$\frac{\delta J}{\delta\chi_0^{(i)}} = \delta\chi_0^{(i)} + \mathbf{B}_0^{\mathrm{T}/2}\hat{\mathbf{H}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{R}}^{-1}\left(\hat{\mathbf{H}}\mathbf{B}_0^{1/2}\delta\chi_0^{(i)} - \hat{\mathbf{d}}\right) + \frac{\delta J_{\mathrm{p}}}{\delta\chi_0^{(i)}} \tag{3.1.17}$$

となる。n 回の数値的極小値探索の結果、得られた解を $\delta\chi_0^{(n)}$ とすると時刻 $t=0$ の解析値 $\mathbf{x}_0^{\mathrm{a}}$ は、

$$\mathbf{x}_0^{\mathrm{a}} = \mathbf{x}_0^{b} + \mathbf{B}_0^{1/2}\delta\chi_0^{(n)} \tag{3.1.18}$$

で与えられる。

モデルの初期値は、(3.1.18) 式から同化窓最後の $t=t_{\mathrm{a}}$ まで $\mathcal{M}_{0,t_{\mathrm{a}}}$ により時間積分した

$$\mathbf{x}_{t_{\mathrm{a}}}^{\mathrm{a}} = \mathcal{M}_{0,t_{\mathrm{a}}}\left(\mathbf{x}_0^{\mathrm{a}}\right) \tag{3.1.19}$$

で与えられる。

3.1.4 制御変数

解析対象の変数は、東西風 u、南北風 v、地中温度 T_{g}、地上気圧 p_{s} と温位 θ、地表面体積含水率 w_{g}、偽相対湿度 $\mu_{\mathrm{p}} = q_{\mathrm{v}}/q_{\mathrm{sat0}}^{\mathrm{b}}$ (Dee and da Silva 2003) とする。q_{v} は、水蒸気の密度と全密度の比である。$q_{\mathrm{sat0}}^{\mathrm{b}}$ は、第一推定値の飽和水蒸気密度と全密度の比であり、第一推定値の気温 T_0^{b}、水飽和水蒸気の密度比 $q_{\mathrm{sat_w}0}^{\mathrm{b}}$、氷飽和水蒸気の密度比 $q_{\mathrm{sat_i}0}^{\mathrm{b}}$ を用いて次式で与える。

$$q_{\mathrm{sat0}}^{b} = \begin{cases} q_{\mathrm{sat_w}0}^{b} & (T_0^{\mathrm{b}} > T_0) \\ q_{\mathrm{sat_i}0}^{b} & (T_0^{\mathrm{b}} < T_i) \\ q_{\mathrm{sat_i}0}^{b} + \left(q_{\mathrm{sat_w}0}^{b} - q_{\mathrm{sat_i}0}^{b}\right)\frac{T_0^{\mathrm{b}} - T_i}{T_0 - T_i} & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{3.1.20}$$

ここで、$T_0 = 273.15$[K]、$T_0 - T_i = 36$[K] である。また、すべての制御変数は、スカラーポイントに配置する。制御変数間の誤差相関については、$T_\mathrm{g}, p_\mathrm{s}, \theta$ 間の誤差相関と $w_\mathrm{g}, \mu_\mathrm{p}$ 間の誤差相関があると仮定する。それ以外の変数は、本田 (2010) の調査と議論に基づき独立であるとする。

3.1.5 背景誤差共分散行列

背景誤差共分散行列 $\mathbf{B}_0$ は、(3.1.15) 式から

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^{1/2}\mathbf{B}_0^{\mathrm{T}/2} \tag{3.1.21}$$

と書け、その構造は、以下で示す変数変換 (3.1.12) 式の構成により与えられる。$\mathbf{B}_0^{1/2}$ をパラメータ変換 $\mathbf{K}_\mathrm{p}$ と鉛直座標変換 $\mathbf{C}_\mathrm{v}$、空間鉛直方向の誤差共分散部分 $\mathbf{B}_\mathrm{v}^{1/2}$、空間水平方向の誤差相関部分 $\mathbf{B}_\mathrm{h}^{1/2}$ に分解すると、(3.1.12) 式は、

$$\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{K}_\mathrm{p}\mathbf{C}_\mathrm{v}\mathbf{B}_\mathrm{v}^{1/2}\mathbf{B}_\mathrm{h}^{1/2}\delta\chi_0 \tag{3.1.22}$$

と書ける。

$\mathbf{C}_\mathrm{v}\mathbf{B}_\mathrm{v}^{1/2}\mathbf{B}_\mathrm{h}^{1/2}$ は、誤差相関の無い制御変数を関係づける成分が 0 であるブロック対角行列となる。以下では、水平誤差相関 $\mathbf{B}_\mathrm{h}^{1/2}$、鉛直誤差共分散 $\mathbf{B}_\mathrm{v}^{1/2}$、鉛直座標変換 $\mathbf{C}_\mathrm{v}$、パラメータ変換 $\mathbf{K}_\mathrm{p}$ の設定を述べる。

(1) 水平誤差相関

水平誤差相関は、水平 2 次元のガウシアンを仮定し、その分散は、東西、南北の 2 方向で与え水平一様とする。ここでは、鉛直格子番号 k の任意の制御変数を表す χ_k に対応する $\mathbf{B}_\mathrm{h}$ を $\mathbf{B}_{\mathrm{h},\chi_k}$ とおく。この、$\mathbf{B}_{\mathrm{h},\chi_k}$ の演算には、自己随伴型の準ガウシアンフィルタとして機能する等方リカーシブフィルタ (Purser et al. 2003) を採用した。以下では、簡単のため 1 次元ベクトル ψ を用いてリカーシブフィルタの概要を説明する。まず、微分演算子 $-d^2/dx^2$ の有限差分演算子 K を次のように定義する。

$$\frac{K(\psi)_i}{\Delta x^2} = -\frac{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{\Delta x^2} \tag{3.1.23}$$

このとき、拡散方程式の解法と同様にフーリエ変換を行うと、波数 k によって記述されるスペクトル表現の演算子

$$\hat{K}(k) = \left[2\sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]^2 \tag{3.1.24}$$

が得られる。(3.1.24) 式を $k^2\Delta x^2$ について解くと、

$$\sin^{-1} z = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i z^{2i+1}, \quad |z| < 1 \tag{3.1.25}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2i+1}\cdot\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \tag{3.1.26}$$

であることから、

$$(k^2\Delta x^2)^i = \sum_{j\geq i} b_{i,j}\hat{K}^j \tag{3.1.27}$$

と書ける。ここで、

$$b_{1,j} \equiv \sum_{k=0}^{j-1}\frac{\gamma_k\gamma_{j-1-k}}{4^{j-1}} = \frac{2\,(j!)^2}{j^2\,(2j)!} \tag{3.1.28}$$

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{j+1-i} b_{1,k}b_{i-1,j-k} \tag{3.1.29}$$

である。スケール因子 $a = \sigma\Delta x$ を用いて微分演算子 $\mathcal{D}_{(n)}$ を

$$\mathcal{D}_{(n)} = 1 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{a^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)^n \tag{3.1.30}$$

で定義すると、(3.1.30) 式の波数 k のスペクトルは、

$$\hat{\mathcal{D}}_{(n)} = 1 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2k^2}{2}\right)^n \tag{3.1.31}$$

となる。(3.1.31) 式に (3.1.27) 式を代入し、$\hat{K}$ の関数 $\hat{\mathcal{D}}_{(n)}$ から K の関数 $\mathcal{D}^*_{(n)}$ に逆変換する。さらに、次数 n で切断すると次式が得られる。

$$\mathcal{D}^*_{(n)} = 1 + \cdots + \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{j,n}}{j!}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^j\right]K^n \tag{3.1.32}$$

ここで、(3.1.31) 式は、

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mathcal{D}}_{(n)} = \exp\left(\frac{a^2k^2}{2}\right) \tag{3.1.33}$$

を満たすことから、(3.1.33) 式 の逆数は、ガウシアンカーネルをもつ畳み込み演算のフーリエ変換に相当し、$(\mathcal{D}^*_{(n)})^{-1}$ は、n 次の準ガウシアンフィルタと見なすことが出来る。リカーシブフィルタは、x 方向に作用させた後に y 方向に作用させるため、x 方向の演算を $\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{1/2}$、$y$ 方向の演算を $\mathbf{B}_{\mathrm{h_y},\chi_k}^{1/2}$ とおくと、$\mathbf{B}_{\mathrm{h},\chi_k}^{1/2}$ は、

$$\mathbf{B}_{\mathrm{h},\chi_k}^{1/2} \equiv \mathbf{B}_{\mathrm{h_y},\chi_k}^{1/2}\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{1/2} \tag{3.1.34}$$

と書ける。無限領域で相関距離が水平一様な場合、$\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1/2}$ は、$\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1/2} = \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}$ のようにコレスキー分解が可能であり、この逆行列は

$$\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{1/2} = \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-\mathrm{T}} \tag{3.1.35}$$

となる。ここで $\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}$ は、上三角行列である。任意の x 方向の 1 次元ベクトル $\mathbf{p}$ が入力として与えられたとき、中間ベクトル $\mathbf{q}$、出力ベクトル $\mathbf{s}$ とすると、$\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-\mathrm{T}}$ の演算は、次の 2 つの計算に分割できる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-\mathrm{T}}\mathbf{p} \tag{3.1.36}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1}\mathbf{q} \tag{3.1.37}$$

(3.1.36) 式、(3.1.37) 式は、次の漸化式に書き下せる。

$$q_i = \beta p_i + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j q_{i-j} \tag{3.1.38}$$

$$s_i = \beta q_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_{i+j} \tag{3.1.39}$$

ここで、i は、x 方向の格子番号である。まず、(3.1.38) 式 を、x 方向前方に向かって解き、次に (3.1.39) 式 を、x 方向後方に向かって解く。ここで、漸化式の係数は $\beta = 1/\left(\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}\right)_{ii}, \alpha_j = -\left(\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}\right)_{i,i+j}/\beta$ で与えられる。$\mathbf{B}_{\mathrm{h_y},\chi_k}^{-1/2}$ の演算も $\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1/2}$ の演算と同様である。有限領域 $i \in [1, N]$ における境界条件は、フィルタ演算の前方・後方演算の可換性から要請される

$$\mathbf{s} = \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-\mathrm{T}}\mathbf{p} \equiv \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1}\mathbf{q} \tag{3.1.40}$$

$$= \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-\mathrm{T}}\mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-1}\mathbf{p} \equiv \mathbf{U}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{-\mathrm{T}}\mathbf{r} \tag{3.1.41}$$

を利用して与える。ここで、$\mathbf{r}$ は、$\mathbf{q}$ と同様な中間ベクトルである。$\mathbf{s}$ の一部を $\hat{\mathbf{s}}_j = (s_{j+1-n}, \cdots, s_j)^{\mathrm{T}}$ と表記し、下三角行列 $L_{i,i} = 1, L_{i+j,i} = -\alpha_j$、上三角行列 $U_{i,i+j} = -\alpha_{n-j}$ とする。$\hat{\mathbf{r}}_{N+n} = 0$ であることから、(3.1.40) 式と (3.1.41) 式から

$$\mathbf{L}\hat{\mathbf{s}}_{N+n} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{s}}_N \tag{3.1.42}$$

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{s}}_N = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{s}}_{N+n} + \beta\hat{\mathbf{q}}_N \tag{3.1.43}$$

となり、境界条件である

$$\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}} - \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}\right)\hat{\mathbf{s}}_N = \beta\hat{\mathbf{q}}_N \tag{3.1.44}$$

が与えられる。境界では、(3.1.44) 式 を用いて、x 方向後方に向かって $\mathbf{s}$ を求める。リカーシブフィルタは、次数 n の取り方と適用回数に任意性があり、次数や適用回数を増やすと、近似誤差が縮小する。しかし、次数や適用回数の増加は、計算量と MPI 通信量の増加を招き計算時間の増大に繋がる。そこで、$\mathbf{B}_{\mathrm{h_x},\chi_k}^{1/2}$ と $\mathbf{B}_{\mathrm{h_y},\chi_k}^{1/2}$ に利用するリカーシブフィルタでは、実用上十分な精度が得られる次数 $n = 4$ を採用し適用回数を 1 回に設定している。

(2) 鉛直誤差共分散

水平格子番号 (i, j) の任意の制御変数を表す χ_{ij} に対応する $\mathbf{B}_{\mathrm{v}}$ を $\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ とおくと、$\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}^{1/2}$ は、$\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ の固有値を対角要素に持つ対角行列 $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ の平方根を用いて次の様に書ける。

$$\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}^{1/2} = \mathbf{U}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}^{1/2}\mathbf{U}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}^{\mathrm{T}} \tag{3.1.45}$$

ここで、$\mathbf{U}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ は、$\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ の固有ベクトルを列に持つ直交行列である。

なお、$\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}^{1/2}$ は、水平格子点 (i, j) 毎に異なる値を持つことができ、鉛直背景誤差の場所依存性を表現できる。例えば、海格子と陸格子で鉛直誤差共分散の統計をとると、境界層に相当する高度以下で海と陸で異なる共分散が得られる。そのような場所依存性を持つ鉛直誤差共分散の利用は、地形や地表面種別の影響を解析値に反映することに繋がり、局地的な気象現象を対象としたデータ同化を行う際に有益である。

(3) 鉛直座標変換

水平格子番号 (i, j) の任意の制御変数を表す χ_{ij} に対応する鉛直座標変換 $\mathbf{C}_{\mathrm{v}}$ を $\mathbf{C}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ とおく。制御変数に作用する水平方向の空間フィルタ $\mathbf{B}_{\mathrm{h},\chi_k}^{1/2}$ は、モデル座標系の鉛直軸に沿った方向に離散化された層毎に計算を行うため、観測による修正を層に沿って広げる性質を持つ。例えば、モデルに z*座標系 (Gal-Chen and Somerville 1975) が採用されている場合、大気上層の観測による修正が、モデル地形に依存することになる (藤田・倉橋 2010)。これを軽減するため、χ が配置される座標系に、地形の影響が大気上層に及ばないように z_h を低く設定した鉛直ハイブリッド座標系 (石田 2008) を採用することとした。この鉛直ハイブリッド座標系からモデルの層配置への変換は、$\mathbf{B}_{\mathrm{h},\chi}$ と $\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{\mathrm{ij}}}$ の演算の後、$\mathbf{C}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}$ を作用させることで実現される。この鉛直座標変換は、プログラム開始時に、一度だけ計算し、$\mathbf{C}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}\mathbf{B}_{\mathrm{v},\chi_{ij}}^{1/2}$ を保存しておく。これにより、極小値探索の繰り返し回数分の鉛直座標変換を省略できる。

(4) パラメータ変換

$\mathbf{K}_{\mathrm{p}}$ を書き下すため、(3.1.22) 式を $\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{K}_{\mathrm{p}}\delta\tilde{\chi}_0$ と書き直す。モデル変数の変分ベクトル $\delta\mathbf{x}_0$ と、解析変数に対応する要素の変分ベクトル $\delta\tilde{\chi}_0$ は、

$$\delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \delta(\rho u) \\ \delta(\rho v) \\ \delta(\rho\theta_m) \\ \delta(\rho q_v) \\ \delta\rho \\ \delta T_g \\ \delta w_g \end{pmatrix}, \quad \delta\tilde{\chi}_0 = \begin{pmatrix} \delta\tilde{u} \\ \delta\tilde{v} \\ \delta\tilde{\theta} \\ \delta\tilde{p}_{\mathrm{s}} \\ \delta\tilde{\mu}_{\mathrm{p}} \\ \delta\tilde{T}_g \\ \delta\tilde{w}_g \end{pmatrix} \tag{3.1.46}$$

で与えられる。ここで、$\delta\mathbf{x}_0$ の要素は、$\delta\tilde{\chi}_0$ によって摂動を考慮する必要がある変数のみを記述する。

$\mathbf{K}_{\mathrm{p}}$ の構成要素を $K_{x_0,\tilde{\chi}_0}$ と置き変換内容を書き下す。添字は、変換対象の (3.1.46) 式に表れる構成要素の対を表す。まず、$K_{\rho u,\tilde{u}} = \rho, K_{\rho v,\tilde{v}} = \rho, K_{T_g,\tilde{T}_g} = \mathbf{I}, K_{w_g,\tilde{w}_g} = \mathbf{I}$ となる。これら以外で 0 ではない $\mathbf{K}_{\mathrm{p}}$ の部分行列は、

$$\begin{pmatrix} K_{\rho u,\tilde{\theta}} & K_{\rho u,\tilde{p}_{\mathrm{s}}} & K_{\rho u,\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}} \\ K_{\rho v,\tilde{\theta}} & K_{\rho v,\tilde{p}_{\mathrm{s}}} & K_{\rho v,\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}} \\ K_{\rho\theta_{\mathrm{m}},\tilde{\theta}} & K_{\rho\theta_{\mathrm{m}},\tilde{p}_{\mathrm{s}}} & K_{\rho\theta_{\mathrm{m}},\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}} \\ K_{\rho q_{\mathrm{v}},\tilde{\theta}} & K_{\rho q_{\mathrm{v}},\tilde{p}_{\mathrm{s}}} & K_{\rho q_{\mathrm{v}},\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}} \\ K_{\rho,\tilde{\theta}} & K_{\rho,\tilde{p}_{\mathrm{s}}} & K_{\rho,\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ \rho & 0 & \theta_{\mathrm{m}} \\ 0 & \rho & q_v \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{T}_\theta & 0 & \mathcal{T}_{\mu_{\mathrm{p}}} \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_{\mu_{\mathrm{p}}} \\ \mathcal{D}_{\theta_{\mathrm{m}}}\mathcal{T}_\theta & \mathcal{D}_{p_{\mathrm{s}}} & \mathcal{D}_{\theta_{\mathrm{m}}}\mathcal{T}_{\mu_{\mathrm{p}}} \end{pmatrix} \tag{3.1.47}$$

である。(3.1.47) 式の行列内の記号は、以下の関係式を満たすものである。

$$\delta q_v = \frac{\partial q_v}{\partial\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}}\delta\tilde{\mu}_{\mathrm{p}} = \mathcal{Q}_{\tilde{\mu}_{\mathrm{p}}}\delta\tilde{\mu}_{\mathrm{p}} \tag{3.1.48}$$

$$\delta\theta_m = \frac{\partial\,\theta_{\rm m}}{\partial\,\tilde{\theta}}\delta\tilde{\theta} + \frac{\partial\,\theta_{\rm m}}{\partial\,\tilde{\mu}_{\rm p}}\delta\tilde{\mu}_{\rm p}$$
$$= \mathcal{T}_{\tilde{\theta}}\delta\tilde{\theta} + \mathcal{T}_{\tilde{\mu}_{\rm p}}\delta\tilde{\mu}_{\rm p} \quad (3.1.49)$$
$$\delta\rho = \mathcal{D}_{\theta_{\rm m}}\delta\theta_{\rm m} + \mathcal{D}_{p_{\rm s}}\delta p_{\rm s} \quad (3.1.50)$$

なお、(3.1.50) 式 は、静力学平衡の関係 $\nabla\pi = -\dfrac{g}{C_{\rm p}\theta_{\rm m}}$ の接線形方程式から $\delta\pi$ を求め、ρ の変分を求める演算を表す。

3.1.6 質量保存の拘束条件

asuca-Var では、制御変数を定義する際に、質量に関する制御変数と、風に関する制御変数との間に誤差相関が無いと仮定した。そのため、モデルの強拘束の無い 3 次元変分法から得られる解析値は、質量と風が無関係に修正されたものになる。その様な解析値から時間積分を開始すると不自然な波が発生する。そこで、波の発生を抑えるため、質量と風の修正が相互に関係するように、連続の式を満たす拘束条件を導入する。まず変換演算子 $\mathbf{C}_{\rm c}$ を

$$\mathbf{C}_{\rm c}\delta\mathbf{x} = \left[\frac{\delta\left(\rho U\right)}{J}\right]_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \left[\frac{\delta\left(\rho V\right)}{J}\right]_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \left[\frac{\delta\left(\rho W\right)}{J}\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \quad (3.1.51)$$

と定義する。これは、有限体積法表記の連続の式である (2.2.5) 式 から、摂動を考慮していない降水の落下項と時間変化の項を除いたものに相当する。拘束項 $J_{\rm p_c}$ は、この $\mathbf{C}_{\rm c}$ を用いて

$$J_{\rm p_c} = \frac{1}{2}\delta\chi_0^{\rm T}\mathbf{B}_0^{{\rm T}/2}\mathbf{C}_{\rm c}^{\rm T}\mathbf{\Lambda}_{\rm c}\mathbf{C}_{\rm c}\mathbf{B}_0^{1/2}\delta\chi_0 \quad (3.1.52)$$

となる。$J_{\rm p_c}$ の勾配は

$$\frac{\delta J_{\rm p_c}}{\delta\chi_0} = \mathbf{B}_0^{{\rm T}/2}\mathbf{C}_{\rm c}^{\rm T}\mathbf{\Lambda}_{\rm c}\mathbf{C}_{\rm c}\mathbf{B}_0^{1/2}\delta\chi_0 \quad (3.1.53)$$

である。ここで $\mathbf{\Lambda}_{\rm c}$ は、格子点毎の拘束の強さを規定する対角行列である。その採り方は任意であり、予報開始時に発生する不自然な波の抑制効果と、評価関数の振る舞いを基に決めるチューニングパラメータである。

3.1.7 変分法品質管理

変分法品質管理 (Andersson and Järvinen 1999) は、変分法データ同化において、評価関数の極小値探索を行いながら観測値の品質管理を行う手法である。ある観測 y_t に対して、観測測器の障害や人為的ミス等により、通常の測定誤差より明らかに大きな誤差の発生する確率を $p_{\rm g}$ とし、発生する区間を観測誤差の標準偏差 $\sigma_{\rm o}$ の l 倍で定義する。評価関数 (3.1.3) 式の第 2 項から任意の観測の項を一つ抜きだし

$$J_{\rm o}^{\rm N} = \left(\mathcal{H}_t(\mathbf{x}_t) - y_t\right)^2/2\sigma_{\rm o}^2 \quad (3.1.54)$$

とすると、$p_{\rm g}$ を考慮した確率密度分布は、

$$p_{\rm qc} = \frac{1-p_{\rm g}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm o}}e^{-J_{\rm o}^{\rm N}} + \frac{p_{\rm g}}{2l\sigma_{\rm o}} \quad (3.1.55)$$

となる。ここで、$p_{\rm g}$ は、一様分布を仮定した。観測値の確率密度分布を $p_{\rm qc}$ とした場合の評価関数の観測に関する項を $J_{\rm o}^{\rm QC}$ とすると、$J_{\rm o}^{\rm N}$ を用いて

$$J_{\rm o}^{\rm QC} = -\ln\left(\frac{\gamma + e^{-J_{\rm o}^{\rm N}}}{\gamma+1}\right) \quad (3.1.56)$$

と書ける。この勾配は、

$$\frac{\delta J_{\rm o}^{\rm QC}}{\delta\chi_0} = \frac{\delta J_{\rm o}^{\rm N}}{\delta\chi_0}\cdot\left(1 - \frac{\gamma}{e^{-J_{\rm o}^{\rm N}}+\gamma}\right) \quad (3.1.57)$$

で与えられる。ここで、$\gamma = \sqrt{2\pi}p_{\rm g}/\left[2l\left(1-p_{\rm g}\right)\right]$ である。

3.1.8 観測演算子

観測演算子 $\mathcal{H}$ は、次式の様に空間変換演算子 $\mathcal{H}_{\rm s}$ と、物理要素変換演算子 $\mathcal{H}_{\rm p}$ に分離し実装する。

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{\rm s}\left[\mathcal{H}_{\rm p}\left(\mathbf{x}\right)\right] \quad (3.1.58)$$

この接線形演算子 $\mathbf{H}$ は、$\mathcal{H}_{\rm p}, \mathcal{H}_{\rm s}$ の接線形演算子 $\mathbf{H}_{\rm p}, \mathbf{H}_{\rm s}$ を用いて、

$$\mathbf{H}\delta\mathbf{x} = \mathbf{H}_{\rm s}\mathbf{H}_{\rm p}\delta\mathbf{x} \quad (3.1.59)$$

と書ける。$\mathcal{H}_{\rm s}\,(=\mathbf{H}_{\rm s})$ は、近接 8 格子からの線形内挿である。ただし、地上観測や輝度温度などの平面上のデータの場合は、近接 4 格子からの線形内挿である。観測演算子の新規追加は、$\mathbf{H}_{\rm s}$ を意識せずに、決められたインターフェースに合うように、新たな観測の $\mathcal{H}_{\rm p}$ と $\mathbf{H}_{\rm p}$ 及びその随伴コード $\mathbf{H}_{\rm p}^{\rm T}$ を作成し実装すればよい。

実装している観測演算子は、大気の東西風、南北風、気温、相対湿度に加え、地上観測の東西風、南北風、気温、比湿、相対湿度、気圧である。更に、ドップラー速度、地上可降水量、輝度温度、土壌含水率についても実装している。

なお、相対湿度の観測演算子 $\mathcal{H}_{\rm rh}$ は、

$$\mathcal{H}_{\rm rh}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{p\;q_v\frac{R_v}{R_d}}{\left[1-\sum_{\alpha\neq v}q_\alpha + \left(\frac{R_v}{R_d}-1\right)q_v\right]e_{\rm sat}\left(T\right)} \quad (3.1.60)$$

で与えられる。ここで、$\sum_{\alpha\neq v}q_\alpha$ は、q_v 以外の水物質の和を表し、$e_{\rm sat}(T)$ は、WMO で定められたラジオゾンデや地上観測の通報基準に従い、水の飽和水蒸気圧である (WMO 2008)。また、可降水量の観測演算子 $\mathcal{H}_{\rm tpw}$ は、次式で与えられる。

$$\mathcal{H}_{\rm tpw}\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{k=1}^{n_z}\left(z_{k+\frac{1}{2}} - z_{k-\frac{1}{2}}\right)\left(\rho q_v\right)_k \quad (3.1.61)$$

ドップラー速度の観測演算子 $\mathcal{H}_{\rm dpr}$ は、サイトからの距離を d、ビームの方位角を θ、仰角を ϕ、観測高度を z として

$$\mathcal{H}_{\rm dpr}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{n_z}(u_k \sin\theta + v_k \cos\theta)\exp\left[-\frac{(z_k - z)^2}{l^2}\right]}{\sum_{k=1}^{n_z}\exp\left[-\frac{(z_k - z)^2}{l^2}\right]} \tag{3.1.62}$$

で与えられる。ここで、$l = d\delta\phi$ であり、ビームの広がりを表す $\delta\phi$ は、0.3 度とした (石川 2007; 小泉 2004; Seko et al. 2004)。

地上観測の観測演算子は、気象庁の物理過程ライブラリの地上物理量診断 (原 2008) を利用している。初期設定では、地上物理量診断で用いるバルク係数は、陸上と海上共に Beljaars and Holtslag (1991) のフラックススキームによって計算される。また、陸地の蒸発効率 β は、Deardorff (1978) に基づき、w_g から診断される。

衛星輝度温度の観測演算子は、欧州気象衛星開発機構 (EUMETSAT) の高速放射伝達モデル (RTTOV v10.2; Saunders et al. 2012) を利用している。asuca-Var の観測演算子は、パラメータで接線形や随伴の演算機能を切り替える仕様としていることから、K-matrix は用いず、接線形演算子のサブルーチン `rttov_tl` と随伴演算子のサブルーチン `rttov_ad` を個別に呼び出している。また、非線形演算が選択された場合には直接演算用のサブルーチン `rttov_direct` を利用することになる。オゾンは、予報モデルの放射過程と同じ気候値を与えている。処理対象は、晴天域の輝度温度のみとしており、雲水量の入力は行っておらず、高速マイクロ波射出モデル (FASTEM) も無効としている。

3.1.9 並列化

asuca-Var は、計算効率を向上させるため asuca と同様に領域 2 次元分割を行っている。第 3.1.5 項で述べた水平誤差相関の計算に用いられるリカーシブフィルタは、全計算領域を x 方向前方・後方、y 方向前方・後方の順にノード間をまたいで計算していく。この計算を最小の通信量で行うため、各ノードでリカーシブフィルタの近似次数分の格子数を「のりしろ」として用意し、この「のりしろ」を順次交換していく方法を採用した。また、観測演算子の呼び出しは、各ノードに割り当てられた領域内に含まれる観測の数だけ繰り返される。この繰り返し部分を OpenMP で並列化し、計算時間の短縮を図っている。

3.1.10 背景場に流れ依存性を考慮する手法

(1) 4 次元変分法データ同化

本稿の執筆時 (2014 年 1 月) では、asuca の力学過程の TL、AD コードが概ね完成し、物理を含まない 4 次元変分法データ同化の動作確認を行っている。4 次元化に際し、数分または数秒間隔で観測値が得られる気象レーダー・ウィンドプロファイラや GPS ゾンデ等の高頻度観測データ同化を効率的に行うため $\mathbf{d}_t$ の計算をモデルの時間積分中に行う仕組みを実装した。これによって、$\mathbf{d}_t$ の計算のために NL の結果を出力する必要がなくなり、データ出力の負荷を抑えながら、実際の観測時刻に近い時刻で観測データを同化することが可能となる。

(2) ハイブリッド変分法データ同化

asuca-Var では、Lorenc (2003)、Buehner (2005) に基づき、変分法データ同化における背景誤差にアンサンブル摂動を利用して背景場の流れ依存性を考慮する試みを行っている。ここでは、アンサンブル摂動を用いたハイブリッド変分法手法の概略を示す。統計的な背景誤差 $\mathbf{B}_{\rm n,0}$ を用いる制御変数 $\chi_{\rm n,0}$ に加えて、アンサンブル摂動から得られる背景誤差 $\mathbf{B}_{\rm e,0}$ を利用する拡張制御変数 $\chi_{\rm e,0}$ を追加する。それぞれの重みを $\beta_{\rm n}, \beta_{\rm e}$ とし、(3.1.12) 式を

$$\delta\mathbf{x}_0^{\rm b} = \beta_{\rm n}\mathbf{B}_{\rm n,0}^{1/2}\delta\chi_{\rm n,0} + \beta_{\rm e}\mathbf{B}_{\rm e,0}^{1/2}\delta\chi_{\rm e,0} \tag{3.1.63}$$

のように拡張する。このとき、背景誤差 $\mathbf{B}_0$ は

$$\mathbf{B}_0 = \beta_{\rm n,0}^2\mathbf{B}_{\rm n,0} + \beta_{\rm e,0}^2\mathbf{B}_{\rm e,0} \tag{3.1.64}$$

となる。ここで、$\mathbf{B}_{\rm e,0}^{1/2}$ は、i 番目のメンバーのアンサンブル摂動 $\delta\mathbf{x}_{e_i}$、アンサンブルメンバー総数の N_e、局所化演算子 $\mathbf{L}$ を用いて

$$\mathbf{B}_{\rm e,0}^{1/2} = (N_e - 1)^{-1/2} \times \left[\mathrm{diag}\left(\delta\mathbf{x}_{e_1}\right)\mathbf{L}^{1/2}, \cdots, \mathrm{diag}\left(\delta\mathbf{x}_{e_{N_e}}\right)\mathbf{L}^{1/2}\right] \tag{3.1.65}$$

で与える。(3.1.63) 式、(3.1.64) 式と (3.1.65) 式 から、最小化問題 (3.1.16) 式は、

$$\begin{aligned}
&\min_{\delta\chi_0^{(i)}} J\left(\delta\chi_{n,0}^{(i)}, \delta\chi_{e,0}^{(i)}\right) \\
&= \min_{\delta\chi_0^{(i)}}\left[\frac{1}{2}\left\|\delta\chi_{n,0}^{(i)}\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\delta\chi_{e,0}^{(i)}\right\|_2^2\right. \\
&+ \frac{1}{2}\left\|\hat{\mathbf{R}}^{-1/2}\hat{\mathbf{H}}\left(\beta_{\rm n}\mathbf{B}_{\rm n,0}^{1/2}\delta\chi_{\rm n,0}^{(i)} + \beta_{\rm e}\mathbf{B}_{\rm e,0}^{1/2}\delta\chi_{\rm e,0}^{(i)}\right)\right. \\
&\left.\left.-\hat{\mathbf{R}}^{-1/2}\hat{\mathbf{d}}\right\|_2^2 + J_{\rm p}\left(\delta\chi_{n,0}^{(i)}, \delta\chi_{e,0}^{(i)}\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.1.66}$$

に拡張される。局地解析におけるハイブリッド変分法手法の有用性は、藤田 (2010) で実証されているが、局所化のスケール、背景誤差の混合の割合等の詳細は、アンサンブル摂動を与えるアンサンブルシステムの設定に依存するため、性能評価を行いつつ最適な設定を検討していく必要がある。

参考文献

Andersson, E. and H. Järvinen, 1999: Variational quality control. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 697–722.

淡路敏之, 池田元美, 石川洋一, 蒲地政文, 2009: データ同化—観測・実験とモデルを融合するイノベーション. 京都大学学術出版会, 284pp.

Bannister, R. N., 2008: A review of forecast error covariance statistics in atmospheric variational data assimilation. II: Modelling the forecast error covariance statistics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 1971–1996.

Beljaars, A. C. M. and A. A. M. Holtslag, 1991: Flux Parameterization over Land Surfaces for Atmospheric Models. *J. Appl. Meteor.*, **30**, 327–341.

Buehner, M., 2005: Ensemble-derived stationary and flow-dependent background error covariances: Evaluation in a quasi-operational NWP setting. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **131**, 1013–1043.

Deardorff, J. W., 1978: Efficient Prediction of Ground Surface Temperature and Moisture, With Inclusion of a Layer of Vegetation. *J. Geophys. Res.*, **83**, 1889–1903.

Dee, D. P. and A. M. da Silva, 2003: The Choice of Variable for Atmospheric Moisture Analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 155–171.

藤田匡, 倉橋永, 2010: 局地解析. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 68–72.

藤田匡, 2010: 流れに依存する背景誤差. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 73–83.

Gal-Chen, T. and R.C.J. Somerville, 1975: On the use of a coordinate transformation for the solution of the Navier-Stokes equation. *J. Comput. Phys.*, **17**, 209–228.

原旅人, 2008: 地上物理量診断. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 181–184.

原旅人, 2012: 物理過程ライブラリの開発. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 205–208.

本田有機, 2010: 制御変数. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 14–16.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

石川宜広, 2007: ドップラーレーダーデータの利用. 平成 19 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 102–103.

気象庁予報部, 2010: 非静力学メソ 4 次元変分法. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 106pp.

小泉耕, 2004: 非静力学メソ数値予報モデルの現業化. 平成 16 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 71–74.

Lahoz, W., B. Khattatov, and R. Menard, 2010: *Data Assimilation: Making Sense of Observations.* Springer, 475pp.

Lorenc, A. C., 2003: The potential of the ensemble Kalman filter for NWP—a comparison with 4D-Var. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **129**, 3183–3203.

Purser, R. J., D. F. Parrish, and N. M. Roberts, 2003: Numerical Aspects of the Application of Recursive Filters to Variational Statistical Analysis. Part I: Spatially Homogeneous and Isotropic Gaussian Covariances. *Mon. Wea. Rev.*, **131**, 1536–1548.

Saunders, R., M. Matricardi, and P. Brunel, 1999: An improved fast radiative transfer model for assimilation of satellite radiance observations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 1407–1425.

Saunders, R., J. Hocking, P. Rayer, M. Matricardi, A. Geer, N. Bormann, P. Brunel, F. Karbou, and F. Aires, 2012: RTTOV-10 science and validation report. available from http://research.metoffice.gov.uk/research/interproj/nwpsaf/rtm/rtm_rttov10.html.

Seko, H., T. Kawabata, T. Tsuyuki, H. Nakamura, K. Koizumi, and T. Iwabuchi, 2004: Impacts of GPS-derived Water Vapor and Radial Wind Measured by Doppler Radar on Numerical Prediction of Precipitation. *J. Meteor. Soc. Japan*, **82**, 473–489.

WMO, 2008: *Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation.*

3.2 接線形・随伴モデルの実装 [1]

3.2.1 はじめに

第 1.4.3 項及び第 3.1 節で述べられているように、asuca を基にした変分法データ同化システム (asuca-Var) の開発が既に始まっており、現在 3 次元変分法ベースのシステムが完成しつつある。今後は asuca-Var を 3 次元変分法から 4 次元変分法へと拡張する計画であるが、そのためには asuca の接線形・随伴モデル (tangent linear/adjoint model: TL/AD) が必要となる。

数値予報課では asuca-Var の 3 次元変分法の開発時点で既に 4 次元変分法への拡張を見据え、TL/AD の開発方針の検討を行った。この際、現在運用されている気象庁非静力学モデル (JMA-NHM) に基づく非静力学メソ 4 次元変分法データ同化システム (JNoVA) の TL/AD 開発時の問題点を議論し、後述するように最新の予報モデルに追随可能な TL/AD の開発体制を構築することを目標とした方針を定めた上で、まず物理過程を考慮しない asuca 力学過程の TL/AD の開発から着手した。

この節では、今後 TL/AD の新規開発を行う際の検討及び新規に取り組む開発者の参考となることを目的として、asuca-Var における TL/AD の開発方針を定めるにあたり検討した内容及び実際の開発手順やその具体例を述べる。最後に今後の開発について述べる。

3.2.2 接線形・随伴モデル

TL/AD については露木 (1997) や石川・藤田 (2013) などで詳しい解説がなされているが、ここでも簡単に解説する。TL/AD は 4 次元変分法における評価関数の勾配計算やアンサンブル予報用の初期値摂動のための特異ベクトル計算に用いられる。TL は予報モデルの各処理を線形化したモデルであり、摂動の時間発展を計算する。TL 内の各処理は線形化されているため行列を用いて表すことができる。そのため、TL による 1 タイムステップの演算は行列の積を用いて表すことができる。ここで 1 タイムステップ当たり N 個の処理から成ると仮定し、摂動変数から成るベクトルを $\boldsymbol{x}$、各処理を行列 $\mathbf{M}_i (i = 1, ..., N)$ で書けるとすると、TL の 1 タイムステップにおける処理は、

$$\boldsymbol{x}(t + \Delta t) = \mathbf{M}_N \mathbf{M}_{N-1} \cdots \mathbf{M}_1 \boldsymbol{x}(t)$$

と表すことができる。対応する AD の予報変数 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ についての式は、

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{M}_1^T \cdots \mathbf{M}_{N-1}^T \mathbf{M}_N^T \hat{\boldsymbol{x}}(t + \Delta t)$$

と表される (添字 T は転置を表す)。この転置行列の積の部分が 1 タイムステップにおける AD の処理に相当する [2]。AD は TL で時間発展した摂動の初期時刻における感度を計算し、TL とは処理の流れが逆になり、摂動の時間積分は未来から初期時刻に遡って行われる。

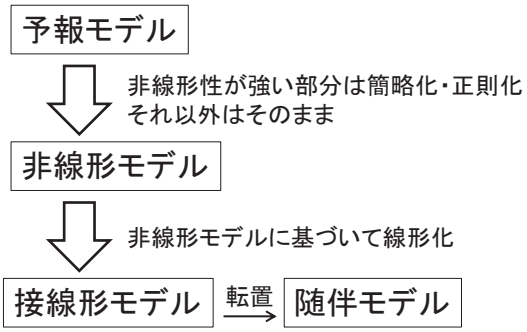

図 3.2.1 予報モデルと非線形・接線形・随伴モデルの関係。

TL 及び AD は予報モデルに基づいて作成される。しかし、予報モデルの定式化、特に物理過程において、非線形性が強い部分や条件分岐によって演算が変わる部分では、TL による予報モデルの線形近似の精度が悪化し得る。このような場合、予報モデルを簡略化あるいは正則化 (石川・藤田 2013) した上で TL/AD を作成する。簡略化・正則化が行われたモデルを予報モデルとは区別して非線形モデル (nonlinear model: NL) と呼ぶ [3]。以上の予報モデルと NL 及び TL/AD の関係を図 3.2.1 に示す。

3.2.3 開発の方針

(1) 開発の着手について

新規数値予報モデルの開発初期においては、ソースコードの大規模な改変 (多数のサブルーチン間にまたがるようなコードの修正) を伴うことが多い。そのため、開発の手戻りが発生しないよう、TL/AD の開発は予報モデルの開発がある程度進んで完成度が高くなってから開始することが肝要である。実際に asuca-Var の開発の検討を始めたのは、asuca による実データを用いた予報実験が行われ、その結果を観測データや現業モデルと比較できる段階 (河野ほか (2011) など) に達してからである。実データ実験が行える段階では、理想実験を通した力学過程のフレームに関わる基礎開発は概ね完成していると考えられ、これが TL/AD 開発検討のタイミングとして適切と考えられる。実際の作業にあたっては、今後の大規模なモデルの改変の有無についてモデル開発者と認識を共通にした上で、開発検討を開始することが望ましい。asuca 力学過程の TL/AD の開発では、このような手順を踏んだ結果、実際に作業を開始してから今日までソースコードの大規模な改変は行われていない。また asuca-Var では、3 次元変分法の開発に着手すると同時に 4 次元変分法への拡張を見据えて、力学過程の TL/AD の開発に着手した。

---

[1] 小野 耕介

[2] 実行列において転置行列と随伴行列は同義であり、このため随伴モデルと呼ばれる。また、$\mathbf{M}_i^T = \mathbf{M}_i^{-1}$ の場合に限り $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$ が成り立つが、通常は成り立たないため $\hat{\boldsymbol{x}}$ を用いた。

[3] 予報モデル自体非線形なモデルであるが、ここでは接線形・随伴モデルとの対比としてこのように呼ぶ。

(2) 開発体制について

asuca-Var の TL/AD 開発にあたっては、以下で述べるような JNoVA における開発経験を踏まえ効率的な開発体制を構築した。

JNoVA における TL/AD の問題点は、最新の予報モデルに基づいておらず、TL/AD の鉛直座標系が JMA-NHM と異なっている点が挙げられる。また、乱流や地表面過程に古いスキームが用いられているなど、最新の開発成果が反映されていない点もある。これらの影響は 3 次元変分法も含めシステム全体に影響が及んでいる (本田 2010)。さらに、JNoVA における予報モデルと TL/AD との乖離は高速化にも影響を与える。JMA-NHM は当初南北方向のみの 1 次元分割による MPI を用いた並列計算が可能であったが (石田・荒波 2003)、2006 年の水平格子間隔 5km への高解像度化の前に東西方向にも拡張されて 2 次元分割による並列計算が可能なように変更された (荒波・石田 2008)。一方で、JNoVA の開発開始は 2002 年であり (本田 2003)、それ以後に行われた 2 次元分割による並列化は TL/AD を含めコードの変更が広範囲に及ぶため反映できておらず、十分な高速化が図られていない原因となっている。

このように JNoVA において TL/AD が最新の予報モデルに基づいていない状況の背景には、従来の同化と予報モデルの開発が分離した体制の下で進められたことにより、TL/AD の開発を限られた同化開発者が手がけ、モデル開発者が直接関与する機会がほとんどなかったことが挙げられる。このような体制の下、同化開発者はまず予報モデルの特定の時点のバージョンを基に TL/AD の開発を開始する。TL/AD の開発では、サブルーチンごとに TL/AD を作成しそのコードを検証していくが、加えてモデル全体として時間積分も含めたコードの検証を行う必要がある。モデル全体の検証では、些細なミスにより検証がうまくいかないことも多く、その原因を特定するためにモデル全体から誤りを探し出す必要があるため、作業に時間がかかる傾向がある。この一方で、モデル開発者は最新の知見に基づきモデルの改良あるいは新規スキームの導入を継続していく。そのため、ある版に基づく TL/AD が一通り完成する間に、予報モデルはさらに開発が進むことから、TL/AD は最新の予報モデルより古いままという状況が続く。JNoVA の TL/AD 完成以後、幾度か予報モデルの開発成果を TL/AD に反映させる作業を続けてはいるが、その成果は一部の内容に限定されている。また、予報モデルは複数の過程から成り、各過程を専門的に扱う複数の開発者が改良を進める一方、TL/AD 開発は必ずしも各過程に関する専門的な知識及び経験を持たない同化開発者が多くの過程に対応せざるを得ない。このように、予報モデルのあらゆる過程の開発成果を少数の同化開発者だけで適切に TL/AD に反映させ維持管理していくことは作業負荷の面から

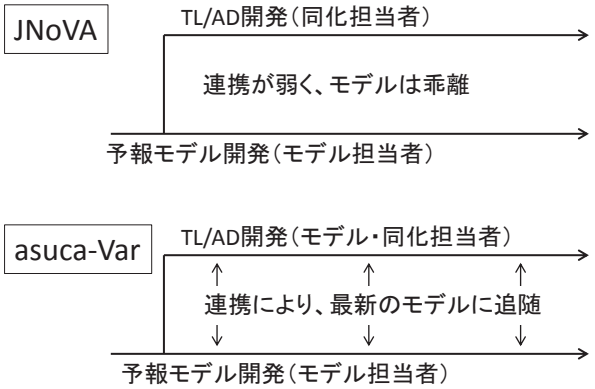

図 3.2.2 JNoVA と asuca-Var における開発体制の違い。

困難で、モデル開発者の協力が必須である [4]。また、物理過程の TL/AD においては簡略化・正則化の作業が必要とされ、物理過程開発者の知見を活かすことにより、効率的かつ性能の高い TL/AD を構築することができる。

以上の JNoVA の開発における問題点を踏まえ、asuca 力学過程の TL/AD 開発では、同化開発者が力学過程の TL/AD 開発を開始し、そのコードレビューをモデル開発者が担当することで、モデル開発者が TL/AD 開発に習熟できる体制をとった。また、TL/AD が完成したサブルーチンにモデル開発者が変更を加える場合は TL/AD も修正することで、最新版の内容を TL/AD に反映できるようにした (図 3.2.2)。以上のような開発者間の連携意識を高めるために、TL/AD 開発をする上で以下のルールを取り決めた。

1. NL 及び TL/AD は予報モデルと同一ファイル内に記述する。

2. コードレビュー体制を利用する。

JNoVA では予報モデルと TL/AD のソースコードが別管理されており、モデルと同化のそれぞれの開発者が別々に開発を行ってきたが、asuca の開発ではソースコードを一元管理することで、モデル開発者が TL/AD の開発についても意識できるようにした。このようなコードの一元管理によって、出力や物理量計算などのライブラリを、予報モデルと TL/AD で共有できるメリットもある。また開発内容のレビュー体制を通じて、コードチェックに加え、前述の通りモデル開発者が TL/AD に習熟することも目指している。

(3) コーディングルールについて

asuca-Var における TL/AD 開発においてはいくつかのコーディングルールを取り決めた。NL 及び

[4] 一方で、JNoVA では TL/AD の開発中に予報モデルの誤りを見つけるなど、モデル開発へのメリットもあった。

TL/AD は前述の通り予報モデルと同一ファイルで管理するが、サブルーチン名は基となる予報モデルのサブルーチン名に「_tlad」をつけ区別した上で、同一ファイル内に記述した。また、TL/AD のサブルーチンの呼び出しには ksw_runmode という変数を用いる。ksw_runmode はさらに上位の isw_runmode によって制御される。isw_runmode は予報モデルの実行あるいは 3 次元変分法の実行など、システム全体の動作を制御する。そして、isw_runmode で選択された全体の実行モードに応じた処理過程の実行時に、その都度必要となる適切な ksw_runmode を動的に指定した上で、各 TL/AD サブルーチンが呼び出される。実際には、isw_runmode をモデルの実行前に陽に設定し、ksw_runmode は isw_runmode に従って設定されるという動作になる。

また摂動変数を明確にするために、摂動変数には変数名に「7」をつけるように取りきめた[5]。一方で、基本場変数[6] はそのままの名前を用いている[7]。基本場変数の名前をそのままにすることで、予報モデルが更新された際に、NL の変数名を修正する手間がかからないというメリットがある (具体例は後述の図 3.2.3 を参照)。

3.2.4 実際の開発

TL/AD の作成及び検証方法については、露木 (1997)、露木 (2002)、門脇 (2002)、石川・藤田 (2013) などの文献があって、ローレンツモデルなどを用いたわかりやすい解説があり参考になる。ここでは、asuca 力学過程の TL/AD の実際の開発手順や具体例、注意すべき点を述べる。

(1) 開発手順

asuca-Var における力学過程の TL/AD 作成は以下の手順で行っている。

1. 開発ルール及びコーディングルール策定
2. 摂動変数の前処理
3. 単体で閉じたサブルーチンから TL/AD 作成
4. MPI 通信のための随伴コードを作成
5. 単体サブルーチンの集合からなる上位サブルーチンの TL/AD を作成
6. 時間積分に関する部分の作成及びコード全体の検証

開発を始めるにあたっては、前述のように開発体制とコーディングルールを取り決めてから開発に着手した (1)。まず最初に診断変数や予報変数の摂動の前処理が行えるよう前処理に摂動変数を追加し (2)、その後単体で閉じた (他サブルーチンを呼び出さない) サブルーチンから作成を進めた (3)。閉じたサブルーチンの開発は前述の文献を参考に作成し (具体例は後述)、TL 及び AD それぞれについてコード検証を行う。これらの中には通信を必要とするサブルーチンがあるので、MPI 通信部分の AD を作成する必要もある (後述、4)。単体のサブルーチンの作成が一通り終了したら、次にその集合からなる上位のサブルーチンの TL/AD を作成する (5)。これは単体のサブルーチンのコード検証が済んでいれば、問題無く作成できる。以上が完成すると、全体の時間積分に関する部分を作成し、コード全体を検証する (6)。時間積分の際、後述のように基本場の値を保持する方法が問題となる。

(2) 開発の具体例

1. 接線形/随伴コードの具体例

TL の具体例として、図 3.2.3 及び図 3.2.4 に流束制限関数を用いた物理量の x 方向のフラックス計算 (第 2.4 節) のサブルーチン calcflxx_tlad から抜粋したコードを示す。サブルーチンでは物理量 (コード上で p) から流束制限関数 (factor) を計算し、計算空間での x 方向の運動量 (mom) を用いてフラックス (flux_x) を計算するという手順になっている。この例では、予報モデルを簡略化あるいは正則化する必要がないことが確認されているため、NL は予報モデルの calcflxx と同じ内容である。

TL では、NL に IF 文による条件分岐があることと、フラックス計算が非線形であることにより基本場の値が必要となる。また NL では max 及び min 関数が使われているが、石川・藤田 (2013) で述べられている通り、条件分岐は基本場の値を用いて行うため[8]、全て IF 文を用いた条件分岐に書き直す必要がある。

一方 AD については、TL の転置を取り流れを反転させればよいが、ループの最初に基本場を計算しておく必要がある (図 3.2.4)。また次に述べるように並列処理を行うための工夫が必要となる。

2. 随伴コードと並列処理

asuca では OpenMP によるスレッド並列及び MPI によるプロセス並列の処理を導入し高速化を図っている (付録 A 参照)。ここでは、並列化の際に AD において注意すべき点を述べる。

asuca では OpenMP を用いたスレッド並列が用いら

[5] 一般に摂動変数を表す際にはダッシュ「'」がよく使われ、「7」に似ているため。

[6] 予報モデルが非線形な場合、予報変数の値が TL の摂動計算において必要となり、予報モデルにおける予報変数とは区別してこのように呼ぶ。具体例は図 3.2.3 及び 3.2.4 参照。

[7] JNoVA では基本場変数名の最後に「9」をつけ、摂動変数はそのまま用いていた。

[8] TL のコード検証では、NL による摂動 $M(x+\Delta x)-M(x)$ を計算する必要があるが、$M(x+\Delta x)$ の計算における条件分岐では摂動を含む変数 $x+\Delta x$ を用いる。

```
subroutine calcflxx_tlad( flux_x7, p7, mom7, &
     & flux_x, is, ie, js, je, ks, ke, p, mom )

use parameter_vars, only : ksw_runmode, &
     & ksw_runmode_nl, ksw_runmode_bs,  &
     & ksw_runmode_tl, ksw_runmode_ad
integer(4), parameter:: dp = kind(1.0d0)
integer(4), parameter:: rp = dp
real(rp), parameter :: r3 = 1._rp / 3._rp

! nonlinear
if ( ksw_runmode == ksw_runmode_nl ) then
  do j = js, je
  do i = is, ie
  do k = ks, ke
    if( mom(k,i,j) > 0.d0 )then
      x1 = p(k,i  ,j) - p(k,i-1,j)
      y1 = p(k,i+1,j) - p(k,i,j)
      z1 = (x1 * 0.5_rp + y1) * r3
      if ( y1 > 0._rp ) then
        factor = max( 0._rp, min(x1, y1, z1) )
      else
        factor = min( 0._rp, max(x1, y1, z1) )
      endif
      flux_x(k,i,j) = p(k,i  ,j) + factor
      flux_x(k,i,j) = mom(k,i,j) * flux_x(k,i,j)
    else
       .
       .
    endif
  end do
  end do
  end do

! tangent linear
elseif ( ksw_runmode == ksw_runmode_tl ) then
  do j = js, je
  do i = is, ie
  do k = ks, ke
    if( mom(k,i,j) > 0.d0 ) then
      ! Basic field
      x1 = p(k,i  ,j) - p(k,i-1,j)
      y1 = p(k,i+1,j) - p(k,i,j)
      z1 = (x1 * 0.5_rp + y1) * r3
      ! TL
      x17 = p7(k,i,j) - p7(k,i-1,j)
      y17 = p7(k,i+1,j) - p7(k,i,j)
      z17 = (x17 * 0.5_rp + y17) * r3
      if ( y1 > 0._rp ) then
        ! Basic field
        factor = max( 0._rp, min(x1, y1, z1) )
        ! TL
        if    (x1<y1.and.x1<z1.and.x1>0._rp) then
           factor7 = x17
        elseif(y1<x1.and.y1<z1.and.y1>0._rp) then
           factor7 = y17
        elseif(z1<x1.and.z1<y1.and.z1>0._rp) then
           factor7 = z17
        else
           factor7 = 0._rp
        endif
      else
         .
         .
      endif
      ! Basic field
      flux_x(k,i,j) = p(k,i,j) + factor
      ! TL
      flux_x7(k,i,j) = p7(k,i,j) + factor7
      flux_x7(k,i,j) = mom7(k,i,j) * flux_x(k,i,j)
           & + mom(k,i,j) * flux_x7(k,i,j)
    else
       .
       .
    endif
  end do
  end do
  end do
```

図 3.2.3　サブルーチン calcflxx_tlad から非線形コード及び接線形コードを抜粋したもの。p が任意の物理量、mom が x 方向の運動量を表し、そのフラックス flux_x を計算する。

```
! adjoint
elseif ( ksw_runmode == ksw_runmode_ad ) then

  do j = js, je
  do i = is, ie
  do k = ks, ke
    if( mom(k,i,j) > 0.d0 ) then
      ! Basic Field
      x1 = p(k,i ,j) - p(k,i-1,j)
      y1 = p(k,i+1,j) - p(k,i,j)
      z1 = (x1 * 0.5_rp + y1) * r3
      if ( y1 > 0._rp ) then
        factor = max( 0._rp, min(x1, y1, z1) )
      else
        factor = min( 0._rp, max(x1, y1, z1) )
      endif

      ! AD
      mom7(k,i,j) = &
       & (p(k,i,j) + factor) * flux_x7(k,i,j)
      p7(k,i,j) = &
       & p7(k,i,j) + mom(k,i,j) * flux_x7(k,i,j)
      factor7 = mom(k,i,j) * flux_x7(k,i,j)
      flux_x7(k,i,j) = 0._rp
      if ( y1 > 0._rp ) then
        if ( x1 < y1 .and. x1 < z1 &
             &       .and. x1 > 0._rp ) then
          x17 = factor7
          factor7 = 0._rp

          p7(k,i,j)   = p7(k,i,j)   + x17
          p7(k,i-1,j) = p7(k,i-1,j) - x17
          x17 = 0._rp
        elseif ( y1 < x1 .and. &
             &   y1 < z1 .and. y1 > 0._rp ) then
          y17 = factor7x
          factor7 = 0._rp

          p7(k,i+1,j) = p7(k,i+1,j) + y17
          p7(k,i,j)   = p7(k,i,j)   - y17
          y17 = 0._rp
        elseif ( z1 < x1 .and. &
             &   z1 < y1 .and. z1 > 0._rp ) then
          z17 = factor7
          factor7 = 0._rp

          x17 = 0.5_rp * r3 * z17
          y17 = r3 * z17
          z17 = 0._rp

          p7(k,i+1,j) = p7(k,i+1,j) + y17
          p7(k,i,j)   = p7(k,i,j)   - y17
          y17 = 0._rp

          p7(k,i,j)   = p7(k,i,j)   + x17
          p7(k,i-1,j) = p7(k,i-1,j) - x17
          x17 = 0._rp
        else
          factor7 = 0._rp
        endif
      else
         .
         .
      endif
    else
       .
       .
    endif
  end do
  end do
  end do
end if
return
end subroutine calcflxx_tlad
```

図 3.2.4　図 3.2.3 の続き。サブルーチン calcflxx_tlad から随伴コードを抜粋したもの。

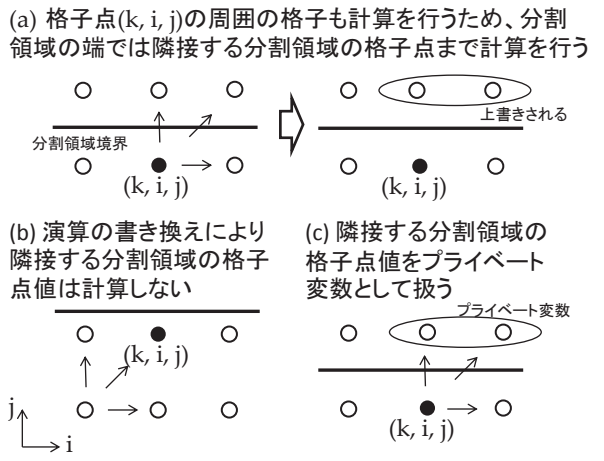

図 3.2.5 平均値計算に対する AD 及びその並列化ための模式図。実線がスレッド並列分割領域の境界を表し、丸が格子点を表す。

れており、kij 方式 (付録 A 参照) では最も外側の j 方向 (南北方向) においてスレッド並列を行う。一般にループの中で、NL と TL で計算対象となる格子が変わることは無いが、AD では変わる場合がある。簡単な例として、ある摂動変数 (x7) の周囲の格子点の平均 (y7) を求める計算を考える [9]。このときの TL は、

```
y7(k,i,j) = (x7(k,i,j)+x7(k,i+1,j)
     + x7(k,i,j+1)+x7(k,i+1,j+1))*0.25
```

で表される。これに対応する AD は TL を機械的に変換すると (変数 x7 が TL においてこの処理の後も使われると仮定する)、

```
x7(k,i,j)=x7(k,i,j)+0.25*y7(k,i,j)
x7(k,i+1,j)=x7(k,i+1,j)+0.25*y7(k,i,j)
x7(k,i,j+1)=x7(k,i,j+1)+0.25*y7(k,i,j)
x7(k,i+1,j+1)=x7(k,i+1,j+1)+0.25*y7(k,i,j)
y7(k,i,j)=0.0
```

と書くことができ、周囲の格子点を含む加算に置き換わることがわかる。上記のコードにおいて並列化による領域分割を考えると、分割領域の端では分割領域境界をまたいで隣接する他スレッドの格子点値まで計算してしまう (図 3.2.5(a) 参照)。このため隣接スレッドでは、既に計算済みであった格子点値が他スレッドによって上書きされ得る状況が発生する。このようにループの中で、自スレッドで計算済みの値が他スレッドによって上書きされることをループ運搬依存と呼ぶ。ループ運搬依存が発生すると正しい計算結果が得られないため、NL や TL と同じように並列化を適用することができない。したがって、コードに何らかの工夫が必要となる。

[9] 同じような計算として、asuca ではベクトルポイントの予報変数である風をスカラーポイントで用いる際の診断などがある。

現在の開発では、kij 方式の k の手前に OpenMP 指示文を入れ、鉛直方向にスレッド並列を行うようにしている。しかしこれだけでは i, j ループのたびにスレッド並列の開始と終了処理が行われ、演算速度が低下してしまう可能性がある。そこでループの順序を kij から ijk へと変更し k 方向にスレッド並列を行うように変更した。これにより、メモリアクセスは不連続になるがスレッド並列の開始と終了処理を減らすことができる。

この方法の他に上記の x7 の演算を、

```
x7(k,i,j) = (y7(k,i,j)+y7(k,i-1,j)
     + y7(k,i,j-1)+y7(k,i-1,j-1))*0.25
```

と書き換え、ループ内における隣接格子への依存をなくすことでスレッド並列が可能となる [10](図 3.2.5(b))。ただしループの端の x7 の演算は別途書き直し、y7=0.0 の演算をループの外で行うよう修正が必要である。

また、OpenMP の REDUCTION 変数を用いる方法も考えられる。これは隣接スレッドの格子点値をプライベート変数として扱い、ループ終了後に共有変数として合算を行うことで、コードの書き換えなしにスレッド並列が可能になる [11](図 3.2.5(c))。これは機械的に作成した AD に変更を加えず、指示文を挿入するだけでスレッド並列を行うことができ、簡便な手法であると考えられる。

以上のように AD に OpenMP を用いたスレッド並列を適用する際は、いずれの手法を採用するにしても、その手法は開発者間で統一しておく必要がある。また AD の作成には時間を要するため、一度 OpenMP による並列化を意識せずに AD を構築し、完成後に採用した手法によって OpenMP 化を機械的に進めることも開発上効率的であると考えられる。

次に MPI によるプロセス並列を用いる場合を考える。ノード間通信のためには AD が必要であり、これは以下の簡単な例からわかる。例えば、計算領域上の変数 x, y が共に MPI 分割領域の端に位置し、互いに分割領域境界をまたいで隣り合っているとする。また、それぞれの分割領域ののりしろ変数を a, b とする。ここでは x を b へ、y を a へ通信することを考える (図 3.2.6)。この処理を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ y \end{pmatrix}$$

[10] JNoVA では、スーパーコンピュータ上のコンパイラによる自動スレッド並列を用いており、AD ではこの手法を採用している。

[11] プライベート変数は各スレッドに独自の値を持たせる変数であり、共有変数は各スレッドが値を共有する変数である。

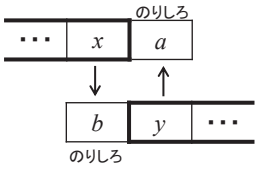

図 3.2.6　MPI 通信の模式図。太枠内が計算領域を表す。

と書ける。この行列の転置をとると、

$$\begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ a \\ b \\ y \end{pmatrix}$$

が得られ、b の値を x に、a の値を y に加算した上で、a, b をゼロクリアする処理となる。NL/TL と AD は MPI 通信の処理が異なり、通信の方向が反転している (AD では図 3.2.6 の矢印の向きが逆になる) ことに注意を払う必要がある。

(3)　開発の進捗

本稿の執筆時点では、各サブルーチンの TL/AD 開発は完了しており、TL の時間積分を行いその線形性が成り立つことを確認したところであり、AD の時間積分を行う作業に取り組んでいる。

TL の基本場の保存方法については、JNoVA ではショートタイムステップを含め、サブルーチン内で基本場を直接計算する場合を除き、基本場は全てメモリ上に保持しており (本田 2010)、今回の開発でもこの方法を踏襲した。しかし asuca では、時間積分に 3 段階ルンゲクッタ法を採用しており (第 2.3 節参照)、1 タイムステップの時間積分を行う際に、ショートタイムステップの中にもルンゲクッタステップが存在する [12]。将来インナーモデルがさらに高解像度化することを想定すると、全ての基本場をメモリ上に保持できない可能性もある。この場合は、各タイムステップにおける基本場のみを保持し、TL/AD 計算の際にルンゲクッタステップにおける基本場を計算し直す必要があると考えている。

3.2.5　今後の開発

ここまで述べてきたように、asuca-Var における力学過程の TL/AD 開発では、JNoVA での開発経験を踏まえ、将来に渡り継続可能な拡張性の高い開発を目指す方針を定めた上で作業を進めており、力学過程の TL/AD の完成後に物理過程の TL/AD の開発に着手する予定である。物理過程については前述のとおり、力学過程と比較してコードが複雑であり、改良によるコードの変更も頻繁に行われるため、モデル開発者による TL/AD の修正が開発継続にとって必須である。実際の物理過程の TL/AD 開発を通し、ここで述べた開発ルールに対する更なる改善等を行った場合については別の機会に報告したい。

[12] asuca ではショートタイムステップのステップ数は音波による CFL 条件を満たすよう格子間隔及び積分時間間隔から自動的に計算している。現 JNoVA を想定して水平解像度 15km、時間積分間隔 40 秒でステップ数を見積もると 12 ステップとなり、現 JNoVA のインナーモデルにおけるショートタイムステップ数 7 に比べ多くなることがわかる。

参考文献

荒波恒平, 石田純一, 2008: 並列化と高速化. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 58–65.

本田有機, 2003: 4 次元変分法データ同化システム:開発報告. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 144–147.

本田有機, 2010: 接線形・随伴モデル. 数値予報課報告・別冊第 56 号, 気象庁予報部, 9–13.

石田純一, 荒波恒平, 2003: 並列化. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 107–111.

石川宜広, 藤田匡, 2013: 4 次元変分法の開発と物理過程の課題. 数値予報課報告・別冊第 59 号, 気象庁予報部, 152–187.

門脇隆志, 2002: 変分法で使用するコードの検証方法. 数値予報課報告・別冊第 48 号, 気象庁予報部, 85.

河野耕平, 荒波恒平, 原旅人, 北村祐二, 室井ちあし, 2011: 気象庁非静力学モデル asuca の開発状況. 第 13 回非静力学モデルに関するワークショップ講演予稿集.

露木義, 1997: アジョイントコードの書き方. 数値予報課報告・別冊第 43 号, 気象庁予報部, 155–165.

露木義, 2002: アジョイントコードの書き方の補足. 数値予報課報告・別冊第 48 号, 気象庁予報部, 65–70.

第 4 章　物理過程の実装

4.1　asuca における物理過程の組み込みの考え方 [1]

4.1.1　時間変化率の取り扱い

asuca における物理過程の実装にあたって考慮すべき点の一つに時間変化率の取り扱いがある。図 4.1.1 は、asuca における時間積分ループの模式図 (荒波ほか 2012) であるが、一般に、力学、物理を含めた複数の過程による時間変化率の相互の取扱いには任意性がある。この問題は、力学—物理過程カップリング (たとえば Dubal et al. (2006) など) と呼ばれ、計算安定性や計算精度に関わる重要な課題の一つである。時間変化率

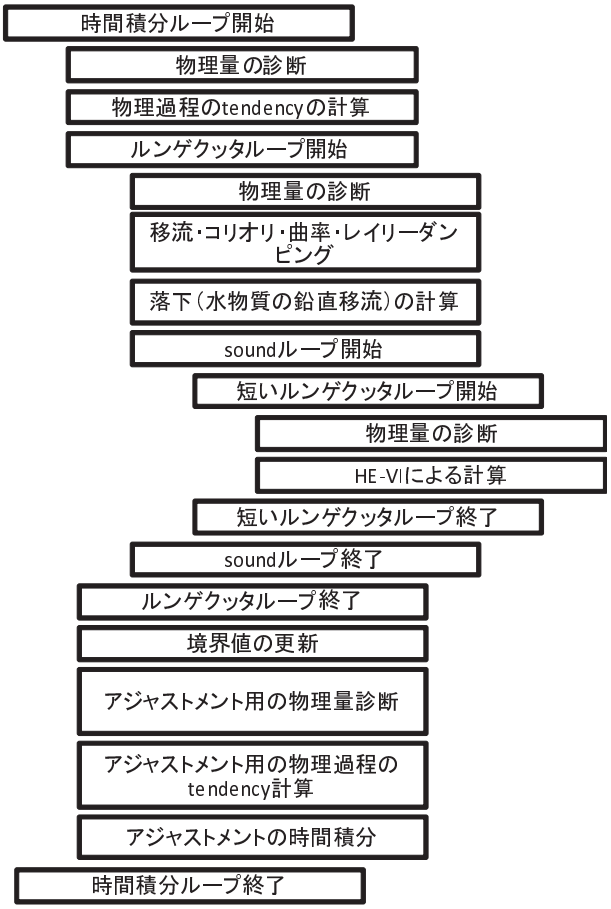

図 4.1.1　asuca の時間積分ループ。荒波ほか (2012) より。

の取り扱いには、 大きく分けてパラレルスプリッティングとシーケンシャルスプリッティングと呼ばれる 2 つの方法がある。パラレルスプリッティングでは、ある物理量 ϕ を時刻 n から積分する際、各過程の時間変化率を時刻 n の状態から独立に求める。Malardel (2013) の表記に従うと、次のように記述できる。

$$\mathrm{d}\phi = \left.\frac{\partial \phi^n}{\partial t}\right|_1 \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial \phi^n}{\partial t}\right|_2 \mathrm{d}t + \cdots + \left.\frac{\partial \phi^n}{\partial t}\right|_i \mathrm{d}t + \cdots \tag{4.1.1}$$

ここで、時間変化率の添字 $1, 2, ..., i$ は、それぞれの過程を表す。一方、時間積分間隔 Δt と比較して、パラメタライズする現象の時間スケールが短い場合には、時間変化率の計算に際し、別の過程による Δt 間の物理量の変化を取り込む必要があり、これを取り扱うのがシーケンシャルスプリッティングである。シーケンシャルスプリッティングでは、

$$\mathrm{d}\phi = \left.\frac{\partial \phi^n}{\partial t}\right|_1 \mathrm{d}t + \left.\frac{\partial \phi^1}{\partial t}\right|_2 \mathrm{d}t + \cdots + \left.\frac{\partial \phi^{i-1}}{\partial t}\right|_i \mathrm{d}t + \cdots \tag{4.1.2}$$

のように、表すことができる。ここで、上付き添字の $1, 2, ..., i-1$ は、それぞれ各過程での時間変化率が、その前に計算した過程の時間変化率を加味した場を用いて計算されることを示す [2]。

パラレルスプリッティングで計算する複数の過程の時間スケールが短い場合に問題が大きくなる例を考察する。たとえば、力学と雲物理過程で問題が起きうるケースとして、上空である程度大きな量の霰 (あられ) が計算され、それが気温 0 度を超える層に落下してきているような状況を考える。パラレルスプリッティングの場合には、その大きな霰の値を元に、霰が融解する時間変化率が計算されると同時に、鉛直移流により、その大きな量の霰が別の格子に移っていく時間変化率が独立に計算される。それぞれの時間変化率が、時間積分後の値が負にならないように設計されていたとしても、独立に計算されたこれらの時間変化率の合計により、時間積分後の値が負にならないことは保証されない。一方、シーケンシャルスプリッティングを用いれば、一旦移流により求められた値を仮積分値として、その仮積分値をもとに時間変化率が計算されるので、最終的な物理量は負にならないことが担保される。このような極端な例に限らずとも、シーケンシャルスプリッティングでは、別の過程による時間変化率が取り込まれるため、異なる過程によって得られる時間変化率を、より整合の取れた形で扱うことができる。このとき、現象のタイムスケールが長い過程から順に計算すること、すなわち計算の順序が重要であることも実装に際して注意すべきポイントの一つである。

[1] 荒波 恒平 (第 4.1.1 項)、石田 純一 (第 4.1.2 項)

[2] 仮の時間積分値という意味で時刻レベルと同じく上付きで示されているものと考える。

4.1.2 力学過程と物理過程で用いる変数の違い

asuca への物理過程の組み込みにおいては、物理過程で計算される時間変化率と力学過程で扱う基礎方程式の時間変化率とを合わせて時間積分を行うことが必要となる。その際に、力学過程の定式化の考え方と物理過程の定式化の考え方が異なることがあり、数値予報モデルの予報変数としての物理量と、物理過程が用いる物理量が異なりうる。従って、数値予報モデルが必要とする時間変化率と物理過程が算出する時間変化率で物理量が同一とは限らないといった問題がある。

一般に、数値予報モデルの力学過程の構築にあたっては、第 2.6.1 項で述べた通り、様々な予報変数を取ることが可能である。例えば、asuca においては質量保存の式、運動量保存の式、温位保存の式、水物質の保存の式から実際に用いる方程式系を導出する（第 2.1 節）。その際に、水物質の保存の式では、水物質の密度の全密度に対する比 q_α （$\alpha = v, c, r, i, s, g$ でそれぞれ水蒸気、雲水、雨、雲氷、雪、霰を表す）を用いる。また、乾燥大気の状態方程式を湿潤大気に拡張するために、

$$\theta_m = \theta \left(1 + \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) q_v - \sum_{\alpha \neq v} q_\alpha \right) \tag{4.1.3}$$

で表される物理量 θ_m を導入する（ここで、θ は温位、ϵ は乾燥大気の気体定数 R_d と水蒸気の気体定数 R_v の比）。また、座標変換を行うことにより、予報変数は物理量にヤコビアンを乗じたものとなる。さらに、気圧傾度力項と浮力項の計算における桁落ち誤差を避けるために、密度 ρ と $\rho\theta_m$ を基本場と偏差に分けている。これらはそれぞれの数値予報モデルにおいて工夫するところであり、一般にはモデルによって方式が異なる。

一方、物理過程の構築に際しては、各プロセスにおいて独立に定式化を行っている。例えば、JMA-NHM で用いられているバルク法雲物理過程 (原 2012a) については水物質の密度と湿潤大気の密度の比を用いて様々な素過程の計算を行い、この時間変化率を求める。また、相変化に伴う熱の時間変化率は温位の時間変化率として求められる。JMA-NHM の場合は温位を予報変数としているため、雲物理過程が計算する温位の時間変化率を用いてそのまま時間積分できる。しかし、asuca における予報変数は $\rho\theta_m$ の基本場からの偏差であるため [3]、何らかの対応が必要となる。また、asuca で用いる水物質の密度の全密度に対する比と雲物理過程で用いる水物質の密度の湿潤大気の密度の比の違いも考慮しなければならない。

このような場合の対応として以下の 2 点が考えられる。

1. 物理過程の定式化の過程において、力学過程と同様に変数変換・座標変換を行い、力学過程と物理過程とで同じ物理量を用いる。
2. 予報変数を物理過程で用いる物理量に変換して物理過程に与え、物理過程で計算したある物理量の時間変化率を予報変数の時間変化率に変換する。

1 の対応は 2 の対応と比べて余計な変換を伴わない分、高速な動作が期待できる反面、力学過程に合わせて物理過程の定式化からやり直す必要があるなど、開発コストは増大する。2 の対応は逆に、物理量の変換を考慮する必要があるものの、既存の物理過程の導入が比較的容易となること、他のモデルと物理過程を共用できること、といった長所がある。物理過程で求めた時間変化率を asuca の予報変数へ変換する場合、たとえば、雲物理過程で $\Delta\theta, \Delta q_\alpha$ が計算されたとすると、予報変数 $\rho\theta_m/J$ の時間変化率へ変換する必要があり（ここで、J は座標変換のヤコビアン）、ρ の時間変化がないものとして

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{J} \rho\theta_m \right) &= \frac{\rho}{J} \Delta (\theta (1 + \frac{q_v}{\epsilon} - \sum_\alpha q_\alpha)) \\ &\approx \frac{\rho}{J} \{ \Delta\theta (1 + \frac{q_v}{\epsilon} - \sum_\alpha q_\alpha) + \theta (\frac{\Delta q_v}{\epsilon} - \sum_\alpha \Delta q_\alpha) \} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

のように求めることができる [4]。なお、これは $\Delta\theta\Delta q_\alpha$ のようなクロスタームを微小として省略していることに相当する。

現業モデルである JMA-NHM の後継として asuca を利用するという観点では、JMA-NHM に組み込まれている物理過程のうち、まず最初に現業モデルで利用されているものを原則的にそのまま移植する [5] ことを考えている。原 (2012b) による物理過程ライブラリは、当初から asuca と JMA-NHM の物理過程のプログラムコードの共有化が念頭におかれており、この目的に適していることから、物理過程ライブラリを導入することとしている。物理過程ライブラリの概念図を図 4.1.2 に示す。物理過程ライブラリは複数のモデルから利用されることが念頭におかれており、図中の “`Vars`” と “`Tendency`” は、それぞれライブラリに渡す物理量とライブラリから出力される物理量の時間変化率である。予報モデルが扱う物理量は予報モデルによって異なる場合があり、物理過程ライブラリを利用する場合には、それぞれ予報変数から適切にライブラリに渡す物理量へ変換し、出力された時間変化率を予報変数の時間変化率に変換する必要がある。即ち、上述の 2 の考え方に基づく対応を意味する。

[3] さらに、ヤコビアンも考慮する必要がある。

[4] JMA-NHM で用いられている雲物理過程では、水物質の密度と湿潤大気の密度の比を用いているので、水物質の密度と全密度の比への変換も必要となる。

[5] ただし、既存の物理過程に問題があれば、修正を行うことは必然であり、その場合は現業モデルで利用しているものとは厳密には異なりうる。

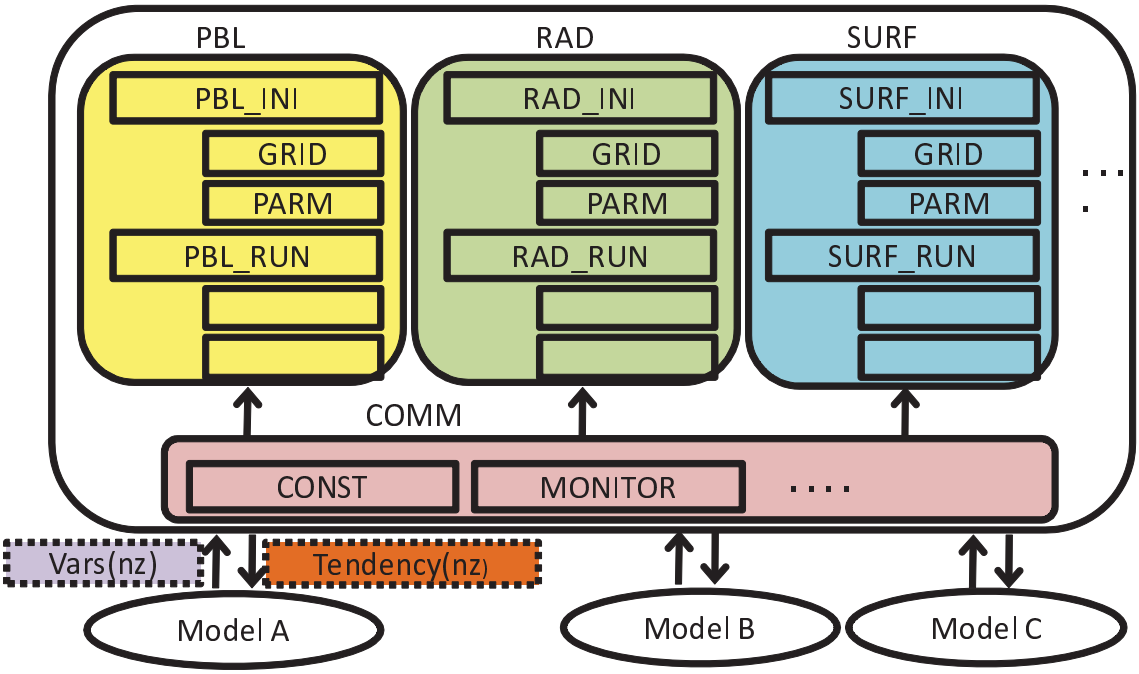

図 4.1.2　物理過程ライブラリの概念図。原 (2012b) より。複数の予報モデルから利用可能なように設計されている。“Vars(nz)” と “Tendency(nz)” はそれぞれライブラリに渡す物理量とライブラリの出力である時間変化率を表す。予報モデルはそれぞれ物理量及び時間変化率の変換を行う。また、物理過程ライブラリは鉛直 1 次元による実装となっており、“Vars(nz)” と “Tendency(nz)” は鉛直 1 次元の配列である。ただし、nz は鉛直層数を表す。

4.2　asuca における物理過程の実装の例 [1]

4.2.1　境界層・地表面・放射過程の実装

境界層・地表面・放射過程については、第 4.1 節 で述べた通り、物理過程ライブラリ (原 2012b) を用いる。また、これらの過程については、相対的に遅い過程 (slow physics) と考え、第 4.1.1 項で述べたシーケンシャルスプリッティングでなく、パラレルスプリッティングとしている。この場合、3 段階ルンゲクッタ法の各ステップで計算する方法と、最初のステップで時間変化率を計算して 3 段階ルンゲクッタ法のステップ中は同じ値を使う方法があり、計算効率の観点から後者を採用している。なお、JMA-NHM で採用しているリープフロッグ法では、積分時間間隔を Δt_{LF} としてこれらの物理過程は $2\Delta t_{\mathrm{LF}}$ で時間積分を行っている (荒波ほか 2012)。一方、asuca で採用している 3 段階ルンゲクッタ法では、積分時間間隔を Δt_{RK3} とした場合、上記の方法は Δt_{RK3} で時間積分を行うことに相当する。経験的に $\Delta t_{\mathrm{RK3}} \sim 2\Delta t_{\mathrm{LF}}$ の関係があり [2]、上記のように計算する場合の物理過程の計算安定性は、JMA-NHM における安定性とほぼ同じになると期待できる。

さて、草開 (2012) で述べられている通り、境界層過程と地表面過程はインプリシットに結合される必要があり、計算順序に依存関係がある。また、地表面熱収支の計算に必要な短波放射と長波放射は放射過程の出力であり、放射過程と地表面過程の順序に依存関係がある。そのため、パラレルスプリッティングであっても完全に計算順序が自由となるわけではなく、組み込みに際しては以下の 1 から 4 の順序となる。

1. 放射過程
2. 地表面過程
3. 境界層過程
4. 地表面過程と境界層過程のカップラー

なお、これらの物理過程の組み込みにあたっては、物理過程ライブラリに含まれる GABLS2、GABLS3 のテスト (原 2012b) のための鉛直 1 次元モデルを参考にしている。従って、この計算順序はそこで採用されているものと全く同じである。

これらの物理過程の実装においては、付録 A.1 にある通り、水平方向のループを外側として OpenMP によるプロセス内の並列化を適用し、その中で、上述の順序でそれぞれの物理過程のサブルーチンをコールする。asuca における 3 次元変数や水平のみの 2 次元変数は、物理過程ライブラリに引き渡す際には鉛直 1 次元の変数やスカラー変数となる（図 4.1.2 も参照のこと）。

[1] 石田 純一、原 旅人 (第 4.2.1 項)、荒波 恒平、原 旅人 (第 4.2.2 項)

[2] 例えば、JMA-NHM による LFM においては $\Delta t_{\mathrm{LF}} = 8$ 秒であるが、LFM に向けた asuca においては $\Delta t_{\mathrm{RK3}} = 50/3 \simeq 16.666$ 秒でテストしている。

```
!$OMP PARALLEL DO &
!$OMP PRIVATE(pt_lc, qv_lc) &
!$OMP PRIVATE(tend_pt_lc, tend_qv_lc)
do j = 1, ny
do i = 1, nx
  ! ファーストタッチの例
  ! 変数へ値を代入する時点で、
  ! ローカルにメモリが確保される。
  do k = 1, nz
    ...
    pt_lc(k) = pt(k,i,j)
    qv_lc(k) = qv(k,i,j)
    ...
  end do
  ...
  ! 物理過程ライブラリの呼び出し
  call A(pt_lc, qv_lc, ...)
  call B(pt_lc, qv_lc, ...)
  ...
  ! 物理過程が計算する鉛直 1 次元の時間変化率を
  ! 3 次元の配列に詰め替える。
  do k = 1, nz
    ...
    tend_pt(k,i,j) = tend_pt_lc(k)
    tend_qv(k,i,j) = tend_qv_lc(k)
    ...
  end do
end do
end do
!$OMP END PARALLEL DO
```

図 4.2.1 ファーストタッチを適用した物理過程ライブラリの利用例。

これらの変数はライブラリの計算において頻繁に参照されることが考えられるため、「ファーストタッチ」によるメモリ割り当てを行い、メモリアクセスの高速化を試みている。ファーストタッチとは、最初にデータを参照したときに、メモリに領域を確保することを指す。OpenMP による並列化においては、プロセス内のスレッドはメモリを共有することを前提としている。しかし、プロセッサから共有メモリへのアクセス速度が均等でないアーキテクチャがある [3]。例えば、現在のスーパーコンピュータシステムで用いる SR16000M1 においては、プロセッサ直下のメモリ（ローカルメモリ）へのアクセス速度と直下でないメモリ（リモートメモリ）へのアクセス速度が異なり、ローカルメモリの方が高速である。そのような場合、メモリアクセス速度が速いメモリに領域を確保することが高速化につながる。そこで、OpenMP による並列化を適用した後に、物理過程ライブラリに引き渡す変数を確保・値の設定を行うこととしている。プログラムの利用例を図 4.2.1 に示す。

pt_lc と qv_lc は一見、無駄なコピーを行っているように見える。しかし、変数 pt，qv はローカルメモリに確保されている保証がない一方、pt_lc，qv_lc は各スレッドでメモリが確保され、その際にローカルメモリが用いられることが期待できる。そのため、メモリアクセスが頻繁に行われる場合は、高速化の利点が見込まれる。また、コーディング上、物理過程ライブラリへの引数とする変数を明示することによる分かりやすさも利点になると考えている。なお、第 4.1 節で述べたように、予報変数と物理過程ライブラリの中で用いる変数が異なる場合は要素変換が必要となる。図 4.2.1 の例における pt，qv は、それぞれ θ, q_v を表しているが、実際の予報変数は $(\rho\theta_m)'/J$, $\rho q_v/J$ であり、予報変数からこれらの物理量へ変換（診断）を行っている。同じ変数が複数箇所で参照される場合には、まとめて診断を行う方が効率的と考えられるが、そうでない場合は、ファーストタッチによるメモリ確保と同時に変数変換も行うとより効率的だろう。

4.2.2 雲物理過程の実装

物理過程ライブラリには、JMA-NHM に組み込まれているバルク法雲物理過程が導入されている (原 2012a)。この雲物理過程は、基本的には JMA-NHM における実装を鉛直 1 次元化したものであるが、asuca における定式化、すなわち水物質の落下速度を鉛直移流に含めて取り扱うことができるようになっている。具体的には、落下速度による時間変化率を計算する部分を独立したサブルーチンとし、雲物理過程により計算される時間変化率から除く、などの変更が加えられている。asuca の雲物理過程は、前節の原則に従い、物理過程ライブラリに組み込まれている JMA-NHM の雲物理過程を利用する。

力学過程と雲物理過程をパラレルスプリッティングで扱うことによる問題点は第 4.1.1 項に述べた通りである。また、雲物理過程には、粒径分布に (陽には) よらない過程 (原 2012a) 等、速い過程が含まれていることを考慮する必要がある。そこで、asuca では雲物理過程に関してはシーケンシャルスプリッティングを用いることとした。すなわち、図 4.1.1 のアジャストメントの部分に雲物理過程が実装されており、時間積分全体の構造としては、境界層、地表面過程および放射過程の時間変化率を用いて力学過程による積分が行われた後、この値を仮積分値として、雲物理過程による時間変化率の計算が行われる。

asuca への雲物理過程の組み込みにあたって必要な作業は、前項の放射、境界層、地表面過程と同様、

- asuca の予報変数から、(鉛直 1 次元のカラム毎に)

[3] このようなアーキテクチャを NUMA (Non-Uniform Memory Access) と呼ぶこともある。

物理過程の入力となる物理量に変換する。
- 物理過程ライブラリにあるテストケースのサブルーチンを参考に、インターフェースサブルーチンを呼ぶ部分を記述する。
- 返ってきた時間変化率を、asuca の予報変数の時間変化率になおす。

であり、物理過程ライブラリおよび asuca 双方が開発効率を意識して独立性の高い設計になっていることにより、非常に容易に実装することができる。

一方で雲物理過程は、特に高解像度において、力学過程との相互作用により計算結果が変わってくるため、組み込みのテストにおいては様々な検討が必要である。前述したように、たとえば asuca と JMA-NHM では、その定式化、離散化等の違いから、必然的に実装についても異なる部分があり、これらを比較するには、部品の評価だけでなくある程度総合的な観点で現象を見るテストも必要になる。そこで、第 4.3.4 項 で示されている TRMM-LBA field campaign の観測結果に基づくテストケースを使って実験し、文献にある結果と比較することに加え、実データを用いた予報も行って、簡単に結果を比較した。TRMM-LBA によるテストケースの結果については第 4.3.4 項を参照いただきたい。

物理過程ライブラリ、asuca 双方が開発効率を考慮して、独立性の高い設計となっていることにより、他の物理過程同様、組み込み自体は非常にスムーズに行えることが改めて確認できた。JMA-NHM のものの他に、独自の実装による再構成を進めている雲物理過程についても、一旦物理過程ライブラリの枠組みでのテストが十分に行われれば、asuca への組み込みは、非常に容易であることが期待できる。実モデルへの導入のハードルが大きく下がることで、導入によって得られる知見をスキームの改良そのものに活かすフィードバックも期待される。

4.3 物理過程を含むモデルとしての asuca の評価 [1]

4.3.1 asuca の鉛直 1 次元での利用

モデルの開発工程の中では、力学過程がある程度できあがってから物理過程の組み込みを行うことが多い。従って、物理過程を含むモデルでテスト・評価を行うと、その結果は力学過程と物理過程の両方の寄与を評価することとなる。しかし、物理過程の組み込みにおいては、第 4.1.1 項で述べた力学–物理過程カップリングの問題があり、計算安定性や精度に影響を及ぼすことから、その検証のためには力学過程の理想実験と同様に、単純化して何らかのリファレンスと比較する必要がある。その際に、物理過程の開発者が行った鉛直 1 次元モデルの結果は大いに参考となる。

物理過程ライブラリの結果と比較するにあたって、asuca を鉛直 1 次元モデルとして利用した際の注意事項を簡単にまとめておく。これは、asuca に純粋に鉛直 1 次元の計算を行うオプションを持たせるのではなく、いくつかの仮定を設けることにより鉛直 1 次元で動作するとみなしているためである。

asuca は水平移流等の水平方向に隣接する格子を参照するために、いわゆるのりしろ領域 (幅 2 格子) をもっている。鉛直 1 次元モデルとして利用する際も同様であり、実際の計算領域（水平）が 1×1 であるのに対して、それよりも広い領域をのりしろとして持ち、のりしろ領域を含めて、全てのカラムに同一の鉛直プロファイルを与える。これにより全てのカラムで同じ計算を行うことになる。この方法は鉛直方向の計算のみが必要なときは無駄であるが、鉛直 1 次元モデルは多くの計算資源を必要としないことから、無駄を排除するよりも管理の簡便さを採用している [2] 。この場合、水平微分 (水平差分) の計算はゼロとなる。すなわち、第 2.1 節 で示した方程式系のうち、実質的に鉛直移流項、鉛直気圧傾度力項、浮力項が残ることとなる [3] 。物理過程ライブラリの鉛直 1 次元モデルはこれらの項を自ら計算せず、外部強制力として与えるのみであることに注意が必要である。また、物理過程をどこに組み込むかに依るが、時間積分法は前進差分か 3 段階ルンゲクッタ法のいずれかに限られる。鉛直方向に伝播する音波が存在し、split-explicit 法により計算される。

4.3.2 GABLS2 のテスト結果の比較

まず、GABLS2 のテスト結果 (原 2012c) の比較を紹介する。これは、境界層過程と地表面過程のテストであり、放射過程は含まず、地表面温度は外部強制 (あらかじめ指定された時系列) として与えられる。その他には地衡風強制が含まれる。ここで、地表面温度及

[1] 石田 純一 (第 4.3.1 項, 第 4.3.2 項, 第 4.3.3 項)、河野 耕平 (第 4.3.4 項)

[2] JMA-NHM に実装されている鉛直 1 次元モデルも同様の考え方に基づいて実装している。

[3] コリオリ項も残るがこれを計算しないオプションはある。

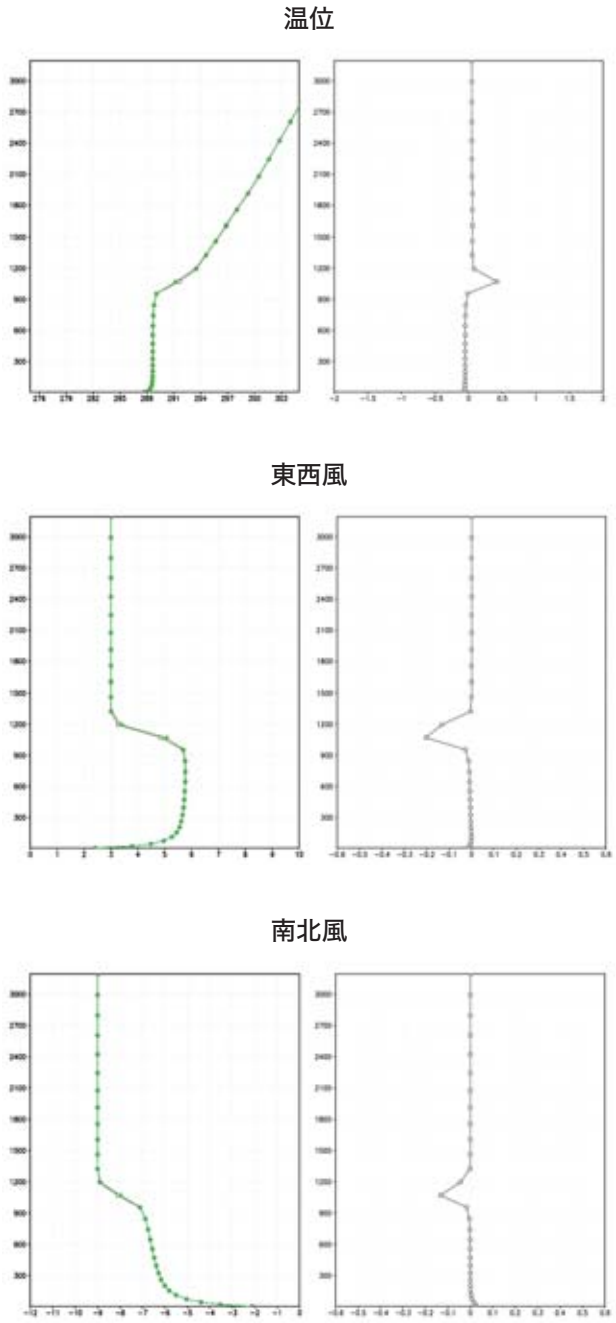

図 4.3.1　GABLS2 の実験結果。積分時間は 1440 分。上段、中段、下段はそれぞれ温位、東西風、南北風の鉛直プロファイルを表す。左列は asuca(緑線) と物理過程ライブラリ (黒線) をプロットしたもの。また、右列は物理過程ライブラリと asuca の差分。

び地衡風強制は GABLS2 の設定に従って与えたために、GABLS2 で想定する設定と全て同じになる。そのため、観測値や他のモデルとの比較も可能である。

比較対象として、物理過程ライブラリに含まれる鉛直 1 次元モデルの結果を用いる。鉛直層の設定は物理過程ライブラリのものに合わせた。

実験結果を図 4.3.1 に示す。これは予報開始から 1440 分後の温位、東西風、南北風の鉛直プロファイルを示したものである。左列は asuca(緑線) と物理過程ライブラリ (黒線) をプロットしたものであるが、ほとんど違いはないことが分かる。

4.3.3　GABLS3 のテスト結果の比較

次に、GABLS3 のテスト結果 (原 2012b) の比較を紹介する。このテストは、境界層過程と地表面過程だけでなく放射過程を含み、地表面過程では地表面温度の予想も行う。ここで注意が必要な点として、GABLS3 の実験には外部強制として地衡風強制などだけでなく、鉛直移流を含むことがある。第 4.3.1 項の通り、asuca を鉛直 1 次元モデルとして利用しても、鉛直流は予報変数であり、鉛直移流項は内在している。この場合、鉛直移流の外部強制を与えることは、予報変数である鉛直流を外部強制値で置き換えることを意味する。われわれのテストの目的は力学コアへの物理過程の組み込みに伴う課題を調査することであり、力学コアを書き換えてしまうとその目的を果たせない。

そこで、asuca 及び物理過程ライブラリの 1 次元モデルの双方において、初期値のみは GABLS3 の設定を用い、外部強制値はゼロとする。そして、asuca の結果とリファレンスとして物理過程ライブラリの鉛直 1 次元モデルによる結果を比較することとした。この方法により、境界層過程・地表面過程・放射過程を含むテストが可能となる。ただし、GABLS3 の観測値やモデル比較プロジェクトに参加したモデルと比較ができないので、物理過程の開発として用いるには適さない可能性があるが、組み込みのテストとしては十分である。

実験結果を図 4.3.2 に示す。こちらも図 4.3.1 と同様に、予報開始から 1440 分後の温位、東西風、南北風の鉛直プロファイルを示したものであり、左列が asuca(緑線) と物理過程ライブラリ (黒線) による結果である。概ね、結果は一致していると考えられるが、若干 asuca の方が境界層トップの高度が高いように見える。物理過程ライブラリにおけるテストでは外部強制としての鉛直流を与えないために鉛直移流は全く存在しないのに対し、asuca の場合、鉛直気圧傾度力と浮力のバランスとのずれにより鉛直流が生じて鉛直移流が発生することが、境界層トップの高低差になって現れた可能性がある。しかしながら、違いの全てが鉛直移流の有無だけで説明できるかは未確認であり、引き続き調査を進めたい。

4.3.4　対流雲発達の理想実験

ここでは、熱帯における陸上の対流雲発達について、理想実験の結果を紹介する。この理想実験では、熱帯での観測に基づいた地表面からの顕熱・潜熱フラックスの時系列を強制力としてモデルに与える。この強制によって、混合層が発達していき、浅い対流の形成から深い対流へと遷移していく時間経過を、境界層過程、雲物理過程を含むモデルがどのように表現するかを確

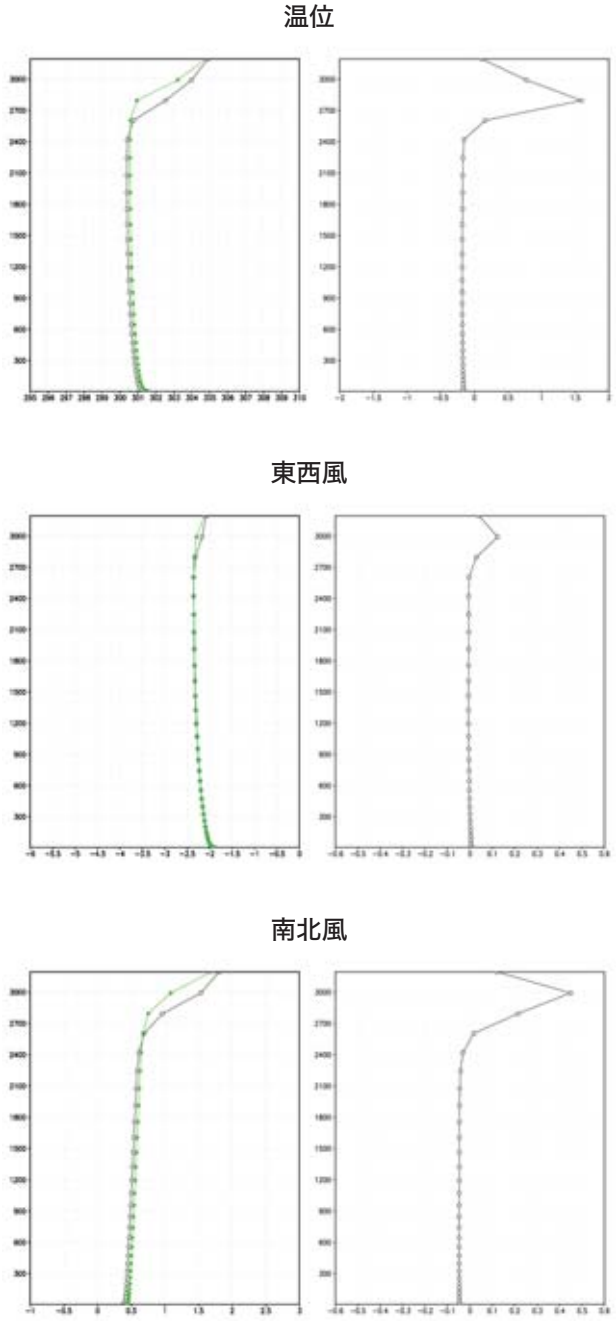

図 4.3.2　GABLS3 の実験結果。積分時間は 1440 分。図の説明は図 4.3.1 と同じ。境界層トップの高度が若干異なっている。

認できる。

この実験の初期値・強制力は、アマゾン熱帯域の対流を調査するために実施された TRMM-LBA field campaign[4] での観測結果に基づいている。森安 (2012) には、この熱帯での観測とそれに基づいた理想実験が提案された背景が要約されており、また、実験設定も詳しく述べられているので適宜参照いただきたい。

[4] http://cloud1.arc.nasa.gov/trmmlba/overview

(1)　実験設定

ここでの asuca の実験は x-z の 2 次元モデルとして行う。水平方向には、格子間隔 $\Delta x = 2$ km で 100 格子を配置し、鉛直方向には、現業の LFM と同じ設定により 60 層を配置した。積分時間間隔は $\Delta t = 15$ 秒とし、予報時間は 6 時間である。

初期状態、強制力は森安 (2012) に述べられた設定と同じであり、初期状態は TRMM-LBA field campaign における熱帯のある地点の高層観測（現地時間午前 7 時 30 分）をもとに与え、観測に基づいた顕熱・潜熱フラックスを強制力として 6 時間後まで与える。つまりこの理想実験の予報は、現地の午前 7 時 30 分から午後 1 時 30 分までを対象としたものになる。なお、顕熱・潜熱フラックスに最大 ±10% のランダムな摂動を計算時間を通して与えることによって、水平方向の非一様性を表現する。また、主に雲からの放射の効果として気温の時間変化率も強制力として与える。

雲物理過程は現業の LFM と同じスキームを用いている。境界層過程も現業の LFM と同様に改良 Mellor-Yamada Level 3 スキームを用いているが、原 (2012c) の改良が取り込まれている。地表面過程、放射過程については、上述のとおり強制力を別途与える設定であり、この実験では用いられない。

(2)　実験結果

以下で実験の結果を示す。図 4.3.3 は高度 3000 m 以下について水平方向に平均した温位の鉛直分布の時間変化を示しており、黒線が初期時刻の分布である。赤線は、予報開始から 150 分後（午前 10 時）の分布であり、地表面からの熱の供給によって高度 600 m 付近まで混合層が発達していることが分かる。また、予報時間 150 分以降、徐々に混合層が高くなっていく様子と予報時間 270 分（青線）から 330 分（水色線）にかけて広い層にわたって温位が上昇していることが分かる。

図 4.3.4 には、水平方向に平均した雲水の鉛直分布の時間変化を示す。赤線が予報開始から 150 分後（午前 10 時）の分布であり、上述の混合層の上端にあたる高度 600 m 付近に雲水が存在することが分かる。その時刻（午前 10 時）の高度 3000 m 以下の雲水の水平–鉛直分布を図 4.3.5 に示す。水平方向の分布としては、薄い雲の層がほぼ一様に全領域に渡っている。図 4.3.4 では、予報時間 150 分以降、予報時間 210 分（緑線）、270 分（青線）と徐々に平均高度が上がっていく様子が分かる。

予報時間 180 分以降の対流雲の発達の様子について、図 4.3.6 に雲水の水平–鉛直分布を予報 180 分から 30 分ごとに示す。時間の経過とともに格子サイズ程度の水平スケールの小さな浅い対流が徐々に見られるようになり、そのうちのいくつかが深い対流へと成長していく様子が分かる。図 4.3.3 で広い層にわたる温位上昇が見られた予報時間 270 分から 330 分にかけては、

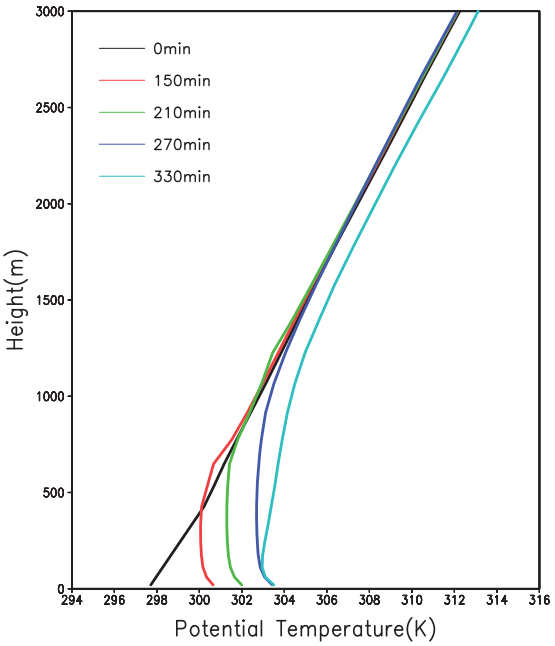

図 4.3.3 水平方向に平均した温位 (K) の鉛直分布。縦軸は地上から 3000 m までの高度。黒線が初期時刻、各色の線は予報時間 150 分、210 分、270 分、330 分の結果を示す。

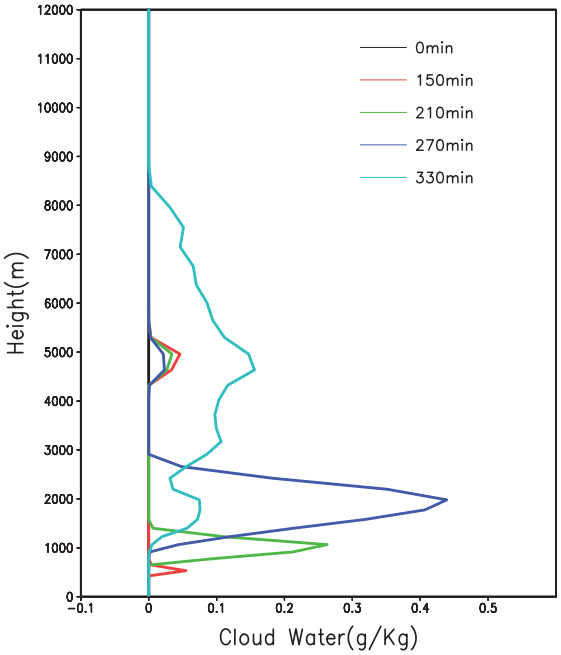

図 4.3.4 水平方向に平均した雲水の混合比 (g/kg) の鉛直分布。縦軸は地上から 12000 m までの高度。黒線が初期時刻、各色の線は予報時間 150 分、210 分、270 分、330 分の結果を示す。

図 4.3.6 で深い対流に成長していく時間帯と対応しており、この対流によって成層不安定が解消されたことを示唆している。

以上の asuca の実験結果は、熱的不安定による対流雲の発達の表現として期待される振る舞いであり、また、このテストケースを扱った文献 (Khairoutdinov and Randall 2006; Wu et al. 2009) や JMA-NHM の結果 (森安 2012) と比較して定性的に同等の結果が得られている。なお、asuca の開発の過程において、この理想実験における対流雲の到達高度が上記文献や JMA-NHM による実験結果と比較して明らかに低かったことからモデル全体を精査したところ、水物質を含む場合の定式化の誤りが見つかった。まさに理想実験を行うことの重要性を示す一例と言えよう。

参考文献

荒波恒平, 氏家将志, 原旅人, 2012: 物理過程の数値計算. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 111–119.

Dubal, M., N. Wood, and A. Staniforth, 2006: Some numerical properties of approaches to physics-dynamics coupling for NWP. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **132**, 27–42.

原旅人, 2012a: 雲物理過程. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 76–89.

原旅人, 2012b: 物理過程ライブラリの開発. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 205–208.

原旅人, 2012c: 鉛直 1 次元モデルによる評価 (1)-雲のない陸上の境界層の日変化 (GABLS2). 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 138–149.

Khairoutdinov, M. and D. Randall, 2006: High-resolution simulation of shallow-to-deep convection transition over land. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 3421–3436.

草開浩, 2012: 地表面過程. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 29–41.

Malardel, S., 2013: Physics/Dynamics interactions. *ECMWF Meteolological Training Course Lecture Series*, URL `http://www.ecmwf.int/newsevents/training/meteorological_presentations/2013/PA2013/Malardel/interface_2013.pdf`.

森安聡嗣, 2012: 理想実験による評価–熱帯の対流雲の発達. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 179–185.

Wu, C.-M., B. Stevens, and A. Arakawa, 2009: What controls the transition from shallow to deep convection? *J. Atmos. Sci.*, **66**, 1793–1806.

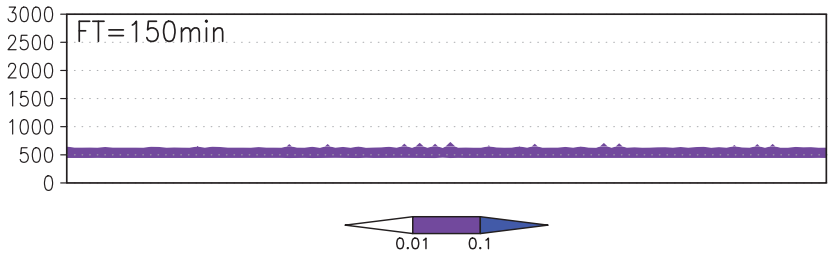

図 4.3.5　雲水（雲氷含む）の混合比 (g/kg) の水平–鉛直分布。縦軸は地上から 3000 m までの高度。横軸は水平方向の計算領域（幅 200km）。予報時間 150 分の結果。

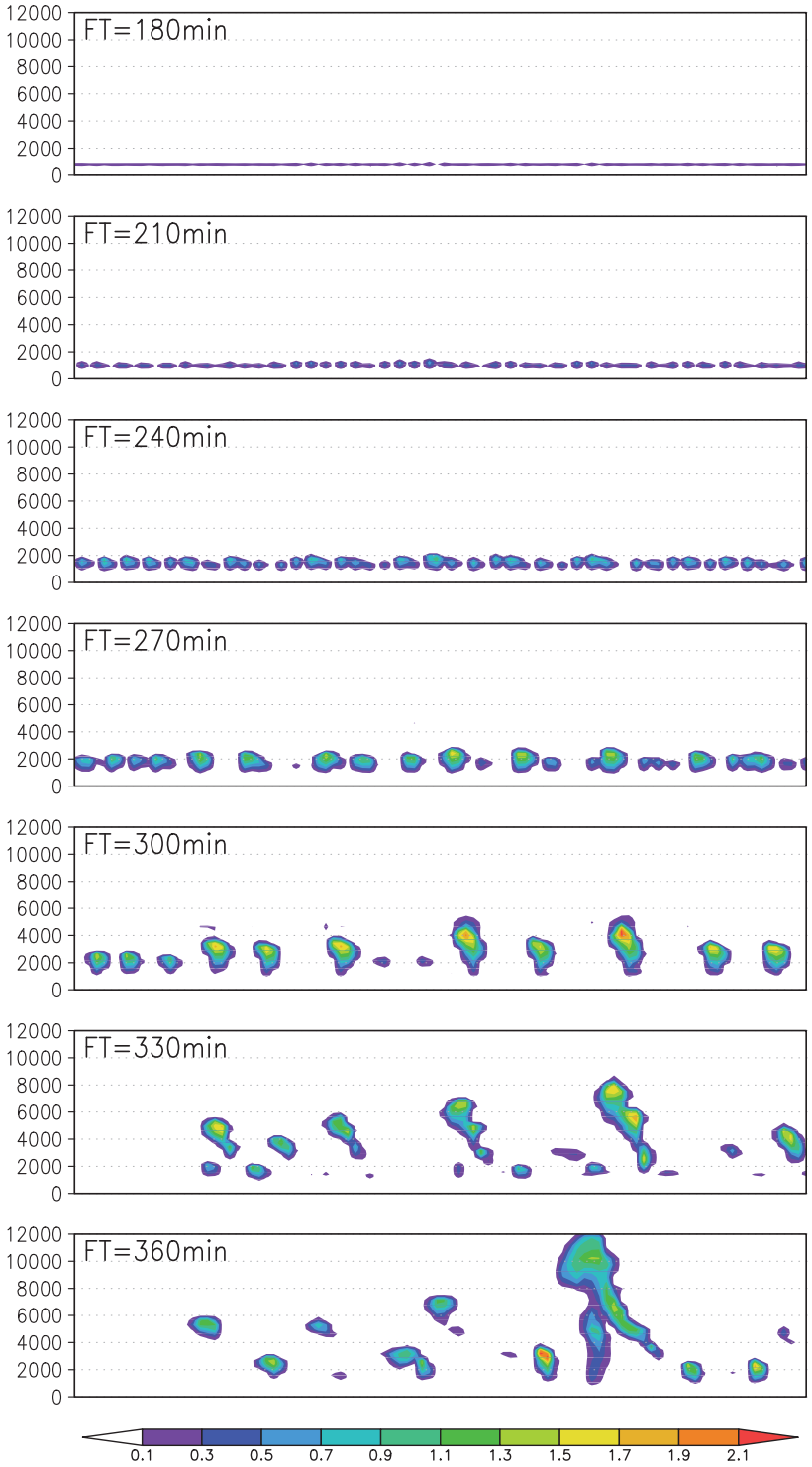

図 4.3.6　雲水（雲氷含む）の混合比 (g/kg) の水平–鉛直分布。縦軸は地上から 12000 m までの高度。横軸は水平方向の計算領域（幅 200 km）。上段から、予報時間 180 分、210 分、240 分、270 分、300 分、330 分、360 分の結果。

第5章　局地モデルとしての現状*

5.1　はじめに

現在、局地モデル (LFM) は JMA-NHM を用いて現業運用されているが、この後継として asuca を利用するための開発を行っている。2011 年度に JMA-NHM とほぼ同等の物理過程の組み込みが完了したことから、その性能を確認するため、2011 年度末より当時の LFM と同等の設定で asuca による準リアルタイムの予報実験 (以下、日々実験と呼ぶ) を行ってきた。また、LFM が 2013 年 5 月 29 日にその計算領域を日本域へと拡張したことにあわせて、asuca の日々実験についても同じく計算領域を拡張して引き続き実験を行っているところである。

本章では LFM 向けの設定で行った asuca の日々実験の仕様と予測結果について述べる。以下、LFM 向けの設定とした asuca を「asuca 版 LFM」、JMA-NHM をベースとする現業運用中の LFM を「現 LFM」と記述する。なお、本原稿執筆時点での asuca 版 LFM の開発状況は、現業化に向けた最終調整を行っているところであり、LFM として現業に導入する段階では若干仕様が変更となる可能性があることに留意いただきたい。

第 5.2 節では、asuca 版 LFM の日々実験の仕様について述べる。第 5.3 節ではいくつかの特徴的な事例の予測結果を簡単に示す。第 5.4 節では、asuca 版 LFM と現 LFM の積雲対流表現の比較や、数値実験の結果から見えてきた両モデルに共通する課題についての現状の理解を述べる。

5.2　日々実験の仕様

表 5.2.1 に asuca 版 LFM の日々実験の諸元を示す。なお、asuca の力学コアの諸元については表 1.4.1 をご覧いただきたい。物理過程は基本的には現 LFM と同じスキームを選択しているが、物理過程ライブラリの開発において個々のスキームで改良している点に加え、開発段階の検討により変更を加えたもの及び今後の変更を検討しているものがあるため、その点について触れる。

初期値・境界値、格子設定等

asuca 版 LFM の初期値・境界値は、現 LFM と同じくそれぞれ局地解析とメソモデル予報値を利用する。

格子の設定は基本的に現 LFM と同じである。テストシステムの都合により、水平格子数はわずかに減らしている。鉛直層数もモデルトップの 1 層を減らして 57 層としており、鉛直層間隔の設定も asuca 版 LFM と現 LFM で若干異なっている。現 LFM において、最上層と最下層の 2 層は計算の便宜上設定されているもので物理量の予測は行なっていないが、この 2 層を合わせて 60 層と数えることが多い。表中の「鉛直層数」の「58(+2) 層」はこのことを意味する。これらは、いずれも現業化段階では現 LFM と同じ格子数、層設定にする予定である。また、鉛直座標は、この実験では現 LFM と同じく z^* 座標の設定であるが、現業化の際は鉛直ハイブリッド座標 (Ishida 2007; 石田 2008) とする予定である。

表 5.2.1　LFM としての利用に向けた asuca の実験設定。現 LFM(JMA-NHM) との比較を示す。現 LFM の鉛直層数における「58(+2) 層」とは、現 LFM で 60 層としている鉛直層のうち最上層と最下層の 2 層は計算の便宜上設定している層であり、物理量の予測は行なっていないため、このように表記している。

	現LFM	asuca版LFM
初期値	局地解析	
境界値	メソモデル予報値	
水平格子数	1581 x 1301	1571 x 1291
水平格子間隔	2km	
鉛直層数	58(+2)層	57 (+0) 層
鉛直層間隔	40 – 661.5m	40 – 656m
鉛直座標	z^*座標	
地図投影法	ランベルト正角円錐図法	
側面緩和領域	180km(90格子)	
地形	GTOPO30(約3km相当に平滑化)	
積分時間間隔	8秒	50/3秒
予報時間	9時間	
雲物理過程	3-iceのバルク法(数濃度は予報しない)	
境界層過程	改良Mellor-Yamada Level3(原 2008)	
地表面過程	平板地表面モデル(原ほか 2008)	
雲放射過程	北川(2000)	
晴天放射過程	藪ほか(2005)	

側面緩和領域とは第 2.5 節で述べた通り、人為的な境界において水平方向に伝播した波が反射しないように設ける領域であり、その領域の予測値を側面境界条件を与えるモデル結果に近づけるように人為的な時間変化率を加えるための領域である。そのため、波が反射しないための最低限の広さにすることが望ましい。現 LFM では側面境界から 180 km(90 格子) を緩和領域としており、asuca 版 LFM においても同じ幅の緩和領域としている。一方で、各国の他のモデルではより狭い緩和領域を用いているものもある。例えば Unified Model では 8 格子 (Davies 2014)、また、WRF-ARW のユーザーズガイド [1] によれば 4 ないしは 9 格子 (実

* 河野 耕平、松林 健吾、倉橋 永

[1] http://www.mmm.ucar.edu/wrf/users/docs/user_guide_V3/ARWUsersGuideV3.pdf

験によって異なる)、COSMO のユーザースガイド [2] では 8 格子としている。最適な格子数については現在調査中であり、将来変更する可能性がある。

地形は現 LFM と同じく GTOPO30(米国地質調査所 (USGS) による 30 秒メッシュの標高データ) から約 3 km(水平格子間隔の 1.5 倍) 相当の解像度に平滑化した後に急斜面を除去した地形を用いているが、この処理により小スケールの地形の起伏が生じることが確認されたため、現業化時点では急斜面を除去した後に平滑化することを計画している。

積分時間間隔 Δt は、現 LFM の $\Delta t = 8$ 秒に対し、asuca 版 LFM では $\Delta t = 50/3 \simeq 16.67$ 秒としている。これは、asuca では Wicker and Skamarock (2002) の 3 段階ルンゲクッタ法の導入等により、積分時間間隔を長くしても安定に計算できるようになったためである [3]。

雲物理過程

雲物理過程は、現 LFM と同様にバルク法により雲水、雨、雲氷、雪、霰の質量の比を予報変数とし、数濃度は予報しない (3-ice, 1-moment)。ただし、第 4.1.1 項で述べた通り、時間積分にはシーケンシャルスプリッティングを用いている。

境界層過程

境界層過程は、現 LFM と同様に改良 Mellor-Yamada Level 3 スキーム (原 2008) を用いている。ただし、原 (2012) が述べている通り、このスキームは鉛直 1 次元モデルによる評価を経て改良されており、asuca での利用に際してはこの改良を取り込んでいる。

地表面過程

地表面過程については、現 LFM と同じ平板地表面モデル (原ほか 2008) を用いる。ただし、草開 (2012) で述べられている通り、地表面と大気間の結合における計算安定性を確保するためにインプリシットに結合することが望ましい。JMA-NHM には導入されていないが、物理過程ライブラリには境界層と地表面をインプリシットに結合するカップラーが実装されており、asuca ではこれを用いている。なお、現時点で用いている地表面過程は、土地利用状況ごとに決めたパラメータをそれぞれの面積率で平均することによりサブグリッドスケールの不均一性を考慮しているが、本来は地表面状態によって熱収支の特性は大きく異なるため、この方法では十分とは言えない。現在、複数の地表面状態が混在する格子においてそれぞれの熱収支を独立に計算し、その面積率で平均化したフラックスを大気に返す方法 (タイル化) の開発を進めている。その手始めとして、海陸混在格子へのタイル化適用に向けて調査を行っている段階である。

放射過程

放射過程は、現 LFM と同じスキームを利用する。放射過程は計算量が多いため、高速化を目的として空間的・時間的に計算対象格子を間引くことがある。asuca 版 LFM では、時間間引きとして現 LFM と同じく 900 秒に 1 回計算しているが、現 LFM で行なっている空間間引きに関しては asuca 版 LFM では行なわないこととした。これは、asuca と物理過程ライブラリとのコーディングにおける親和性を考慮したこと [4] による。

5.3 事例検証

本節では、実際の事例に対し、asuca 版 LFM と現 LFM を比較する。

強雨予測の確認

ここでは、まずいくつかの強雨事例を取り上げ、それぞれの強雨域の表現について確認する。図 5.3.1 に平成 24 年 7 月九州北部豪雨、図 5.3.2 に平成 25 年 7 月の山口・島根の豪雨、図 5.3.3 に平成 24 年台風第 17 号について、解析雨量と asuca 版 LFM 及び現 LFM の降水予測の結果を示す。概ねいずれの事例においても特徴的な強雨域が両モデルとも表現されていた。以下、個々の事例について詳しく見てみる。

図 5.3.1（平成 24 年 7 月九州北部豪雨）では、両モデルとも線状の強雨帯を表現できている。しかし、他の初期時刻では強雨域の予測位置が実況とずれてしまう結果や強雨域を予測できなかった例もあった。これらの初期時刻においては、asuca 版 LFM と現 LFM で同じように強雨域がずれ、強雨を予測できなかった。この事例では、asuca と JMA-NHM の違いよりも初期値・境界値の違いが大きいと考えられる。

図 5.3.2（平成 25 年 7 月の山口・島根の豪雨）では、両モデルともに山口県・島根県境の強雨域を表現できている一方、山口県中央部の強雨ピークを表現できていない点、四国にかかる降水帯の表現が過剰である点も両モデルで共通している。また、降水のピーク値についても、両モデルで同等の値となっている。

図 5.3.3（平成 24 年台風第 17 号）では、紀伊半島に見られる実況の強雨域を両モデルともに良く表現し、紀伊水道の降水ピークも表現している。ただし、日本海の降水帯は両モデルとも揃って表現できていない。台風の示度を実況と比較するため、同予想による潮岬における海面更正気圧の時系列を図 5.3.4 に示す。asuca

[2] `http://www.cosmo-model.org/content/model/documentation/core/cosmoDyncsNumcs.pdf`

[3] 16 秒あるいは 17 秒でなく $\Delta t = 50/3 \simeq 16.67$ 秒という設定は、$\Delta t \times$ タイムステップ数が現状想定する最小出力時間間隔 10 分に合う値 (50/3 秒 $\times$ 36 step = 600 秒) を選んだためである。

[4] 物理過程ライブラリは鉛直 1 次元で構築されており、asuca からはその呼び出しをカラムごとに行っている。物理過程の組み込みに際し、この基本構造を保つには空間間引きを行わないほうが望ましい。

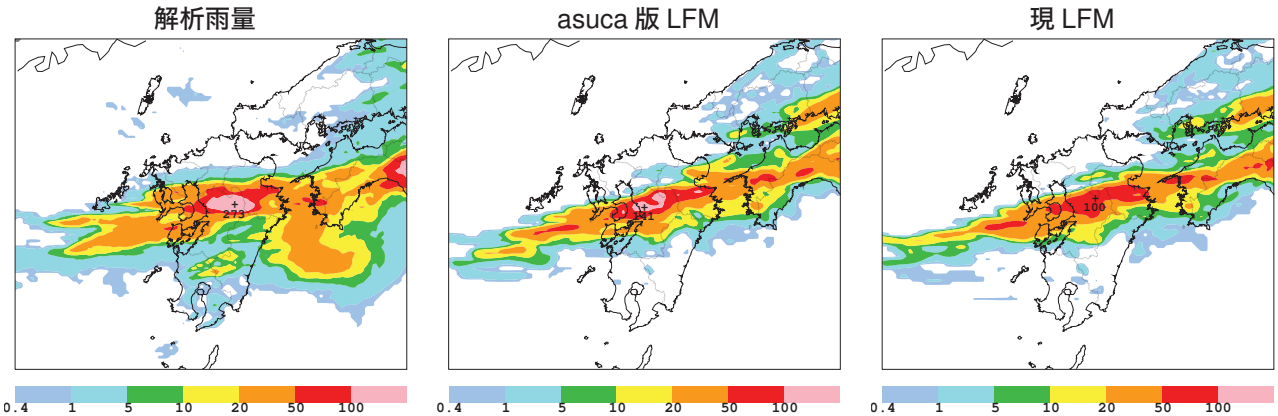

図 5.3.1　2012 年 7 月 12 日 06JST の前 3 時間積算降水量 (mm)。左から解析雨量、asuca 版 LFM の 6 時間予測値、現 LFM の 6 時間予測値

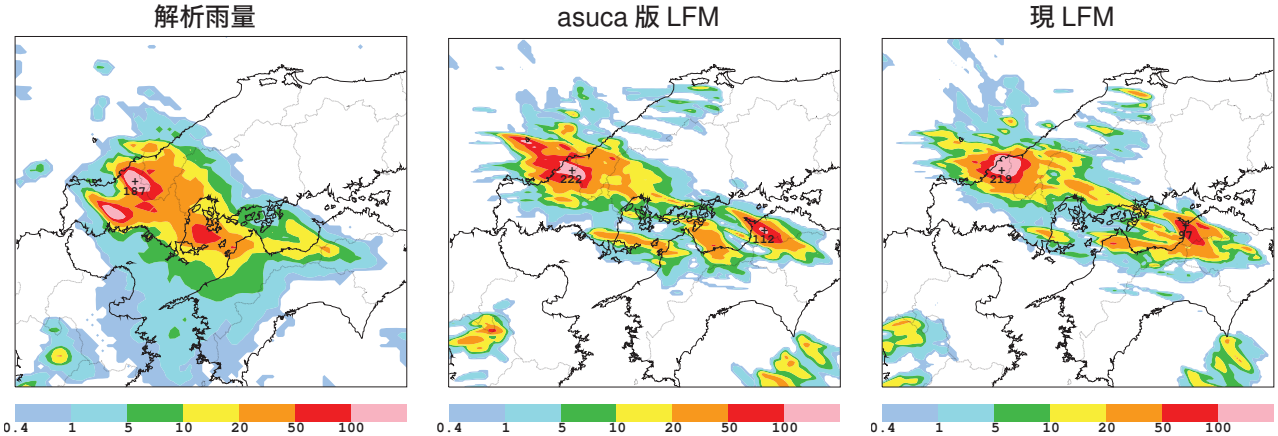

図 5.3.2　2013 年 7 月 28 日 09JST の前 3 時間積算降水量 (mm)。左から解析雨量、asuca 版 LFM の 6 時間予測値、現 LFM の 6 時間予測値

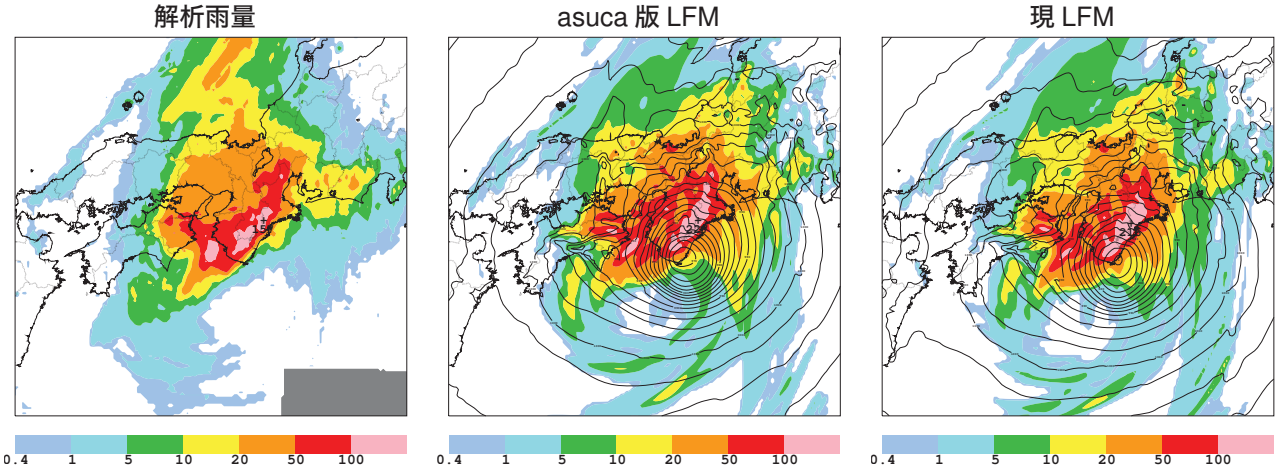

図 5.3.3　2012 年 9 月 30 日 15JST の前 3 時間積算降水量 (mm) と海面更正気圧 (hPa)。左から解析雨量、asuca 版 LFM の 9 時間予測値、現 LFM の 9 時間予測値

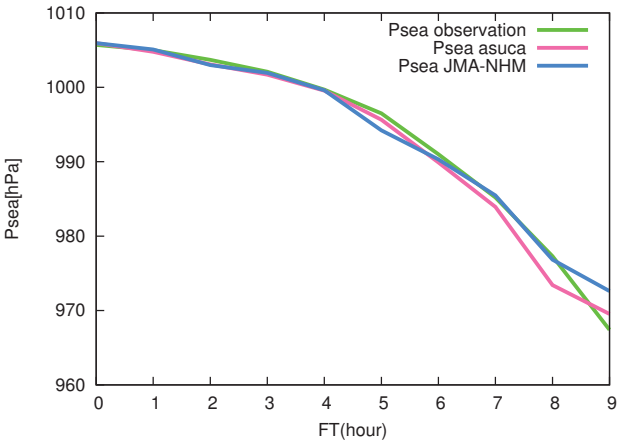

図 5.3.4　2012 年 9 月 29 日 21UTC 初期値の潮岬における海面更正気圧の実況値 (緑色)、asuca 版 LFM(桃色)、現 LFM(青色) の予測の時系列。横軸は予報時間であり、FT=0 は 9 月 30 日 06JST、FT=9 は 9 月 30 日 15JST に相当する。

版 LFM と現 LFM で海面更正気圧もほぼ同じ予想となっており、実況との対応がよいことがわかる。

この他の事例について見ても、ほとんどの場合で asuca 版 LFM と現 LFM では大きな予想の差は見られていない。

日々実験ではモデルの特性を確認することと合わせて、計算安定性の確認も行なっている。上の事例に見られる集中豪雨や台風のような強い降水や上昇流が生じる事例に対しても計算不安定を起こさず計算できることをこれまでの実験で確認できている。

平成 24 年 8 月の猛暑

平成 24 年の夏は全国で猛暑となり、特に 8 月上旬から中旬にかけて太平洋側を中心に気温が著しく高くなった。中でも、8 月 11 日は本州を中心に概ね晴天となり、関東平野の多くの地点で 35 度を超えた。当日の関東の気温予想と実況を図 5.3.5 に示す。地上気温予想は asuca 版 LFM と現 LFM の予想で概ね一致していることが分かる。また、最高気温が 39.3 度まで上昇した埼玉県熊谷の気温の予想と実況の時系列を図 5.3.6 に示す。このように、時系列で見ても asuca 版 LFM と現 LFM の予報の傾向は大きく変わらないことが分かる。

夏季の 24 事例を対象に、asuca 版 LFM と現 LFM でアメダス地上気温との比較検証 (瀬川・三浦 2006) を行った結果を図 5.3.7 に示す。この結果から、asuca 版 LFM と現 LFM で同じような地上気温バイアスがあるものの、asuca 版 LFM は現 LFM よりバイアスが低減しており、平方根平均二乗誤差の改善も確認されている (図略)。

平成 24 年 12 月の冬型事例

平成 24 年 12 月 25 日は、北海道の東に発達した低気圧があり、北海道と本州を中心に強い冬型の気圧配置となった。平成 24 年 12 月 25 日 21 時 JST を対象とした予想衛星画像[5] と、対応する実況の衛星赤外画像を図 5.3.8 に示す。この結果から、日本海における雲域は asuca 版 LFM と現 LFM でほぼ似た予想をしているものの、東シナ海や日本の南海上では asuca 版 LFM の方が現 LFM より雲域を広く予想しており、実況との対応が良いことが分かる。

この事例に限らず、asuca 版 LFM では現 LFM に比べて特に冬型時に下・中層雲が多く予想される傾向があり、実況との対応がよい。また、短波放射量の地上観測値との比較においても、改善の傾向が得られている[6]。

日々実験の結果から

これまでの日々実験から、asuca 版 LFM と現 LFM の間で大きな予報特性の変化は確認されておらず、本節で示したように地上気温や雲域の予想が改善する結果が得られている。また、日々実験を通じてモデル間の相互比較を行うことによって、今まで現 LFM に内在していた問題点がより明確になってきており、今後の予測精度向上につながる知見も得られている。このような実験を積み重ねることにより、今後のモデルの精度向上に取り組んでいきたい。

5.4　積雲対流発生の表現の課題

永戸ほか (2013) は、現 LFM における積雲対流の扱いの課題[7] のひとつとして、積雲対流のイニシエーションに関する表現が不十分であること、その結果、対流の発生が遅れやすい傾向があることを指摘している。

本節では、現業 LFM が抱える積雲対流のイニシエーションの課題に関して、asuca 版 LFM と現 LFM のモデル予報値の水平波数スペクトル分布における高波数成分との関係から見えてきた特徴について現状の理解を述べる。

5.4.1　高波数成分と対流の発生との関係

前節では、asuca 版 LFM と現 LFM とを比較し、降水予測結果がほとんど変わらないことを述べたが、このことは、現 LFM の課題である対流発生が遅れやすい傾向についても言え、asuca 版 LFM でも同様の課題がある。また詳細に見ると、asuca 版 LFM は現 LFM と比べて対流の発生が（わずかではあるが）さらに遅れやすい傾向が見られた。

一方、第 2.7 節で述べた JMA-NHM の数値拡散の強さを変更する数値実験について、その降水分布図を確認したところ、数値拡散を強めていくにしたがって対

[5] 数値予報モデルの物理量から衛星固有の情報を加味して計算し、衛星画像として可視化した資料 (大和田 2006, 2013)。
[6] ただし、この予想衛星画像の雲は放射過程で用いている雲量ではないことに、注意が必要である。
[7] 積雲パラメタリゼーションを用いない水平格子間隔 2 km のモデルが直面している問題

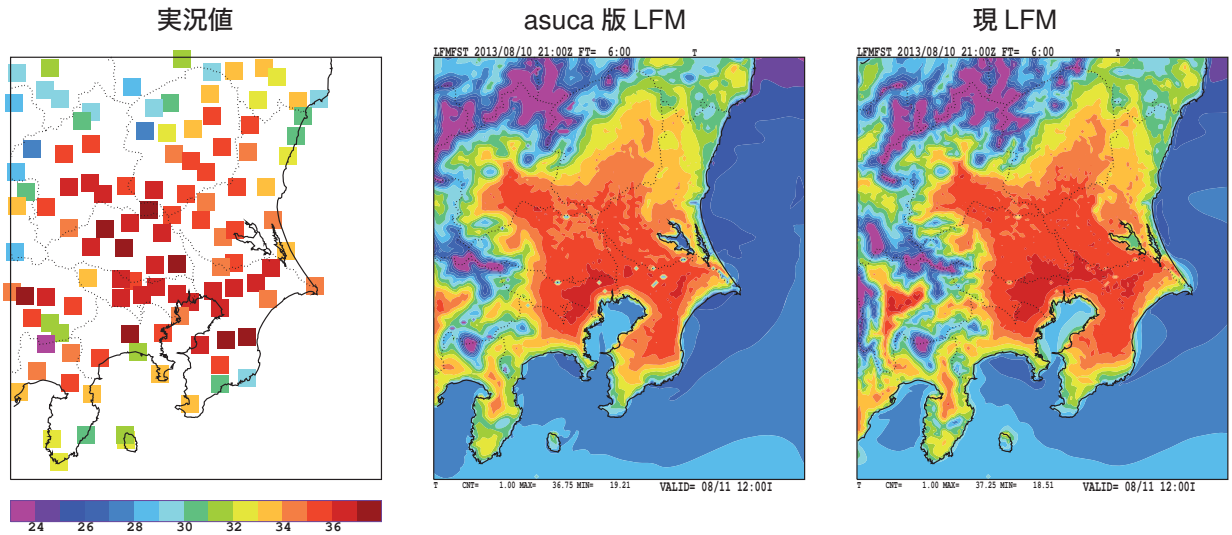

図 5.3.5 2013 年 8 月 11 日 12JST の地上気温。左から実況値、asuca 版 LFM 予報値の 6 時間予報値、現 LFM 予報値の 6 時間予報値。

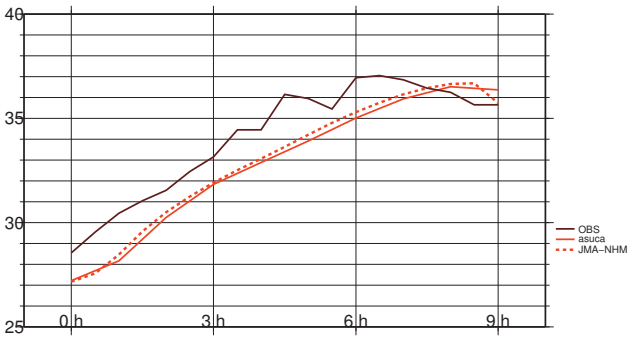

図 5.3.6 2013 年 8 月 11 日 21UTC 初期値の asuca 版 LFM(赤実線) と現 LFM(赤破線) の熊谷の地上気温予想。茶線は実況値を表す。縦軸は気温を、横軸は時間を表し、左端が FT=0(8 月 10 日 06JST)、右端が FT=9(8 月 10 日 15JST)。

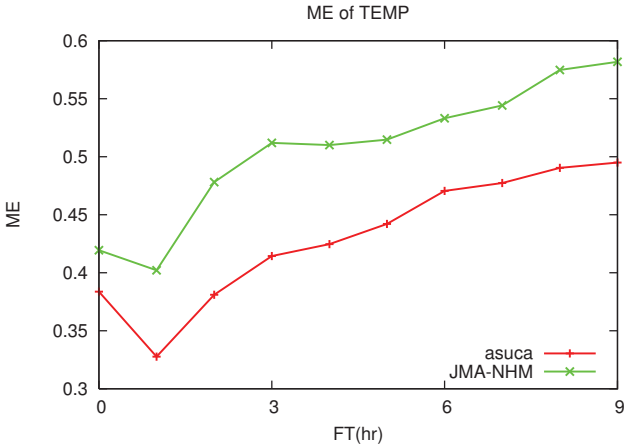

図 5.3.7 2012 年の夏季の 24 初期値を対象とした地上気温の予報時間別検証結果（平均誤差）。赤線が asuca 版 LFM の検証結果、緑が現 LFM の検証結果を表す。

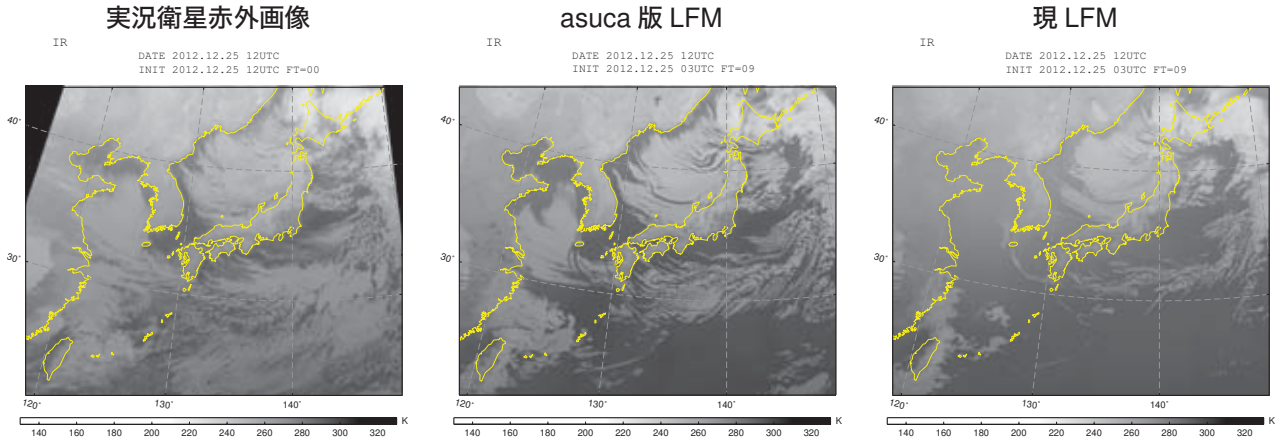

図 5.3.8 2012 年 12 月 25 日 21JST の実況と予想の衛星赤外画像。左から実況、asuca 版 LFM の 9 時間予報値、現 LFM の 9 時間予報値。

流の発生が遅れるという傾向が見られた。数値拡散を施さない場合と現 LFM よりも数値拡散を強くかけた場合の JMA-NHM の降水予測結果を図 5.4.1 に示す。数値拡散を施さない場合（左図）に比べて、数値拡散を強くかけた場合（右図）は対流の発生が遅いことが分かる (全体的に、より下流の東側から降水域が始まる)。スペクトル分布の観点からは、数値拡散を強めていくにしたがって高波数側のスペクトル密度が小さくなる関係にある（図 5.4.2)。

積雲対流の発生条件としては、大気の成層状態が潜在不安定であることに加えて、空気塊を自由対流高度まで持ち上げる強制上昇の存在が必要である。この強制上昇としては、地形によるもの、風の収束によるもの、混合層の発達によるものなどがある。モデルにおいて対流の発生を適切に表現するには、この強制上昇を適切に表現する必要がある。積雲対流を発生させる地形や風の収束による強制上昇の水平スケールは、積雲対流のスケールから考えると数 km 程度以下の小さなスケールである場合が多いと考えられる。したがって、水平格子間隔 2 km のモデルでは、高波数成分に相当する小さなスケールの現象の表現が、対流の発生に重要な役割を果たすと言える。

一方、この JMA-NHM の実験結果は、モデル内に存在する数値スキームに起因する高波数の数値振動（ノイズ）によっても対流が発生してしまうことも示している。このことは、例えば Bryan (2005) 等によって指摘されており、また、asuca における以下の数値実験でも確かめられている。asuca において、高波数側のエネルギーが大きくなると対流発生が早くなることを確認するために、温位の移流項の計算に中央 4 次差分スキーム [8] を使って意図的にノイズを生成する数値実験を行ったところ、極端に対流の発生が早まる結果が得られている [9]。つまり、第 2.7.2 項でも述べたように、実効解像度以下のスペクトル分布が実大気に近い方が必ずしも良いとは限らない（ここでは、対流発生が早まる傾向はあるが、その対流の発生が必ずしも正しいとは限らない）ことを示している。

上記の実験結果からは、高波数のノイズが偽の対流を生じさせうることも含め、モデル予報値の高波数成分が対流の発生に重要であることが分かった。このことを踏まえて、図 5.4.3 の asuca 版 LFM と現 LFM のスペクトル分布と両モデルに共通する積雲対流発生が遅れるという課題との関係について考える。図 5.4.3 のスペクトル分布に対応する降水分布図を図 5.4.4 に示す。asuca 版 LFM（中図）と現 LFM（右図）の降水予測結果を比較すると、この事例においても概ね同等の結果であるが、詳細を見ると、asuca 版 LFM は現 LFM に比べて対流の発生がわずかに遅れる傾向が見られている。asuca 版 LFM と現 LFM のスペクトル分布における高波数成分と積雲対流の発生との関係は上記の実験から得た結果と整合している。しかし、上記の実験結果を踏まえて図 5.4.3 で最も注目すべきことは、asuca 版 LFM、現 LFM ともに対流発生に必要な強制上昇といったスケールの現象が表現できていない（解像できていない）ことであると考えている。ただし、高波数のノイズが偽の対流を生じさせうることを考慮すると、実効解像度以下のスペクトル分を実大気のそれに単に近づければ良いわけではない。解像できないスケールの高波数成分はできるだけ取り除いた上で、その効果をパラメタイズすることが一つの選択肢であると考えている。

5.4.2　積雲対流発生の表現についての今後の課題

本節で示した、asuca の開発過程において実施した数値実験の結果からは、モデルでの積雲対流の発生には、高波数の数値振動（ノイズ）が偽の対流を生じさせうることも含めて、モデル予報値の高波数側に相当する小さなスケールの現象の表現が重要であることが分かった。これにより、現業 LFM が抱える積雲対流の扱いについての問題点がより明確になってきたと考える。高波数側でエネルギーを減衰させる措置は、モデルの離散化に起因する必要な措置ではあるものの、asuca 版 LFM、現 LFM のスペクトル分布は、両モデルともにそのスケールの現象の表現が不足していることを示唆している。表現が不足している高波数側の効果を何らかの方法で正しく表現していくことが今後の課題である。現在、物理過程の開発において、対流発生に対する高波数成分の効果をパラメタライズするアプローチを試みているところである (原ほか 2013)。

5.5　終わりに

本章では、asuca の局地モデルとしての現業化に向けた開発の現状について述べた。

第 5.2 節では asuca 版 LFM の仕様について説明した。格子および層設定、計算領域等の基本的な仕様は現 LFM から変更する予定はない。物理過程は基本的には現 LFM と同じスキームを選択しているが、物理過程ライブラリの開発における個々のスキームの改良が取り込まれている。

第 5.3 節 では、いくつかの特徴的な事例に対して現 LFM による予測結果と比較することにより asuca 版 LFM の予測結果を確認した。現状、asuca 版 LFM と

[8] 振幅の減衰は小さいが、分散性（波数により位相誤差が異なる）の誤差が大きくノイズを生じさせやすい。例として、一様流の 1 次元移流のテスト（第 2.6.2 項）で時間積分にリープフロッグ法、移流スキームに中央 4 次差分スキームを用いて矩形波を移流させると分散性の誤差によってノイズが生じるが（図 2.6.2)、この結果はスペクトル分布の観点（振幅の大きさ）では解析解と一致する。

[9] ただし、この場合の温位のスペクトルは図 2.7.1 の右図に示したような、高波数側がめくれあがった適切でない分布になる。

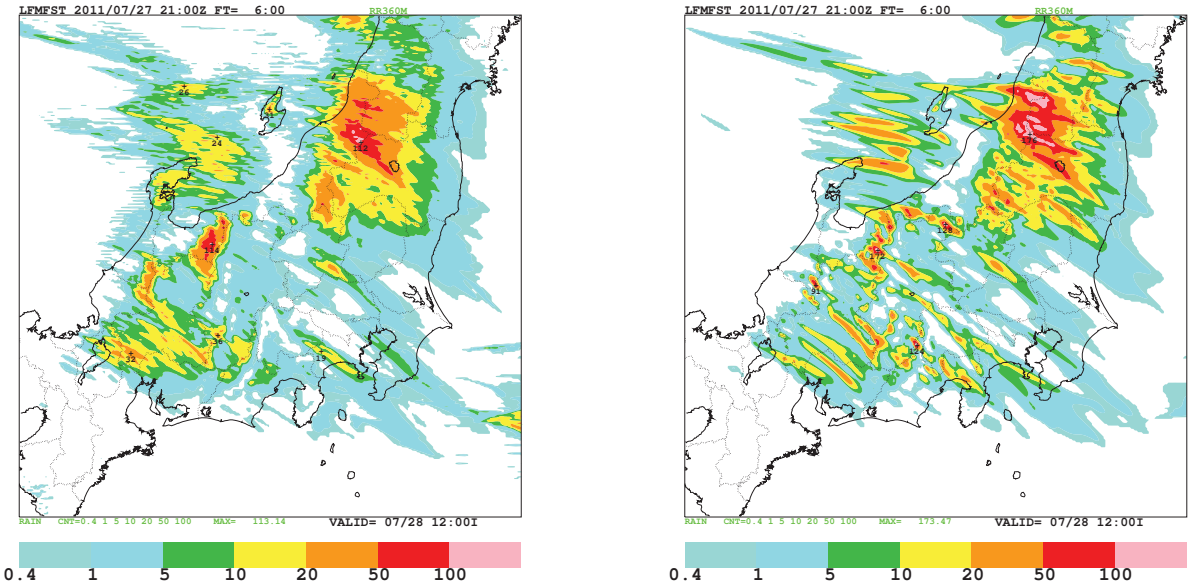

図 5.4.1 2011 年 7 月 28 日 12JST の前 6 時間積算降水量 (mm)。JMA-NHM の 9 時間予報値。（左）数値拡散を施していない。図 5.4.2 のスペクトル分布図において最も上側に位置する線に対応する結果。（右）数値拡散を強めた。図 5.4.2 のスペクトル分布図において最も下側に位置する線に対応する結果。

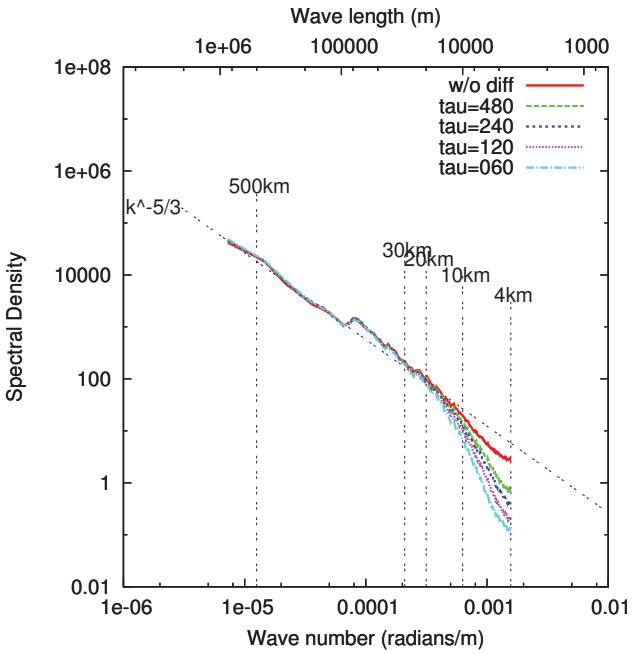

図 5.4.2 図 2.7.3 を再掲。温位の水平波数スペクトル分布。JMA-NHM の数値拡散の強さを変更した結果。数値拡散を強めていくにしたがって高波数側のスペクトル密度が小さくなる。

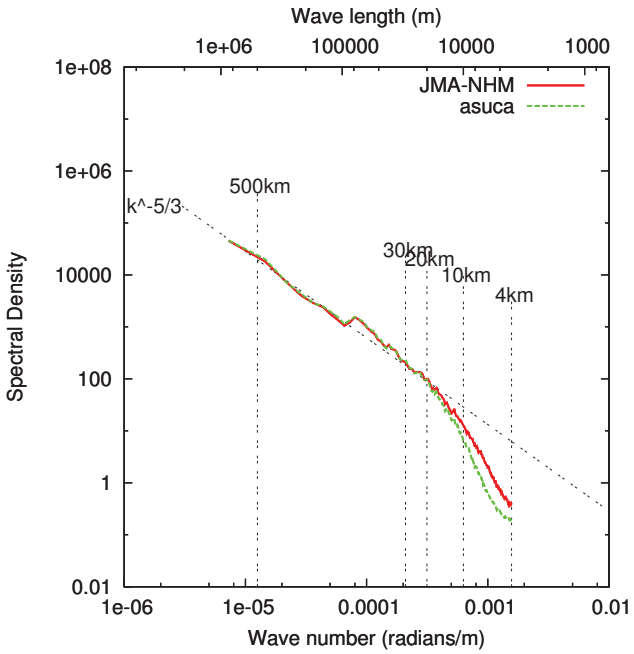

図 5.4.3 図 2.7.2 を再掲。温位の水平波数スペクトル分布。赤が現 LFM(JMA-NHM), 緑が asuca 版 LFM。asuca 版 LFM は現 LFM よりも高波数側のスペクトル密度が小さい。

現 LFM の間で大きな予報特性の変化は確認されていないが、地上気温や雲域の予測が改善する結果が得られている。asuca の局地モデルとしての現業化に向けた開発は現時点では最終段階であり、今後、現業化までに細部の調整を図る予定である。しかし、現業化当初の予測精度という面では、本章で示した内容と大きく変わることはないと考えている。

第 5.4 節では、水平格子間隔が 2 km という状況において積雲対流を如何に表現していくかという現 LFM から抱える課題について、asuca の開発過程で見えてきた現状の理解について報告した。これまで、asuca 及び物理過程ライブラリの現業化に向けた開発を行ってきた中で、今までに内在していた現 LFM の課題がより明確になってきたところもあり、今後の予測精度向上につながる知見を得ている状況にあると考えている。これらの知見を活かしつつ、引き続き改良に努めていきたい。

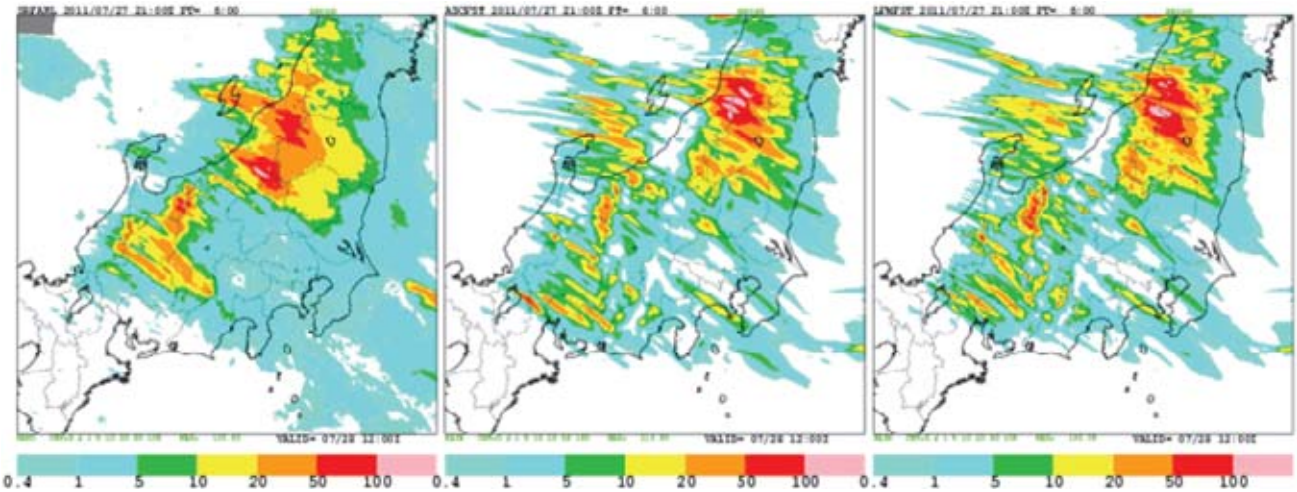

図 5.4.4 2011 年 7 月 28 日 12JST の前 6 時間積算降水量 (mm)。(左) 解析雨量、(中) asuca 版 LFM の 9 時間予報値、(右) 現 LFM の 9 時間予報値

参考文献

Bryan, G. H., 2005: Spurious convective Organization in simulated squall lines owing to moist absolutely unstable layers. *Mon. Wea. Rev.*, **133**, 1978–1997.

Davies, T., 2014: Lateral boundary conditions for limited area models. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **140**, 185–196.

永戸久喜, 原旅人, 倉橋永, 2013: 日本域拡張・高頻度化された局地モデルの特性. 平成 25 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 18–41.

原旅人, 2008: 改良 Mellor-Yamada モデル. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 128–132.

原旅人, 大泉三津夫, 三浦大輔, 2008: 地表面過程. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 166–194.

原旅人, 2012: 鉛直 1 次元モデルによる評価 (1)-雲のない陸上の境界層の日変化 (GABLS2). 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 138–149.

原旅人, 河野耕平, 石田純一, 松林健吾, 永戸久喜, 2013: 現業高解像度モデルにおける対流の表現とその課題・解決に向けた試み. 第 15 回非静力学モデルに関するワークショップ講演予稿集.

石田純一, 2008: 気象庁非静力学モデルの支配方程式系と地形に沿う鉛直ハイブリッド座標の導入. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 27–43.

Ishida, J., 2007: Development of a hybrid terrain-following vertical coordinate for JMA Non-hydrostatic Model. *CAS/JSC WGNE Res. Activ. Atmos. Oceanic Modell.*, **37**, 309–310.

草開浩, 2012: 地表面過程. 数値予報課報告・別冊第 58 号, 気象庁予報部, 29–41.

大和田浩美, 2006: 予想衛星画像. 気象研究ノート, **212**, 105–120.

大和田浩美, 2013: 予想衛星画像. 数値予報課報告・別冊第 59 号, 気象庁予報部, 76–80.

瀬川知則, 三浦大輔, 2006: 統計検証. 平成 18 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 59–83.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models Using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

第 6 章　全球モデルとしての利用 *

6.1　はじめに

asuca の特徴の一つである一般座標によって、気象庁のメソモデルで通常利用しているランベルト正角円錐図法以外の投影法での計算が可能になると、日本周辺域以外でのシミュレーションに asuca を利用しやすくなる。この章では、複数の緯度経度格子を重合格子法によって組み合わせた Yin-Yang 格子 (Kageyama and Sato 2004) による全球シミュレーションについて述べる。

次節以降では、第 6.2 節に重合格子を用いた数値シミュレーションと外部機関で行われている Yin-Yang 格子を使った全球モデルの開発について述べる。第 6.3 節では、asuca と同じ有限体積法を用いた Yin-Yang 格子を使った 2 次元浅水モデル試験の結果について、先行研究と比較しながら示す。第 6.4 節では asuca を使用した Yin-Yang 格子全球モデル asuca-Global の開発状況について述べる。

6.2　重合格子法を用いた数値シミュレーションと Yin-Yang 格子モデル

重合格子法は、向き、間隔、形状などの異なる格子を重ねて組み合わせることによって、計算範囲毎の解像度の異なる数値シミュレーションを、計算範囲間の相互作用を考慮しながら計算したり、単一の計算範囲で計算し難い複雑な形状の計算範囲のシミュレーションを実行したりする際に用いられる手法で、流体力学の分野だけでなく、工学的な構造解析などの分野でも広く用いられている。

簡単な例として、1 次元の浅水モデルによる計算結果を図 6.2.1 に示す。図 6.2.1 の上図は通常の周期境界条件の 360 個の格子の中心付近にあるコサインカーブの形状の孤立波（図 6.2.1 の FT=0）がどのように伝わるかを Koren (1993) の流束制限関数を使った有限体積法で計算したものである。図 6.2.1 の下図は、長さ 184 格子のシステム 2 つを、$4+1/3$、及び $3+2/3$ 格子の長さの重ね合わせを使って組み合わせて、同じ計算を行った結果である。重ね合わせは、図中の格子番号の 20、及び 200 番の辺りにある。2 つはほぼ同様な結果を示しており、格子系を組み合わせて使っても、継目のない格子と同等な計算が行えることを示している。

重合格子法を用いて球体、または球殻の計算を行う方法として、Yin-Yang 格子が Kageyama and Sato (2004) と Purser (2004) によって別々に開発され、The Workshop on Partial Differential Equations on the Sphere(2004 年 6 月 20〜23 日に地球シミュレータセンターで開催) において同時に提案された [1]。Purser (2004) の提案したものは球殻の大気をシミュレーションすることを目指す気象予報用途のものであったが、Kageyama and Sato (2004) の提案したものは 3 次元的に球体の固体地球の内部の動きをシミュレーションするものであった [2]。

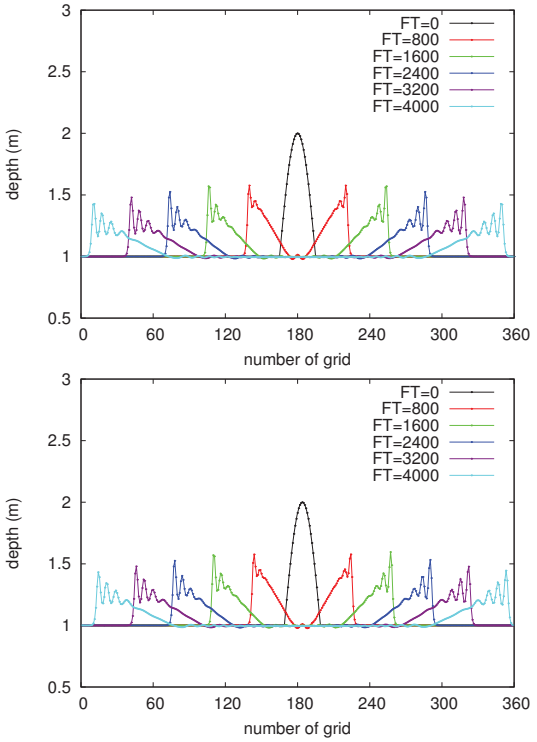

図 6.2.1　1 次元浅水モデルの計算結果。上の図は 360 個の格子を周期境界で計算したもの。下図は 184 個の格子のシステム 2 つを、重ね合わせ長 $4+1/3$ 格子と $3+2/3$ 格子で組み合わせて計算したもの。格子の重なった部分は図中の格子番号の 20 番辺りと 200 番辺りにある。格子の間隔 (Δx) は 100 m、Δt =10 s での Koren (1993) の流束制限関数を使った有限体積法のシミュレーション。媒体の密度は 1 kg m^{-3} で非圧縮を想定。支配方程式は $\partial h/\partial t = \nabla(uh), \partial(uh)/\partial t = \nabla(u^2 h) - gh\partial h/\partial x$。ここで、$h$ は媒体の厚さ [m]、u は水平速度 [m s^{-1}]、g は重力加速度 (9.8 m s^{-2})、t は時間 [s]、x は水平距離 [m]。FT はタイムステップの数。

ほぼ同時期に Peng et al. (2006) によって、有限体積法を用いた Yin-Yang 格子モデルの研究も始められた。Peng et al. (2006) は、フラックス計算手法に、CIP 法 (Yabe and Aoki 1991) に保存性について工夫を行った CIP-CSLR 法 (Xiao et al. 2002) を使用していた。

図 6.2.2 の上図に Yin-Yang 格子の配置図を示す。図

* 坂本 雅巳

[1] 厳密には Kageyama and Sato (2004) が 2 つの緯度経度座標を組み合わせる提案であったのに対して、Purser (2004) が提案したのは 2 つのメルカトル図法を組み合わせるものであり、少し違うものであった。

[2] Kageyama and Sato (2004) は、合成メッシュを有限差分法で計算していた。

6.2.2 の中図に示した Yin 格子（通常の緯度経度格子）の南緯 45 度〜北緯 45 度、東経 45 度〜西経 45 度の範囲を青色の格子に、図 6.2.2 の下図の Yang 格子の同じ範囲を赤色の格子に組み合わせたものである。Yang 格子は通常の緯度経度格子を標準子午線・日付変更線と赤道の交わる点を結ぶ軸のまわりを −90 度回転させて、この操作によって北極・南極となった点を通る軸のまわりに 180 度回転させた後の位置を等緯度経度座標で示すものである。Yin 格子の地球中心からの距離、緯度、経度をそれぞれ r_n, ϕ_n, λ_n、Yang 格子のそれらを順に r_e, ϕ_e, λ_e とすると、以下の関係がある。

$$r_e = r_n \tag{6.2.1}$$
$$\cos\phi_e \cos\lambda_e = -\cos\phi_n \cos\lambda_n \tag{6.2.2}$$
$$\cos\phi_e \sin\lambda_e = \sin\phi_n \tag{6.2.3}$$
$$\sin\phi_e = \cos\phi_n \sin\lambda_n \tag{6.2.4}$$

(6.2.2) 式、(6.2.3) 式、及び (6.2.4) 式をまとめると、

$$\phi_e = \sin^{-1}(\cos\phi_n \sin\lambda_n) \tag{6.2.5}$$
$$\lambda_e = \sin^{-1}(\sin\phi_n / \cos\phi_e) \tag{6.2.6}$$
$$\phi_n = \sin^{-1}(\cos\phi_e \sin\lambda_e) \tag{6.2.7}$$
$$\lambda_n = \sin^{-1}(\sin\phi_e / \cos\phi_n) \tag{6.2.8}$$

となる。水平方向のベクトルは緯度方向成分を v、それに直交する方向を u として、

$$\begin{pmatrix} v_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_e \sin\lambda_n & -\cos\lambda_e / \cos\phi_n \\ \cos\lambda_e / \cos\phi_n & -\sin\lambda_e \sin\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e \\ u_e \end{pmatrix} \tag{6.2.9}$$

$$\begin{pmatrix} v_e \\ u_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_n \sin\lambda_e & -\cos\lambda_n / \cos\phi_e \\ \cos\lambda_n / \cos\phi_e & -\sin\lambda_n \sin\lambda_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ u_n \end{pmatrix} \tag{6.2.10}$$

の関係がある。従って、スカラー・ベクトルともに Yin 格子の座標から Yang 格子の座標への変換は、Yang 格子の座標から Yin 格子の座標への変換と同じ形になる。

Yin-Yang 格子の利点としては、以下のようなものが考えられる。

1. 極点がないので、極点の特殊処理が不要である。
2. 格子の大きさのばらつきが少なく、最小格子の面積が最大格子の面積の 0.71 倍以上になり、ほぼ均質な扱いができる。格子の縦横比も 1 : 0.71 より大きな差になることはない [3]。

[3] 両極まで通常の緯度経度格子を用いる場合は、格子の面積や縦横比は 1 : $\cos\phi$ となり、極付近に縦横比の大きな、面積の小さい格子ができる。ガウス格子を用いる場合は、極付近の格子の大きさの問題は幾分緩和されるが、縦横比の不均一性は緯度経度格子よりも更に拡大する。

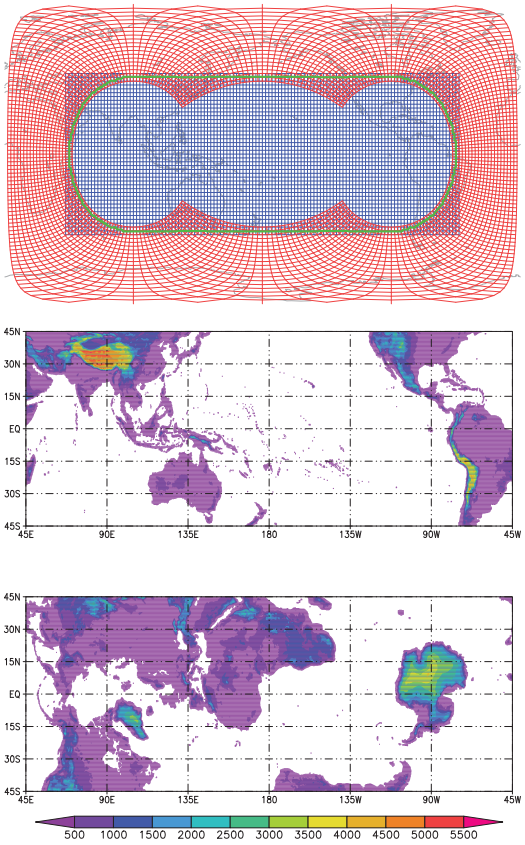

図 6.2.2　上図は緯度経度格子を重合格子法で組み合わせた場合の Yin-Yang 格子の格子配置。青が Yin 格子、赤が Yang 格子で、緑線が両者の境界になる。2.25 度（約 250 km）の格子間隔で描画している。中図は Yin 格子（通常の緯度経度格子）、下図は Yang 格子の地形の高度 [m] を示したもの。図に示した Yin 格子、及び Yang 格子の名称と定義位置は Baba et al. (2010) による。第 6.3 節の 2 次元浅水モデル試験、及び第 6.4 節の asuca-Global にもこの図の定義を用いている。Kageyama and Sato (2004) は標準子午線の両側に東西方向 135 度、赤道から南北方向 45 度の緯度経度格子を Yin 格子、それを補完するものを Yang 格子と定義した。全球分の緯度・経度を定義すると、Baba et al. (2010) の定義でも Kageyama and Sato (2004) の定義でも、インド洋と東太平洋に Yang 格子の極点がある。

3. 緯度経度座標で計算を行うため、モデル格子をそのまま出力しても、地理的な位置がわかるので、モデル格子のモニタ・利用に都合が良い。
4. 通常の緯度経度格子を用いる場合に比べて、格子数が少なく（約 75%）、計算量が節約できる。

こうした利点を活かして全球予報に使用する他にも、1 と 2 の特徴を使って、極周辺を緯度経度座標で領域を予報する際に Yang 格子を用いることも可能である。

杉村ほか (2006) は、大きさと向きの違う 2 次元の 2 つの格子パネルを、重ね合わせの大きさを変えなが

ら、有限体積法による正弦波の伝搬の精度比較を行った。この研究の中で重ね合わせ全体で相手側のパネルと情報を交換する重合交換法と、各々のパネルの外枠のみで情報交換を行う境界交換法が比較された。重合交換法では大きなパターンでの位相ずれの問題が発生しやすいのに対して、境界交換法では高周波のノイズが発生しやすい特徴があることが示された。また、有限体積法で用いるフラックス計算手法などの工夫を行うことで、境界交換法で発生する高周波ノイズは軽減できることが確認された。

杉村ほか (2006) の研究成果は、Baba et al. (2010) に利用されて、3 次元の Yin-Yang 格子の大気モデルが作成された。3 次の風上スキーム (Wicker and Skamarock 2002) によってフラックスの計算を行う Arakawa C グリッド (Arakawa and Lamb 1977) を使用したもので、時間積分に 4 次のルンゲクッタ法を使用している。鉛直方向には z^* 系の Lorenz グリッドを使用している点は、asuca に似ている。Yin-Yang 格子は境界交換法を用いて構成し、高周波ノイズを軽減するために Shapiro (1971) のフィルターを使用した。Baba et al. (2010) は重ね合わせの長さをかえて、山岳重力波の伝わり方の試験 (Qian et al. 1998) を行い、重ね合わせ長が Yin-Yang 境界での山岳波の伝わり方に影響を与えることを示している。また、Yin-Yang 境界のある北緯 45 度周辺を伝わる擾乱の時間発展などを予報する Held and Suarez (1994) の実験を行い、良好な予報が行えることを示している。

Qaddouri and Lee (2011) は、カナダ気象センター (the Canadian Meteorological Center: CMC) で現業数値予報モデルとして、Yin-Yang 格子を使用した全球非静力学モデルを開発している。このモデルは、Qaddouri (2011) による研究成果に基づいて開発されてきたものであり、これまでの CMC の全球環境マルチスケール現業モデル (Global Environmental Multiscale operational model: GEM) と同様に鉛直座標に Charney-Phillips グリッド (Girard et al. 2013) を使った有限差分法によるものである。時間積分にインプリシット法を使用しているが、Yin-Yang 格子に合わせたソルバーを使用することで、通常の緯度経度格子で計算する場合に比べて、精度を保ちつつ実行時間が短縮できることが、Zerroukat and Allen (2012) によって確認されている。また、予報モデル全体としても、これまでのモデルとほぼ同等な予報スコアが達成されていることと、スケーラビリティ[4] が改善することが Qaddouri and Lee (2011) によって示されている。

[4] Qaddouri and Lee (2011) は、利用する計算資源の増加に伴って、従来の GEM よりも Yin-Yang 格子を用いるものの方が計算時間が短縮できるようになることを示している。

6.3 2 次元モデル試験

本節では、Yin-Yang 格子を使った球面上の流体計算の精度を確認するために、Williamson et al. (1992) が提案した 2 つのテストケースについて 2 次元モデル試験を行った結果を報告する。本節に示す結果は、asuca と同じ Koren (1993) によるフラックス計算法と 3 段階ルンゲクッタ法 (Wicker and Skamarock 2002) を使った有限体積法を用いているが、一般座標と矩形格子の近似を用いる代わりに、球殻を分割した格子を使った計算を行っている。以下に先行研究 (Tomita et al. 2001; Peng et al. 2006; Baba et al. 2010) と比較しながら結果を示す。

6.3.1 定常地衡流試験

Williamson et al. (1992) は、2 次元浅水モデルの計算安定性と計算精度を試すために、テストケース 2 として、定常地衡流の予報誤差を比較する試験を提案している。下の (6.3.1) 式から (6.3.3) 式を満たす 2 次元流は地衡流のバランスによって維持される定常流となる。

$$\begin{aligned} h =& h_0 - (a\Omega u_0 + u_0^2/2) \\ & \times (-\cos\lambda\cos\phi\sin\alpha + \sin\phi\cos\alpha)^2/g \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

$$u = u_0(\cos\phi\sin\alpha + \sin\phi\cos\lambda\sin\alpha) \tag{6.3.2}$$

$$v = -u_0\sin\lambda\sin\alpha \tag{6.3.3}$$

ここで、ϕ は緯度、λ は経度で、h は流体の厚さ [m] である。u は λ 方向の、v は ϕ 方向の速度 [m s^{-1}] である。また、α は流体の軌道傾斜角[5] である。u_0 は 12 日間で赤道上を一周する速度（約 40 m s^{-1}）である。a は固体地球の半径 (6.37122×10^6 m)、Ω は地球の自転速度 (7.292×10^{-5} s^{-1})、g は重力加速度 (9.80616 m s^{-2}) で、$gh_0 = 2.94 \times 10^4$ m^2 s^{-2} となるように h_0 を与えて、厚み h が 0 にならないようにしてある。本項に示す試験は、定常流をどの程度維持できるかを確認するものであるので、初期値が解析解に一致する。

Williamson et al. (1992) は以下の 3 種類のノルムを定義して、客観的な比較を推奨している。いずれのノルムも値が 0 に近いほど精度が高いことを示す。

$$l_1 = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|h - h_T|\cos\phi\, d\phi\, d\lambda}{\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_T\cos\phi\, d\phi\, d\lambda} \tag{6.3.4}$$

$$l_2 = \frac{\{\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(h - h_T)^2\cos\phi\, d\phi\, d\lambda\}^{\frac{1}{2}}}{\{\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_T^2\cos\phi\, d\phi\, d\lambda\}^{\frac{1}{2}}} \tag{6.3.5}$$

$$l_\infty = \frac{\max_{all\lambda,\phi}|h - h_T|}{\max_{all\lambda,\phi}|h_T|} \tag{6.3.6}$$

[5] Williamson et al. (1992) では、$\alpha = 0.0, 0.05, \pi/2 - 0.05, \pi/2$[rad] の 4 つについて試験を行うことを薦めている。

h_T は h の解析解であり、l_1 は誤差の大きさの平均、l_2 は平方根平均二乗誤差、l_∞ は誤差の最大値を測定するノルムである。以下に示す結果は格子サイズ 1.125 度、Δt =162 s で計算したものである。

α を変えて 5 日予報を行った場合の結果を図 6.3.1 から図 6.3.3 に示す。それぞれ h（図 6.3.1）、u（図 6.3.2）、及び v（図 6.3.3）の予報結果と誤差が示してある。いずれの α についても、5 日予報の誤差は大きくない。

海洋研究開発機構や東京大学などが作成した準一様格子モデル NICAM(Nonhydrostatic ICosahedral Atmospheric Model) の基になった浅水モデルの試験の l_2 と l_∞ のノルムが Tomita et al. (2001) に示されている。筆者による Yin-Yang 格子による実験結果を図 6.3.4 に示す。図 6.3.4 に示した結果は Tomita et al. (2001) の glevel 6 くらいに相当する格子サイズでの計算である。l_2, l_∞ ともに誤差の絶対値は Tomita et al. (2001) と同程度である。誤差の時間経過に両者の特徴があり、Yin-Yang 格子を用いて筆者の行った実験では予報初期に誤差の成長が大きく、時間経過とともに成長は緩やかになる。予報初期には α に依存しない周期を持った振動も確認できる。Tomita et al. (2001) による結果は、α =0 の結果しか示されていないが、0.7 日程度の明瞭な誤差の振動があり、グラフは 10 を底数とするログスケールで描かれているので、誤差の絶対値に対してかなり大きな振動であることが分かる。Tomita et al. (2001) の誤差の振動は準一様格子に 20 個ある特異点間の距離と流速に関係しているものと考えられる。

Williamson et al. (1992) は、定常流維持の試験を 5 日間行うことを提案しているが、Peng et al. (2006) は $\alpha = 0$ の 12 日積分の結果を、Tomita et al. (2001) は 90 日積分の結果を示している。図 6.3.5 に筆者による Yin-Yang 格子を使った 90 日積分のノルムの時系列を示す。筆者による実験の l_2, l_∞ は Peng et al. (2006) のものよりも誤差が小さく、積分時間をのばしても誤差の増加は少ない。Tomita et al. (2001) の l_∞ の誤差は大きな振動があるものの、増加していく傾向はない。筆者の試験結果の l_∞ は、5 日以降もゆっくり増加している。

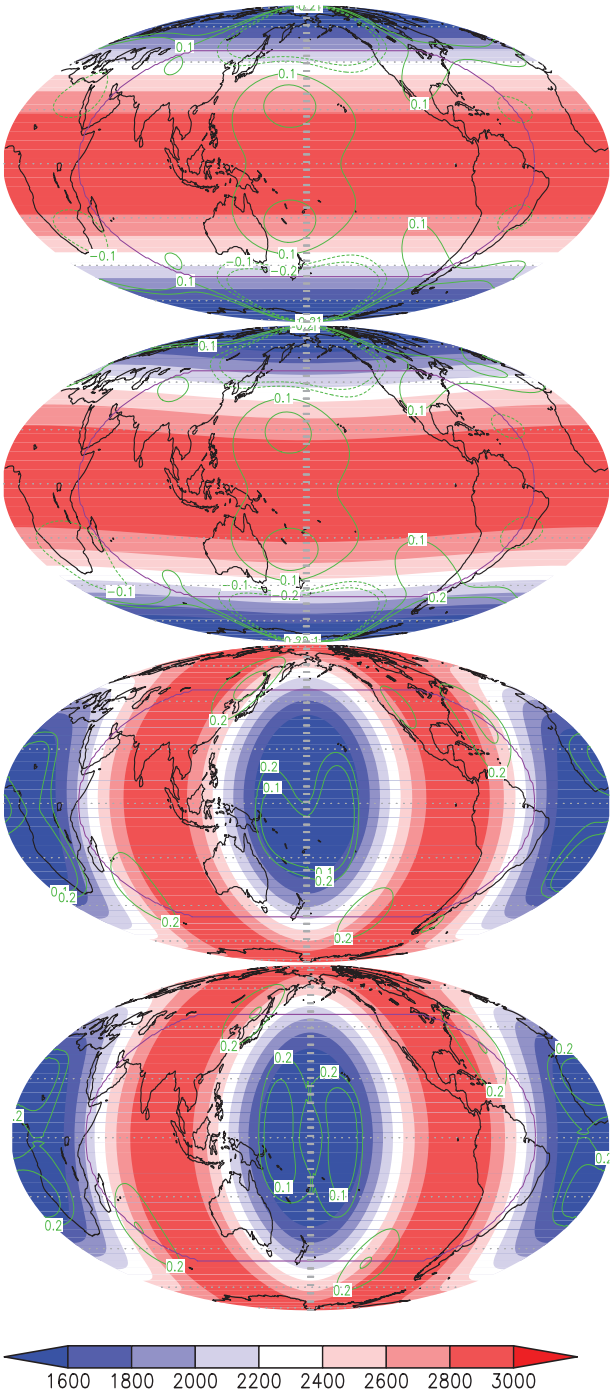

図 6.3.1　Williamson et al. (1992) のテストケース 2:定常地衡流試験の 5 日予報の h の値（色彩、単位は m）とその予報誤差（緑のコンター、単位は m）。紫線は Yin-Yang 境界の位置。最も上の図は $\alpha = 0$[rad]、上から 2 番目の図は $\alpha = 0.05$[rad]、3 番目の図は $\alpha = \pi/2 - 0.05$[rad]、最も下の図は $\alpha = \pi/2$[rad] の結果。

6.3.2　山の上を流れる地衡流の試験

前項の試験の設定を $\alpha = 0$[rad], $h_0 = 5960$[m], $u_0 = 20$[m s^{-1}] に変更して、$\lambda = 3\pi/2$[rad]（西経 90 度）、$\phi = \pi/6$[rad]（北緯 30 度）に、下の式で決まる高さ h_s の山を流体の底に置いて 15 日積分の結果を比較する。

$$h_s = h_{s0}(1 - r/R) \tag{6.3.7}$$

$$r = \{\min[R^2, (\lambda - 3\pi/2)^2 + (\phi - \pi/6)^2]\}^{\frac{1}{2}} \tag{6.3.8}$$

式からわかるように、地球の緯度・経度を参照すると、この山は米国南東部を中心とした偏楕円型の形状であり、Yin 格子と Yang 格子の境界の近くにピークを持っている。h_{s0} は 2000 m を設定する。この試験には定常解が無いので、Tomita et al. (2001)、Baba et al. (2010) にほぼ同じ解像度（何れも 1.125 度程度の格子）の試験結果が示されているので、比較いただきたい。図 6.3.6 に筆者の行った 15 日積分後の流体の厚さ h を示す。3 つの結果は概ねよく似ている。図 6.3.6

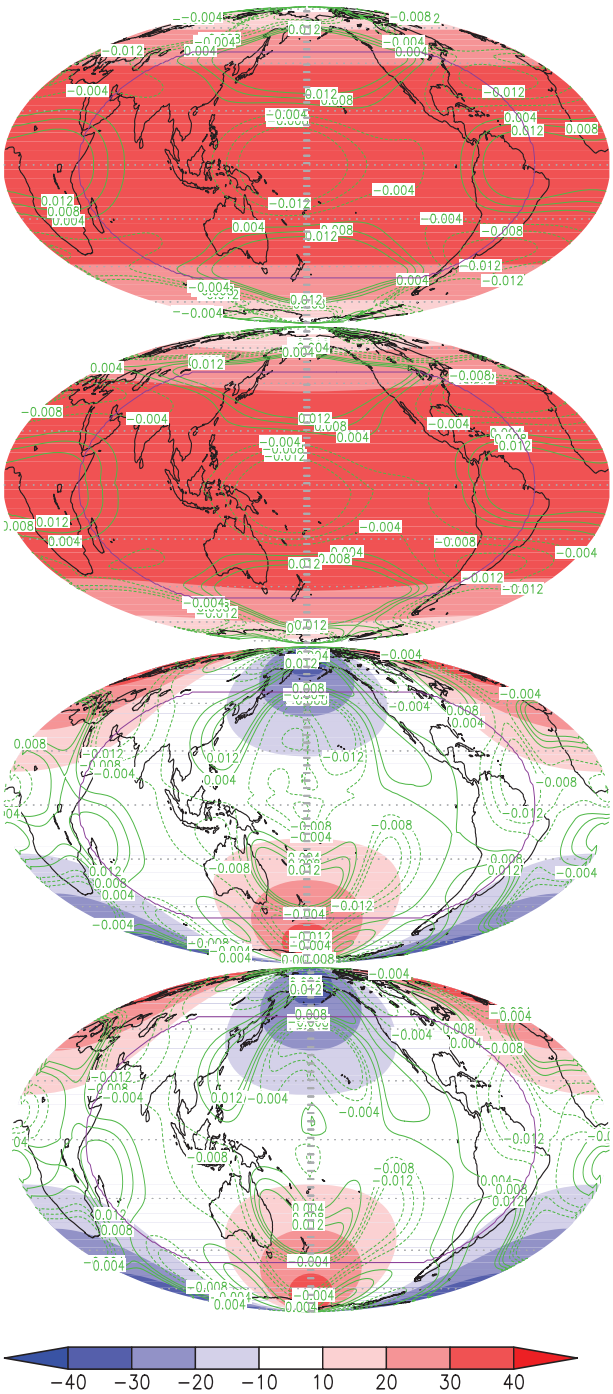

図 6.3.2　Williamson et al. (1992) のテストケース 2:定常地衡流試験の 5 日予報の u の値（色彩、単位は m s^{-1}）とその予報誤差（緑のコンター、単位は m s^{-1}）。紫線は Yin-Yang 境界の位置。最も上の図は $\alpha = 0$[rad]、上から 2 番目の図は $\alpha = 0.05$[rad]、3 番目の図は $\alpha = \pi/2 - 0.05$[rad]、最も下の図は $\alpha = \pi/2$[rad] の結果。

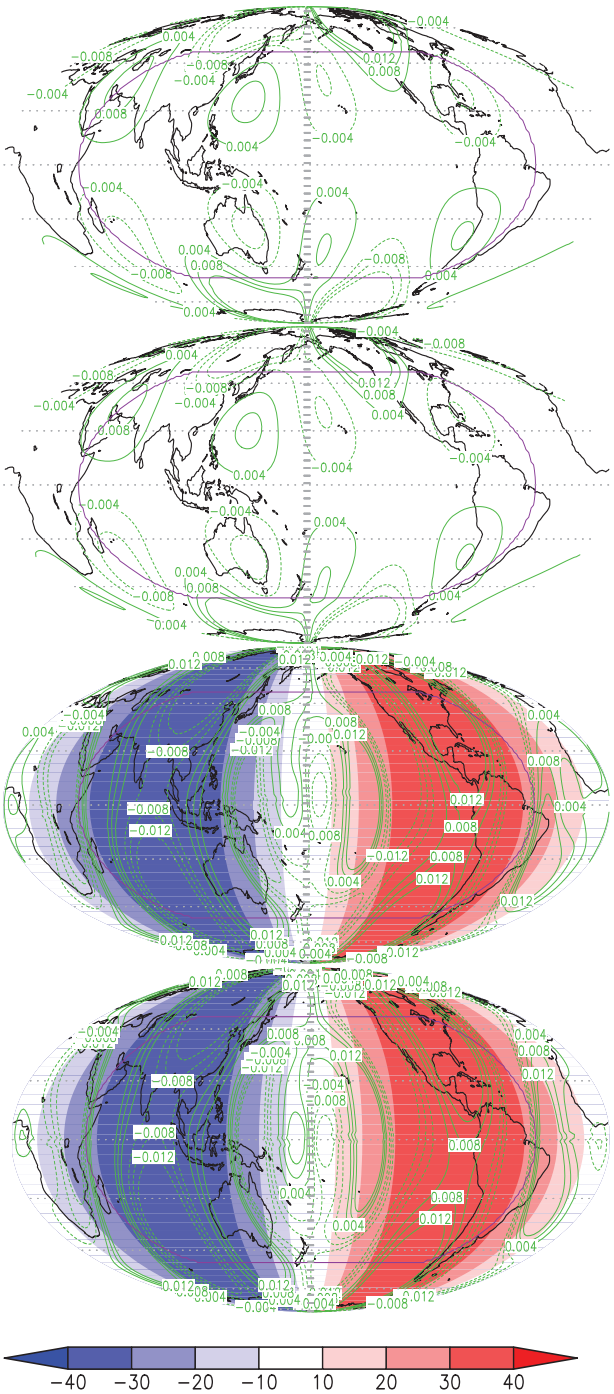

図 6.3.3　Williamson et al. (1992) のテストケース 2:定常地衡流試験の 5 日予報の v の値（色彩、単位は m s^{-1}）とその予報誤差（緑のコンター、単位は m s^{-1}）。紫線は Yin-Yang 境界の位置。最も上の図は $\alpha = 0$[rad]、上から 2 番目の図は $\alpha = 0.05$[rad]、3 番目の図は $\alpha = \pi/2 - 0.05$[rad]、最も下の図は $\alpha = \pi/2$[rad] の結果。

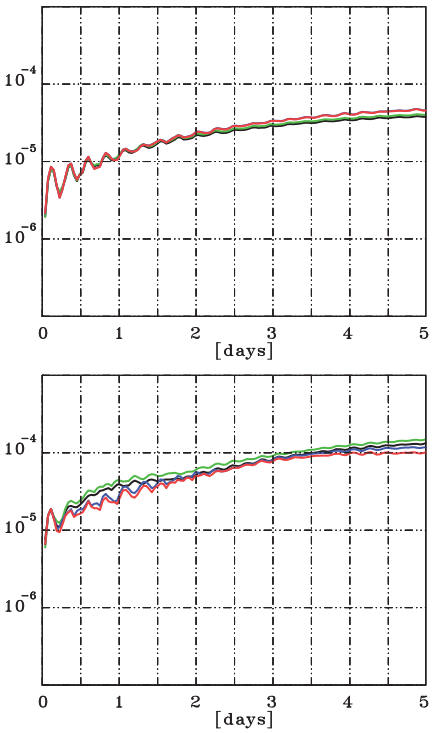

図 6.3.4　Williamson et al. (1992) のテストケース 2:定常地衡流試験の l_2 ノルム（上図）、及び l_∞ ノルム（下図）。何れの図でも、黒線は $\alpha = 0$[rad]、緑線 $\alpha = 0.05$[rad]、青線 $\alpha = \pi/2 - 0.05$[rad]、赤線 $\alpha = \pi/2$[rad] の結果。

でも、15 日積分後の状態に Yin-Yang 境界の影響から生じたと思われるような不連続は存在しないことが確認できる。

6.3.3　2 次元流の試験のまとめ

この節では、Tomita et al. (2001)、Peng et al. (2006)、及び Baba et al. (2010) の先行研究の結果と比較しながら、筆者の行った試験結果を示した。ここに示した結果は、Peng et al. (2006) の結果よりは精度が良かった。Baba et al. (2010) に示された結果は、筆者の行った実験とほぼ同等な結果となっている。準一様格子を用いた Tomita et al. (2001) と比較した場合も、定常地衡流試験の 5 日積分の誤差の絶対値は同程度であった。しかし、筆者の行った実験結果は予報初期に誤差が大きくなり、その後次第に誤差の伸びが減っていく傾向であるのに対して、Tomita et al. (2001) の示した結果は予報対象期間の長さによらず、特異点間の距離と流速によって決まる大きな振動を示すものであった。大きな誤差が発生した後に復元する仕組みには、Tomita et al. (2001) が用いている超粘性（4 次の数値拡散）が関係している可能性がある。

Yin-Yang 格子を使った試験結果に見られる予報時間とともに徐々に誤差が増えていく傾向は、90 日よりも長い期間を積分する際に問題となる可能性がある。その一方で、準一様格子の示す誤差の大きな振動は、同じ周期が卓越する現象を予報する際には少なからぬ影響を与える可能性がある。

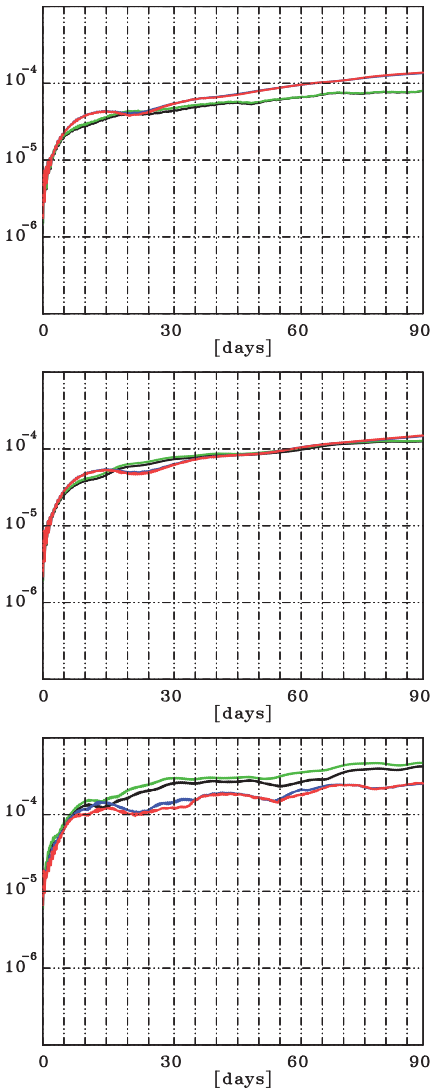

図 6.3.5　Williamson et al. (1992) のテストケース 2:定常地衡流試験の 90 日積分の l_1（上図）、l_2（中図）、及び l_∞ ノルム（下図）の時系列。黒線は $\alpha = 0$[rad]、緑線 $\alpha = 0.05$[rad]、青線 $\alpha = \pi/2 - 0.05$[rad]、赤線 $\alpha = \pi/2$[rad] の結果。

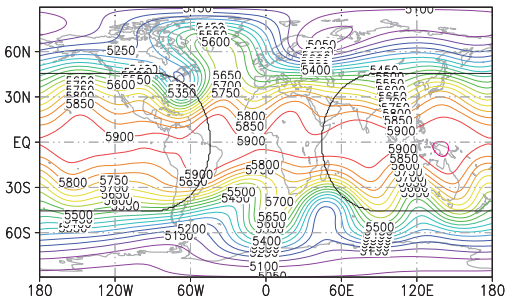

図 6.3.6　Williamson et al. (1992) のテストケース 5:山の上を流れる地衡流の試験の 15 日積分の流体の厚み h[m] の分布。黒線は Yin-Yang 境界の位置。1.125 度の格子を使用して、Δt =81s で計算を行った。標準子午線を中央にした描画にしているのは、Tomita et al. (2001)、Baba et al. (2010) との比較のため。

6.4 3 次元モデル asuca-Global

本節では、Yin 格子と Yang 格子の計算に asuca を使って、全球予報を行うためのシステム asuca-Global について述べる。第 6.4.1 項で asuca-Global の開発のねらいを、第 6.4.2 項でそれを達成するためのアプリケーションの構成について述べ、第 6.4.3 項に実行例を示す。第 6.4.4 項でスケーラビリティについて述べた後に、第 6.4.5 項に今後開発を進めるべき事項について記述する。

6.4.1 asuca-Global 開発のねらい

前節までに述べたように、Yin-Yang 格子は 2 つの緯度経度格子でのシミュレーションを組み合わせて、球体もしくは球殻状の領域のシミュレーションを行う手法であり、asuca-Global は、一般座標によって緯度経度格子での計算を行えるように設定した asuca を使用して、全球大気予報を実現するためのパッケージを asuca 自体に付加したものである。第 6.2 節にあげた Yin-Yang 格子自体が持っている利点に加えて、メソモデルとして現業的な利用が予定されている asuca を Yin-Yang 格子で全球モデルに拡張することによって、以下のような利点が期待される。

1. asuca のために開発された力学コア、物理過程などをそのまま用いるので、全球非静力学モデル全体を新規に開発する場合に比べて開発コストが圧倒的に小さい。

2. 利用する解像度にも依存するが、asuca と共通の力学コア、物理過程などをそのまま用いるので、領域版の asuca と併用する場合には、領域版に整合する外部境界値を供給できる。

3. asuca とプログラムの大半が共通なので、維持コストが小さい。

こうした全球モデルとメソモデルの共用化については、英国気象局の Unified Model が知られているが、ドイツ気象局 (Deutsher Wetterdienst: DWD) でも準一様格子非静力学全球モデル ICON(the Icosahedral Nonhydrostatic model; Majewski et al. 2002) の領域版 (Zängl 2012) の開発が進んでおり、今後は全球・メソモデルの共用化が進められるようである。水平方向にイクスプリシット法を用いる有限体積法の格子モデルでは隣接計算領域（Yin-Yang 格子間の通信は重なりのある計算領域）とのみ通信を行えば良いため、大規模並列計算機に向いており、ICON のように有限体積法格子モデル [6] で大規模並列計算機の環境での全球モデルの高解像度化を目指すことも、asuca-Global の利点の一つと考えられる。

緯度経度格子で asuca を利用できることと、Yang 格子を用いれば高緯度のシミュレーションを行う場合に特殊処理が不要であること [7] も、asuca の利用可能性を広げるために重要な利点である。メソデータ同化に使用するための十分な観測データが入手できない日本周辺域以外の領域で、ネスティングを使用したメソモデル予報値の作成が可能になる。熱帯や高緯度、日本周辺以外の中緯度域での力学過程の計算安定性の試験や、物理過程の有効性の試験を行うことが可能になる。こうした利点も、副次的なものではあるが、asuca-Global の開発の途上で得られたものである。

6.4.2 アプリケーション構成

前項に述べた開発のねらいに沿って、前節までに述べた Yin-Yang 格子の特性と asuca の特徴を利用したものとするために、asuca-Global は以下の特徴をもっている。

- モデル本体部分は可能な限り asuca と同じものを使用して、プログラムの共用化を図る。
- 有限体積法での利用実績のある境界交換法を用いた Yin-Yang 格子を使用する。これは MPI 通信のデータ量を減らすためにも有利である。
- Yin 格子と Yang 格子を同じ形で 2 次元領域分割する構成で MPI プロセスを割り振り、第 6.2 節に述べた Yin 格子と Yang 格子の対称性を利用して MPI 通信を行う相手を効率的に特定し、Yin-Yang 境界での通信回数を抑える。

図 6.4.1 に、asuca-Global のプログラム概念図を示す。Yin 格子と Yang 格子を構成する緯度経度座標の asuca に対して、各々の側面の情報を交換する相手を事前に決めておき、MPI 通信が必要なときは直接相手方のプロセスと通信を行う。出力は Yin, Yang 双方に複数ある出力用 IO プロセスから行う。また、実際に asuca と asuca-Global のプログラムの共有率は高く、asuca-Global の約 36,000 行あるプログラムの内、33,000 行以上は asuca のものをそのまま使用している。

6.4.3 実行例

この項では、asuca-Global を試験的に実行した結果を示す。asuca-Global はまだ開発途上で、実用的な予報が行える段階に達していない。積雲対流を扱う物理過程がないことに加えて、その他の物理過程も日本周辺域でのみ利用されてきたものであり、解像度の変更に伴う修正も行っていない。従って、ここで示す 0.25 度（約 28 km）の格子を使った結果は大まかな振る舞いだけを確認するものである。asuca-Global の初期値

[6] 英国気象局の Unified Model は、現在有限差分法とインプリシット時間積分法を使ったものであり、イクスプリシット法を用いる有限体積法のモデルとは性質が異なる。

[7] 極付近の計算に使用できそうなポーラーステレオなどの設定は asuca に現在実装されていない。現在使えるのは、ランベルト正角円錐図法と、Yin-Yang 格子での計算のために追加した緯度経度図法のみである。

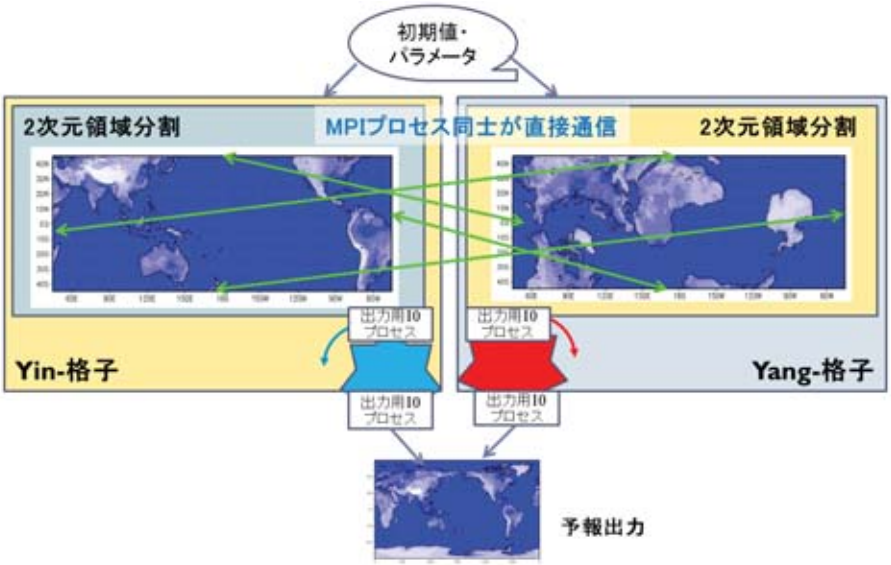

図 6.4.1　asuca-Global のプログラム概念図。

は、GSM の初期値を内挿して作成している。また、雲物理過程は asuca で使用している物理過程ライブラリに導入されたものを利用している。

図 6.4.2 に 2014 年 1 月 1 日 12UTC を初期値とする asuca-Global の 264 時間予報の結果を、図 6.4.3 に同じ時刻を初期値とする GSM の 264 時間予報の結果を示す。asuca-Global で 264 時間予報を行っても、計算上の障害は発生しない。しかし、両極で 500hPa の高度が高すぎる点や、高緯度の海面更正気圧が高く、熱帯で低い部分が広いなど、GSM の予報とはかなり違いがある。しかし、Yin 格子と Yang 格子の境界（紫線）の辺りに不連続ができていないことがわかる。

図 6.4.4 に 2012 年 10 月 26 日 00UTC を初期値とする 24 時間予報の雲量の分布を示す。ここに示している asuca-Global の結果は、初期状態で雲のない状態から予報を行っているが、赤道付近には熱帯収束帯 (Intertropical Convergence Zone: ITCZ) に、中緯度には総観規模擾乱に対応するまとまった雲域があり、中低緯度の陸上で雲が少なく、海洋上には雲が散在しているなどの非常に大まかな特徴は asuca-Global でも再現している。また、上図の asuca-Global の予報結果には Yin 格子と Yang 格子の境界付近で雲が不連続に増減している所はない。しかし、極付近や海洋上の雲が多すぎる点など、GSM の雲の分布とはかなり異なる。

図 6.4.5 に 2012 年 10 月 26 日 00UTC を初期値とする 72 時間予報の前 72 時間降水量の分布を示す。ここに示した asuca-Global の計算では積雲対流過程を使用していないために、熱帯の降水の表現が GSM の予想とは大きく異なる。asuca-Global の予想は全体的に降水域が狭く、GSM が帯状の降水を表現している ITCZ 付近でも、降水量の多い箇所が散在するような予想で、無降水のところが広い。ただし、Yin-Yang 格子の境界に不連続な降水は存在しない。

図 6.4.6 に 2012 年 10 月 26 日 00UTC 初期値の 72 時間予報の海面更正気圧、地上風速、及び全雲量の分布を示す。図中の発達した低気圧は、2012 年に米国東部に被害を与えたハリケーン・サンディに対応するものである。図 6.2.2 に示したように、この辺りには Yin 格子と Yang 格子の境界がある。強い風が Yang 格子から、Yin 格子に吹き込む状況であるが、予報に特段の支障はなく、境界付近での不連続も確認できない。

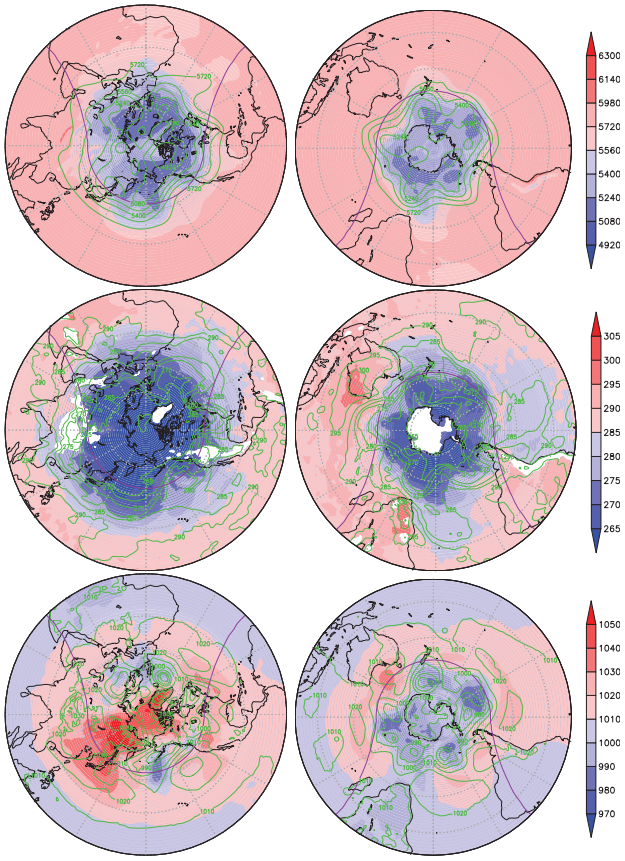

図 6.4.2　図中の陰影は、2014 年 1 月 1 日 12UTC を初期値とする asuca-Global による 264 時間予報の 500hPa の高度（上図、単位は m）、850hPa の気温（中図、単位は K）、海面更正気圧（下図、単位は hPa）。緑のコンターは GSM の 2014 年 1 月 12 日 12UTC の初期値の各要素。紫の線は Yin 格子と Yang 格子の境界。左が北半球、右が南半球の図である。850hPa の気温については、地表面の気圧が 850hPa 以下となる部分を白抜きにしてある。

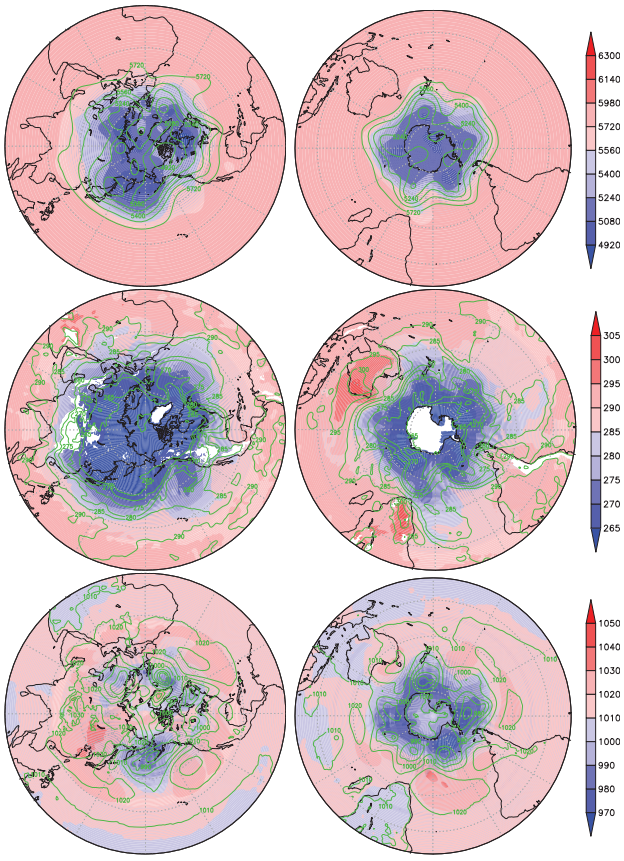

図 6.4.3　図中の陰影は、2014 年 1 月 1 日 12UTC を初期値とする GSM による 264 時間予報の 500hPa の高度（上図、単位は m）、850hPa の気温（中図、単位は K）、海面更正気圧（下図、単位は hPa）。緑のコンターは GSM の 2014 年 1 月 12 日 12UTC の初期値の各要素。左が北半球、右が南半球の図である。850hPa の気温については、地表面の気圧が 850hPa 以下となる部分を白抜きにしてある。

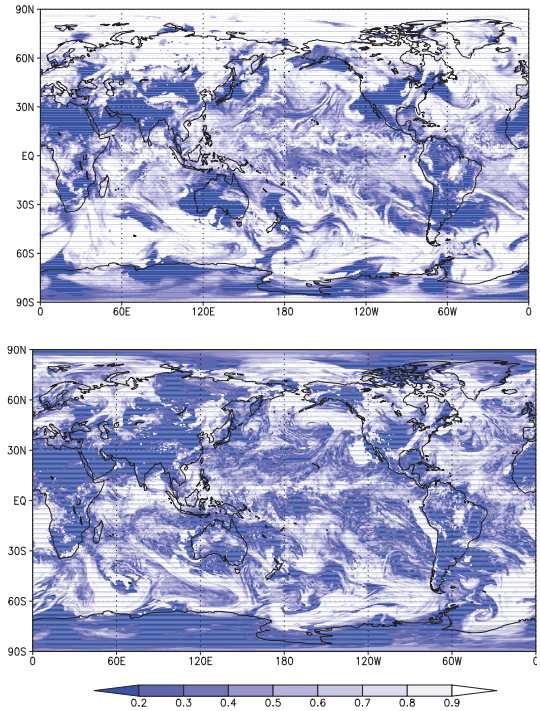

図 6.4.4　2012 年 10 月 26 日 00UTC を初期値とする 24 時間予報の全雲量分布。上図は asuca-Global によるもの。下図は GSM の予報（ルーチン）。1 が雲の占有率 100%に対応する。

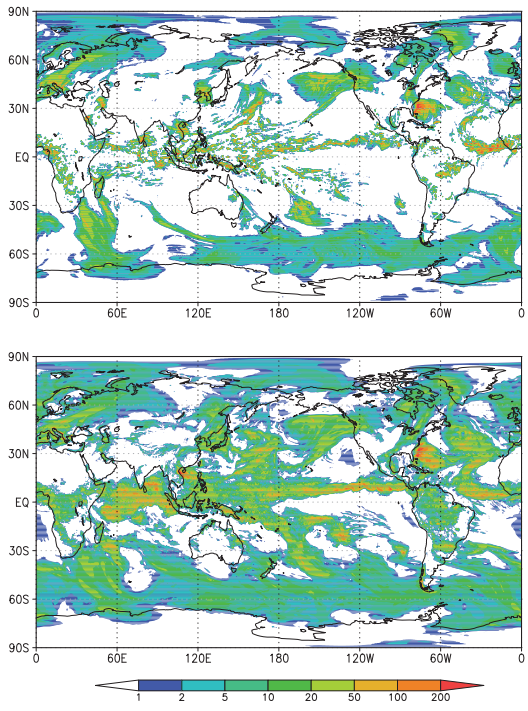

図 6.4.5　2012 年 10 月 26 日 00UTC を初期値とする 72 時間予報の前 72 時間降水量 [mm] の分布。上図は asuca-Global によるもの。下図は GSM の予報（ルーチン）。

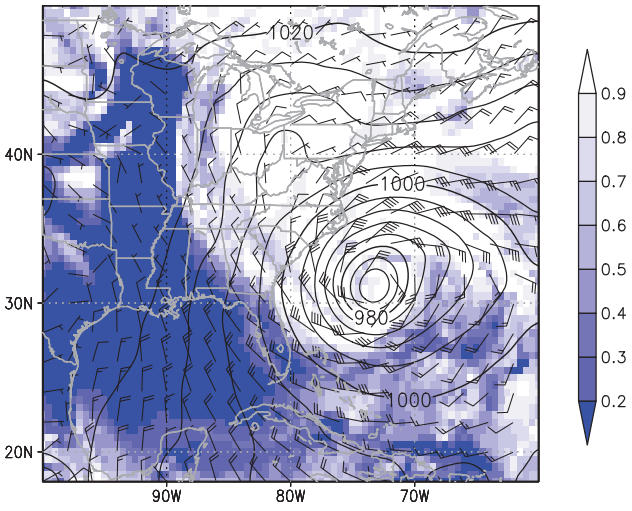

図 6.4.6　2012 年 10 月 26 日 00UTC を初期値とする asuca-Global による 72 時間予報の海面更正気圧（コンター、単位は hPa）、地上風向・風速（矢羽、長い矢羽が 10kt、短いものは 5kt）、及び全雲量。雲量は 1 が雲の占有率 100%に対応する。

表 6.4.1　使用するノード数と実行時間

ノード数	15	20	30	45	60
MPI プロセス数	120	160	240	360	480
実行時間 [s]	8059	6337	4414	3237	2415
実行時間比	1	0.79	0.55	0.40	0.30

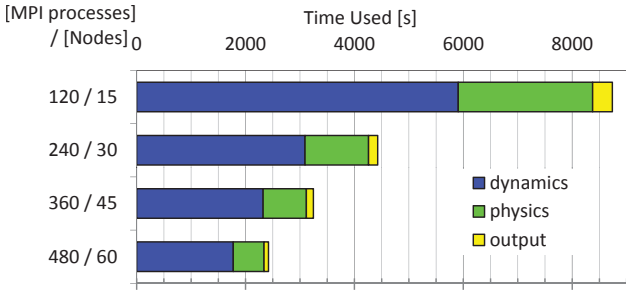

図 6.4.7　asuca-Global による 72 時間予報を利用するノード数を変えて、実行した場合の出力 (output)、物理過程 (physics)、及び力学 (dynamics) の計算時間。縦軸は使用した MPI プロセスの数とノードの数を、横軸は計算時間 [s] を示す。

6.4.4　実行性能（実行時間について）

第 6.4.1 項に述べたように、イクスプリシット法を用いた有限体積法の格子モデルを用いる利点の一つは大規模並列環境で多くの計算資源を有効に利用して高速に計算が行えることである。asuca-Global のスケーラビリティを確認するために、気象庁スーパーコンピュータシステム (HITACHI SR16000M1) で、0.25 度の格子 (格子数は 1080×360×2=777600 個) を Δt =60sec で、使用ノード数を変えながら 72 時間予報を行った際の実行時間を表 6.4.1 に示す。ノード数の増加によって、実行時間が短縮されていく様子が確認できる。

図 6.4.7 に、使用するノード数を変えて、asuca-Global の 72 時間予報を実行した場合の計算時間を、出力処理 (output)、物理過程 (physics)、力学 (dynamics) に分けて示す。入力は、力学の一部に含めている。また、asuca は非同期通信を用いることで、通信を行っていない計算プロセスを待たせずに計算を続けさせる工夫が施されているので、通信の実行時間を分離していない。通信、及びその待ち時間は、主に力学に含まれている。出力、物理過程、力学のいずれもノードの数にほぼ反比例して、実行時間が減少している。力学については、出力、物理過程に比べるとノード数を増やした場合の実行時間の減り方がやや鈍い。また、全体の計算時間の大半は力学が占めている。力学の中には、全球計算を行うための計算と通信が少なからず含まれており、この部分の高速化の工夫が更にスケーラビリティを改善するために必要であると考えられる。今後も実行性能の確認を行いながら、実行時間を短縮することを心掛けて開発を続けていく必要がある。

6.4.5　今後に向けて

3 次元モデル asuca-Global の開発は、気象庁スーパーコンピュータシステムが更新された 2012 年から始めたばかりである。格子系の境界で保存性の向上や、格子系の間の通信の高速化などのために今後も努力を続けていく必要がある。現在、第 7.2 節に記した「京」コンピュータの上でのモデル比較に参加しており、その活動を通して asuca-Global の力学過程の完成度を更に高めたいと考えている。

asuca で利用している物理過程は、日本付近における高解像度予報のために準備されたものである。他の地域や解像度での十分な試験は行われておらず、この節で取り上げた 0.25 度の格子で行った予報で現実の気象・気候の表現について議論することはできない。他の全球モデルと比較を行いながら開発を進めていくためにも、低解像度で利用できる物理過程や、高解像度で日本周辺以外でも十分な精度で予報ができる物理過程の開発が望まれる。また、全球の高解像度の実験には大きな計算資源が必要であるので、高解像度の日本周辺以外での物理過程の開発には、緯度経度版の asuca が役立つ場合もあるだろう。

本章に示した計算には、図 6.2.2 の格子系の配置を用いている。我が国のように国土の大部分が北緯 45 度以南にある [8] 国においては、この配置でも十分なメリットはある。しかし、低緯度帯をわざわざ Yang 格子で

[8] 北海道の一部が北緯 45 度以北にあるが、Yin 格子は北緯 45 度より高緯度側に Yang 格子に重なる部分をもっているので、特に高解像度で予報を行う場合でなければ、Yin 格子からの出力だけで国内の予報を作成できる。

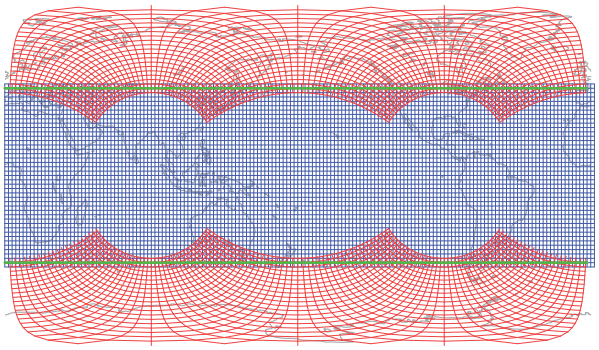

図 6.4.8　中低緯度帯を Yin 格子のみで計算する場合の Yin-Yang 格子の配置。

計算する意味はない[9] ので、将来的に実用化する際は、図 6.4.8 に示すような格子配列を用いた方が良いであろう。図 6.4.8 の配置でも Yin 格子と Yang 格子の間の通信量は同じである。出力後に座標変換を行わずに中・低緯度を高解像度で容量の少ないファイルで利用できる方が、プロダクト作成・利用上のメリットは大きいと考えられる。

6.5　まとめ

Yin-Yang 格子を用いて、緯度経度座標のモデルを組み合わせて全球を計算する研究・開発を行っている。2 次元モデル試験では、外部研究機関が行った先行研究と比較しながら調査を行い、同程度の結果が得られることを示した。また、asuca を緯度経度座標で用いて、Yin-Yang 格子で組み合わせることによって、全球を計算する試みを 2012 年のスーパーコンピュータシステムの更新後に始めた。現在はひととおりの計算が行える仕組みを開発中である。

asuca と共通の力学・物理過程を使用した全球非静力学モデルとして、また、今後の全球モデルの更なる高解像度化に向けての物理過程の試験環境としても、asuca-Global の開発は、今後の数値予報の発展に寄与するであろう。

参考文献

Arakawa, A. and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, Academic Press, Vol. 17, 173–265.

Baba, Y., K. Takahashi, and T. Sugimura, 2010: Dynamical Core of an Atmospheric General Circulation Model on a Yin-Yang Grid. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 3988–4005.

Girard, C., A. Plante, M. Desgagné, R. McTaggart-Cowan, J. Côté, M. Charron, S. Gravel, V. Lee, A. Patoine, A. Qaddouri, M. Roch, L. Spacek, M. Tanguay, P. A. Vaillancourt, and A. Zadra, 2013: Staggered Vertical Discretization of the Canadian Environmental Multiscale (GEM) model using a coordinate of log-hydrostatic-pressure type. *Mon. Wea. Rev.*, doi:10.1175/MWR–D–13–00 255.1.

Held, I. M. and M. J. Suarez, 1994: A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **75**, 1825–1830.

Kageyama, A. and T. Sato, 2004: "Yin-Yang Grid" : An Overset Grid in Spherical Geometry. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **5**, Q09 005, doi:10.1029/2004GC00 734.

Koren, B., 1993: A Robust Upwind Discretization Method For Advection, Diffusion And Source Terms. *CWI Technical Report NM-R 9308*, 1 – 22, URL `http://oai.cwi.nl/oai/asset/5293/05293D.pdf`.

Majewski, D., D. Liermann, P. Prohl, B. Ritter, M. Buchhold, T. Hanisch, G. Paul, W. Wergen, and J. Baumgardner, 2002: The Operational Global Icosahedral-Hexagonal Gridpoint Model GME: Description and High-Resolution Tests. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 319–338.

Peng, X., F. Xiao, and K. Takahashi, 2006: Conservative Constraint for a quasi-uniform overset grid on the sphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **132**, 979–996.

Purser, R. J., 2004: The bi-Mercator Grid as a Global Framework for Numerical Weather Prediction. *Presentation at the workshop on the solution of partial differential equations on the sphere*, 20–23, June, 2004 at the Earth Simulator Center.

Qaddouri, A., 2011: Nonlinear shallow-water equations on the Yin-Yang grid. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 810–818, doi:10.1002/qj.792.

Qaddouri, A. and V. Lee, 2011: The Canadian Global Environmental Multiscale model on the Yin-Yang grid system. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 1913–1926.

Qian, J.-H., F. H. Semazzi, and J. S. Scroggs, 1998: A global nonhydrostatic semi-Lagrangian atmospheric model with orography. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 747–771.

[9] Qaddouri and Lee (2011) のように、高緯度にあるカナダでの利用を考える場合などは通常の Yin-Yang 格子を選ぶ十分な理由がある。CMC の Yin-Yang 格子モデルでは、カナダ全域が Yang 格子に収まるような領域を設定して運用される予定である。

Shapiro, R., 1971: The use of linear filtering as a parameterization of atmospheric diffusion. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 523–531.

杉村剛, 高橋桂子, 坂上仁志, 2006: 重合格子法における数値誤差の発生とその解消法. ながれ, **25**, 247–256.

Tomita, H., M. Tsugawa, M. Satoh, and K. Goto, 2001: Shallow Water Model on a Modified Icosahedral Geodesic Grid by Using Spring Dynamics. *J. Comput. Phys.*, **174**, 579–613.

Wicker, L. J. and W. C. Skamarock, 2002: Time-splitting methods for elastic models using forward time schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2088–2097.

Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber, 1992: A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equations in Spherical Geometry. *J. Comput. Phys.*, **102**, 211–224.

Xiao, F., T. Yabe, X. Peng, and H. Kobayashi, 2002: Conservative and oscillation-less atmospheric transport schemes based on rational functions. *J. Geophys. Res.*, **107**, (D22), 4609, doi: 10.1029/2001JD001 532.

Yabe, T. and T. Aoki, 1991: A universal solver for hyperbolic equation by cubic-polynomial interpolation. I: One-dimensional solver. *Comput. Phys. Commun.*, **66**, 219–232.

Zängl, G., 2012: Extending the Numerical Stability Limit of Terrain-Following Coordinate Models over Steep Slopes. *Mon. Wea. Rev.*, **140**, 3722–3733.

Zerroukat, M. and T. Allen, 2012: On the Solution of Elliptic Problems on Overset/Yin-Yang Grids. *Mon. Wea. Rev.*, **140**, 2756–2767.

第 7 章　大規模並列計算機向け対応

7.1　GPU 向け数値予報モデルの動向 [1]

7.1.1　はじめに

スーパーコンピュータは地球大気の数値シミュレーションばかりでなく、地震や津波のような気象以外の自然現象に対する防災シミュレーションや自動車の設計等の産業分野、さらには生命科学、医療、社会科学分野に至るまで幅広い分野で用いられている。スーパーコンピュータは今後もわが国の基盤技術の一つとして必要不可欠なものである一方、スーパーコンピュータの今後の技術動向については、そのアーキテクチャの発展や省電力化の技術開発、利活用の推進などに多くの課題が残されている。

このような情勢を背景に、将来のスーパーコンピュータの開発方針については、文部科学省を中心に様々な調査・検討の取り組みが行われている。その一つとして、文部科学省の「HPCI [2] 計画推進委員会」に設置されたいくつかの作業部会での議論をまとめた HPCI 技術ロードマップ白書 [3]（以下、白書と言う）がある。これによると、CPU とアクセラレータ（CPU を補助して演算速度を加速させる装置）を組み合わせたアーキテクチャ（ヘテロジニアスアーキテクチャ）が今後のスーパーコンピュータを支える技術として有望視されており、アクセラレータの例として、GPU(Graphic Processing Unit) や MIC(Many Integrated Core) が挙げられている。また、演算性能の向上にメモリバンド幅の向上が追いつかなくなり B/F 値 [4] が低下していく状況が今後も続くことから、高速小容量のメモリと低速大容量のメモリとを組み合わせたメモリの階層構造がさらに必要となること、複雑化したメモリ構造に対応して性能向上を図るためには、メモリ配置を意識したプログラミングが必要となることなどが述べられている。白書では、主要なアプリケーションの分析も行い、様々な問題に適用可能な「汎用型」とメモリ性能を重視する「容量・帯域重視型」、逆に演算性能を重視する「演算重視型」、メモリ容量を極力削減した「メモリ容量削減型」の 4 種類のアーキテクチャが考えられると述べられている。

また、文部科学省は HPCI 計画推進委員会の下に「今後の HPCI 計画推進のあり方に関する検討ワーキンググループ [5]」を設置し、将来のスーパーコンピュータの計画推進について検討を行ってきた。ワーキンググループが平成 25 年 6 月にとりまとめた中間報告 [6] では、システム技術の動向として、GPU や MIC 等の新型プロセッサにより演算性能を向上させているシステムが多く見られるようになっていることを述べている。また、将来の日本におけるスーパーコンピュータのインフラとして、様々なアプリケーションに対応するために、幅広い分野に対応可能な高い計算性能を持つフラッグシップシステムと、フラッグシップシステムでは実効性能が低いアプリケーションに特化した複数のシステムによる構成を検討している。さらに、ワーキンググループの下に設置されたシステム検討サブワーキンググループは、フラッグシップシステムとして、汎用部に加速部を加えた、上述のヘテロジニアスアーキテクチャが妥当であると判断している [7]。

このような状況を考えると、今後はヘテロジニアスアーキテクチャによるシステムが中心となっていくと考えられ、気象庁においてもアクセラレータの利用に向けた取り組みが必要となると考えられる。上述の通り計算機性能を十分に引き出すためには、メモリ配置を意識したプログラミングが重要であり、そのための知見を蓄積していく必要がある。そこで、数値予報課では東京工業大学（以下、東工大）と共同で実際に GPU を用いた asuca の実行について研究を行っている。

GPU コンピューティングと GPU による asuca の実行については既に室井 (2011) で報告されているため、本節では、GPU コンピューティングについて簡単に述べた後に、共同研究の成果として実際に asuca のソースコードに加えた変更の概略を説明する。また、室井 (2011) 以後に GPU コンピューティングの環境は大きく変わっており、様々な GPU 向けプログラミングモデルが選択可能になるとともに、数値予報分野でも GPU 対応が進んできている状況を受け、以下では、GPU 向けプログラミングモデルと数値予報分野における GPU 対応についてレビューする。

7.1.2　GPGPU とは

GPGPU については室井 (2011) で述べられているので、以下の説明に必要な内容に絞って解説する。パソコンなどで使われている CPU に対して、GPU はグラフィック表示の処理に特化したプロセッサである。CPU は汎用的に使うために、異なるデータに対して異なる命令を実行するといった複雑な処理を行う必要がありコアを肥大化させてきた。一方、GPU が対象とするグラフィック表示においては、複数のデータに対して同じ命令を同時に実行することが重要であり、複雑な処

[1] 石田 純一、室井 ちあし
[2] High Performance Computing Infrastructure の略
[3] http://open-supercomputer.org/wp-content/uploads/2012/03/hpci-roadmap.pdf
[4] メモリバンド幅 (Byte/s) と演算性能 (Flops) の比。
[5] 気象庁から著者の室井が委員として参画している。
[6] http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shinkou/028/gaiyou/__icsFiles/afieldfile/2013/07/10/1337595_1.pdf
[7] http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shinkou/028/028-1/gaiyou/__icsFiles/afieldfile/2013/11/26/1341630_1.pdf

理を行う必要がない分、GPU のコアはシンプルで済む。さらに、コアがシンプルであるため、多数のコアを搭載することができ、トータルの演算能力を向上できる。近年では、スーパーコンピュータの評価において消費電力をいかにして抑えるか、といった観点が重要となってきている。この点で、GPU は複雑な処理を行うことはないものの、シンプルな処理に特化して省電力で高速計算を行えることから注目を浴びている。Green500 [8] というエネルギー消費効率の良いスーパーコンピュータのランキング [9] において、 2013 年 11 月には GPU を利用した東工大のスーパーコンピュータシステム (TSUBAME KFC) が第 1 位となっている。

当初の GPU はグラフィック表示に特化したものであった。一方、科学技術計算においては複数のデータに対して同じ命令を同時に実行することが圧倒的に多く、グラフィック表示で必要とする処理と似ている部分がある。そこで、GPU を汎用的な処理（科学技術計算）に利用できるように進化させたものが GPGPU(General Purpose computing on GPUs) である。気象の数値予報分野においても、このような事情が当てはまることから、GPU の利用が徐々に広まりつつある（第 7.1.6 項)。なお、以降では特に理由が無い限り GPGPU と GPU とを区別せずに GPU と記述する。

GPU の特徴として、多数のスレッドを同時に高速に処理できる点がある。スレッドとは CPU のプログラミングでも用いられる概念であり、例えば、繰り返し計算において、どの要素に対しても依存関係がなく同じ処理を行う場合に、その計算を複数に分割して行うことを指す。気象の数値予報計算では計算領域に配置された多くの格子に同じ計算を繰り返し実行するためこのような処理が大半である。なお、GPU を利用するための言語 CUDA(Compute Unified Device Architecture) では、スレッドが実行するコードをカーネルと呼んでいる。また、スレッドをまとめてブロックと呼び、さらにブロックをまとめてグリッドと呼んでいる。ソースコードの書き換えにあたってはこのような概念を意識する必要がある (次項で簡単にソースコードを紹介するが、そこではグリッドについては触れない)。

GPU のもう一つの特徴としてメモリの階層構造の制御があげられる。CPU のメモリ階層構造では、コアに近いメモリほど容量が少なく高速であり、遠くなるにつれて低速になるが容量が増えるような配置が一般的である。GPU においても同様に、コアから遠い順に全てのスレッドから参照可能なグローバルメモリ (相対的に大容量・低速)、複数のスレッドで参照可能だが全てのスレッドからは参照できないシェアードメモリ（小容量・高速)、スレッド間で共用しないレジスタ（小容量・高速：シェアードメモリよりも高速）となっていて、CUDA のプログラミングにおいては変数毎にどのメモリにおくかコントロールすることで、より性能を引き出すことができる。より高い性能を引き出すためには、スレッドの起動が高速であることを活かすと共に、メモリ階層を意識したコーディングが必要である。

[8] http://www.green500.org/
[9] 毎年 2 回 6 月と 11 月に更新される。

7.1.3 GPU による asuca の実行へのアプローチ

ここでは asuca を GPU で利用するために移植した際の方針について説明する。

冒頭に述べた asuca を GPU で実行させるための共同研究を開始した時点では、数値予報モデルを GPU で実行することはまだ一般的ではなく、WRF のプログラムコードの一部を GPU で動作するように書き換えて高速化したことが報告されていた程度であった。WRF の高速化とは、ソースコードで見ると全体の 1%に過ぎない雲物理過程が計算時間では 25%を占めていてボトルネックとなっていたことから、雲物理過程を GPU 向けに書き換えることによって 20 倍の高速化を達成し、全体として 1.2 − 1.3 倍の高速化を達成した (Michalakes and Vachharajani 2008) ものである。このようにソースコードの一部を書き換えるアプローチでは、GPU による高速化の効果は局所に限定され実際に得られる高速化率は限られる。上記の通り、GPU 向けに書き換えた部分が 20 倍に高速化されるとした場合、計算時間の 95%を占める部分を GPU 向けに書き換えても、全体の高速化は $1/\{(1-0.95)+0.95/20\} \sim 10.25$ 倍にしかならない。さらに、CPU と GPU はメモリを共有していないため、実際には CPU と GPU の間のメモリ転送に大きな時間がかかることも考慮する必要がある。数値予報モデルにおいては、力学過程や物理過程で計算した時間変化率を用いて時間積分を行い、そこで変更された予報変数やそこから診断された変数を用いて再び、力学過程や物理過程の計算を行うことを繰り返す。時間変化率の計算または時間積分の計算のたとえ一部であっても GPU で実行されない場合、時間積分の各ステップで CPU で計算した結果の GPU への転送及び GPU で計算した結果の CPU への転送が必要となり、多くの時間を要する。そこで、この共同研究においては、モデルの時間積分全体を GPU 向けに書き換えることとした。すなわち、CPU で初期値等を読み込んだ後に、データを GPU に転送し、力学過程・物理過程のそれぞれの時間変化率の計算と時間積分を全て GPU で行うというアプローチである。この場合、時間積分の各ステップでの CPU と GPU の間のメモリ転送は不要となり、大幅な高速化が可能となる。

7.1.4 GPU 向けソースコードの変更例

ここでは、GPU 向けソースコードの例を示す。まず、室井 (2011) に示されている通り、Fortran から C 言語へ書き換え、さらに C 言語から CUDA C [10] へと書き

[10] CUDA には C 言語を基にした CUDA C と Fortran を基にした CUDA Fortran とがあるため、区別して CUDA C と呼ぶ。

```
!$OMP PARALLEL DO
do j = 1, ny
do i = 1, nx
do k = 1, nz
  dens_ptb_v_rk_s(k,i,j) = dens_ptb_v_s(k,i,j) &
 & - ( mom_xi_v(k,i,j) - mom_xi_v(k,i-1,j) &
 &   + mom_yi_v(k,i,j) - mom_yi_v(k,i,j-1) &
 &   + mom_zi_v(k,i,j) - mom_zi_v(k-1,i,j) ) &
 & * dt_rk_s
end do
end do
end do
!$OMP END PARALLEL DO
```

図 7.1.1 Fortran コードの例。3 次元配列を取り、内側からインデックスを鉛直 (k)、東西 (i)、南北 (j) 方向にとる。

```
for(int j= ny_mgn; j<ny + ny_mgn; j++){
for(int k= nz_mgn; k<nz + nz_mgn; k++){
for(int i= nx_mgn; i<nx + nx_mgn; i++){
  int ix = lnx*lnz*j     + lnx*k     + i;
  int im = lnx*lnz*j     + lnx*k     + i-1;
  int jm = lnx*lnz*(j-1) + lnx*k     + i;
  int km = lnx*lnz*j     + lnx*(k-1) + i;
  dens_v_rk[ix] = dens_v[ix]
    - ((mom_xi_v[ix] - mom_xi_v[im])
     + (mom_yi_v[ix] - mom_yi_v[jm])
     + (mom_zi_v[ix] - mom_zi_v[km]) ) * dts;
}
}
}
```

図 7.1.2 C 言語へ書き換えた例。3 次元配列が 1 次元配列となる。また、連続するメモリへの配置順序を東西方向、鉛直方向、南北方向と変えている。

換える手順を踏む。これは、共同研究の開始時点では CUDA C が GPU の利用にあたり最適と考えたためである。以下、同じソースコードが、Fortran、C 言語、CUDA C でどのように変わるかを見る。

asuca の計算の多くは 3 次元のループになっている。この例として図 7.1.1 に split-explicit 法の密度の時間積分 (第 2.3.3 項を参照) を行う部分の Fortran によるソースコードを示した [11]。あるセル（格子点）の密度の時間変化率の計算において、セル境界のそれぞれの面でその面と直交する運動量を参照する。そして、求められた時間変化率に積分時間間隔を乗じて現在値に加えることにより次の時刻における値が求められる。Fortran では 3 次元配列を用い、インデックスの内側から鉛直方向 (k)、東西方向 (i)、南北方向 (j) としている。この部分にはループ順序の依存性はなく、配列の内側から外側に向かってループを書いている。次に、CUDA C に移る前の段階として C 言語に書き換える。C 言語によるソースコードは CUDA C の検証コードとしても用いられる。C 言語に書き換えたソースコードを図 7.1.2 に示す。本研究に利用したモデルの設定では東西及び南北方向の格子数が鉛直方向の格子数よりも多いために、東西方向のループを最内側としてループ長が長くなるように順序を入れ替えている。次に、CUDA C へ書き換える際に、GPU の効率を引き出すために、以下の方針とした。

- C 言語に書き換えた 3 重ループの多くは図 7.1.2 で示したように書かれている。これは、GPU で用いられる概念であるスレッド・ブロックを用いると、「スレッドをまとめたブロックを 2 次元とし（ここでは内側のループである i と k を指す）、残りの 1 次元の方向（ここでは j）に進んでいく」と表現する。このとき、スレッドの数が多いほど効率が良いため、ブロックとする 2 次元にはもっとも格子数が多いものを取る。
- 3 重ループの中に依存がなければ、ブロックとする 2 次元は任意に選択できるが、依存がある場合は任意にはとれない。例えば、鉛直 1 次元の連立方程式を消去法で解く場合は鉛直方向に依存があり、その方向に計算を進める必要があるため、i と j を内側として k の方向に進むように計算する。
- 計算を進めていく方向に参照する変数については他のスレッドから参照できなくても良いため、最も高速なレジスタに置く。それ以外の変数についてはレジスタの次に高速なシェアードメモリに置く。図 7.1.2 の例で言えば、あるセル (i,k,j) を計算したスレッドはその次には (i,k,j+1) のセルに対して計算を行う。従って、両者のセル境界にある変数 mom_yi_v はこの 2 つのセルの計算に用いられるだけで、他のセルの計算には用いられない。すなわち、他のスレッドから参照する必要がないためレジスタに置くことができる。一方、mom_xi_v はセル (i,k,j) とセル (i+1,k,j) の計算に用いられるなど別のスレッドから参照されるため、シェアードメモリに置く。mom_zi_v も同じ理由でシェアードメモリに置く。
- 複数の GPU 計算においては MPI を用い、計算と通信をオーバーラップする。すなわち、各 MPI プロセスでは予報領域を水平 2 次元分割した 3 次元領域を持っており、隣接 MPI プロセスが持つ情報が必要な領域は数格子幅の東西南北の壁付近の領域だけである。そこで、隣接 MPI プロセスが持つデータの通信と並行して各 MPI プロセスは中心付近の格子に対して演算を行う。

ここで示した対応策のうち、最初の 3 点は GPU 向けの書き換えに固有の変更である一方、最後に示した計算と通信のオーバーラップについては現在の計算機でも有効になりうる対応である [12] 。

[11] 解説のために実際のソースコードを一部書き換えている。

[12] ただし、今までに HITACHI SR16000M1 でテストした限りではオーバーラップによる効果はそれほど見えなかった。

density.cu の一部

```
001: ...
002: dim3 threads(BLOCK_DIM_X, BLOCK_DIM_Y);
003: dim3 blocks(get_griddim(grid_->lnx(), threads.x), get_griddim(grid_->lnz(), threads.y));
004: density_gpu::dyn_hevi_dens_gpu <0, 0, 0><<<blocks, threads>>>(grid_->parameters(),
005:     dens_v_rk, dens_v, mom_xi_v, mom_yi_v, mom_zi_v,dts);
```

density_gpu.cu の一部

```
001: global__ void dyn_hevi_dens_gpu(const struct ::GridParameters grid,
002:    FLOAT *dens_v_rk, const FLOAT *dens_v,
003:    const FLOAT *mom_xi_v, const FLOAT *mom_yi_v, const FLOAT *mom_zi_v, FLOAT dts)
004: {
005:     ...
006:     __shared__ FLOAT s_mom_xi_v[(block_dim_x+1)*(BLOCK_DIM_Y+1)];
007:     __shared__ FLOAT s_mom_zi_v[(block_dim_x+1)*(BLOCK_DIM_Y+1)];
008:     ...
009:     for (int jj=0; jj< (NJ <= 0 ? grid.ny + NJ : NJ); jj++) {
010:         const int ix     = grid.lnx*grid.lnz*j     + grid.lnx*k     + i;
011:         const int im     = ix - 1;
012:         const int km     = ix - grid.lnx;
013:         s_mom_xi_v[s_ix] = mom_xi_v[ix];
014:         s_mom_zi_v[s_ix] = mom_zi_v[ix];
015:         const FLOAT mom_yi_v_ix = mom_yi_v[ix];
016:         if (!(i == grid.nx_mgn - 1 || k == grid.nz_mgn - 1)) {//continue;
017:             dens_v_rk[ix] = dens_v[ix]
018:                 - ( (s_mom_xi_v[s_ix] - s_mom_xi_v[s_im])
019:                     + (mom_yi_v_ix - mom_yi_v_jm)
020:                     + (s_mom_zi_v[s_ix] - s_mom_zi_v[s_km]) ) * dts;
021:         }
022:        mom_yi_v_jm = mom_yi_v_ix;
023:    }
024:}
```

図 7.1.3 CUDA C へ書き換えた例。ただし、例外処理の一部を削除するなど、全てのソースコードは掲載していない。

これらの対応策を踏まえて、GPU 対応のために固有な変更を加えたソースコードを図 7.1.3 に示す（説明のため行番号を付加している）。おおまかに構造を述べると density_gpu.cu [13] の 1 行目から始まる dyn_hevi_dens_gpu という関数が前述のカーネルである。そして、この関数を呼び出している部分が density.cu の 4,5 行目であり、“<<<” と “>>>” で囲まれた中にブロック数やスレッド数を記述する。また、dyn_hevi_dens_gpu の 6,7 行目にある __shared__ がシェアードメモリを確保する宣言文である。実際の計算を行っているのが、17–20 行目である。配列のインデックス計算等のいろいろな処理が追加されている。基本的には上述のスレッドの制御とメモリの階層構造に応じた変数宣言を行うことにより GPU 対応を図っており、性能を引き出すためには大規模な書き換えが必要なことがお分かりいただけよう。

東工大との共同研究においては、このように asuca の全てのコードを書き換え、2010 年 11 月に稼働した東工大の TSUBAME2.0 において、3990GPU を利用して 145TFLOPS という高い実行性能を達成している (室井 2011; 下川辺ほか 2011)。

[13] CUDA は C 言語を元にしているが、C 言語とは異なるため、拡張子として “cu” を用いている

7.1.5 近年の GPU 向けプログラミングモデル

東工大との共同研究で用いた CUDA C の言語仕様は C 言語と非常によく似ているものの、同一ではなく、CPU で走らせるコードと GPU で走らせるコードとは共有できない。さらに、数値予報システムの多くのコードが現在は Fortran で書かれていることを考えると、C 言語への移行コスト (ソースコードの移植にかかるコストだけでなく、開発者が習熟するためのコストも含む) も必要となる。GPU の持つ高い実行性能と容易なプログラミングとの両立を目指して、近年では、GPU でプログラムを動かすためのアプローチには複数の選択肢がある。以下で簡単に説明する。

(1) CUDA Fortran

CUDA C が C 言語をベースとしているのに対して、CUDA Fortran は Fortran をベースとした言語である。CUDA C と同様に、GPU ベンダーである NVIDIA 社から提供されている [14]。コンパイラは PGI 社との共同開発であり、PGI Fortran で利用可能である (バージョンは PGI2010 以降) 。利用可能な機能が CUDA C とわずかに異なるが、この違いは C 言語と Fortran の言語仕様の違いに起因している。Fortran のソースコードから GPU の性能を最大限に引き出すにはもっとも対応しやすいアプローチだと思われる。

[14] http://www.nvidia.co.jp/object/fortran_jp.html

(2) F2C-ACC

f2c とは Fortran のソースコードを C 言語のソースコードに変換するツールとして古くから使われていたものであるが、F2C-ACC とは Fortran のソースコードを CUDA C のソースコードに変換するコンバータである。これは、米国海洋大気庁地球システム調査研究所 (National Oceanic and Atmospheric Administration / Earth System Research Laboratory: NOAA/ESRL) で開発されており [15] 、2009 年 6 月にリリースされ、現在は 2013 年 6 月にリリースされたバージョン 5.2 が最新である。NOAA/ESRL は NIM と呼ばれる正 20 面体格子を用いた非静力学モデルを開発しており、F2C-ACC はその GPU 対応に用いられている。Fortran77 と Fortran90 の様々な機能をサポートしているが、完全に準拠していないため、今後徐々に機能を追加していくことを計画している。CUDA C 向けに変換した後にチューニングが必要とのことでもあり、どの程度効率が良い CUDA C のコードに自動的に変換できるかが鍵となるだろう。

(3) OpenCL

OpenCL とは Open Computing Language の略であり、その名の通り、オープンな仕様の並列プログラミング環境である [16]。前述の CUDA は NVIDIA が提供していることもあり、NVIDIA の GPU には最適であり、またサポートも充実していると思われるが、CUDA の言語仕様がオープンでないため、他社 (例えば AMD) の GPU では動作すらしない。一方、OpenCL はオープンな規格であり、GPU のみならずマルチコア CPU でも動作可能となっている。OpenCL は C 言語をベースとして拡張された言語である。

(4) OpenACC

CUDA C, CUDA Fortran, OpenCL のいずれも C 言語もしくは Fortran をベースとして、GPU のための拡張を行った言語であった。この場合、拡張した言語に対応したコンパイラがないと動作させることもできない。このことは、GPU 環境のみを利用する場合には問題とはならないが、様々なプラットフォームで動作させようとすると問題となる。それに対して、OpenACC はソースコードに指示行を入れていくことにより GPU へ対応させることができるプログラミングモデルである [17] 。指示行の例として、図 7.1.1 の 1 行目が挙げられる。行頭が “!” になっていることから分かるように、これは Fortran 言語から見ると単なるコメント行である。指示行は OpenMP(Open Multi-Processing) でも用いられる手法であり、OpenMP をサポートしない Fortran コンパイラではこの指示行は無視してコンパイルを行い、サポートする Fortran コンパイラは OpenMP による並列化を行う。OpenACC も同様のプログラミングモデルであり、追加する指示行は OpenACC をサポートしないコンパイラから見ると単なるコメント行として扱われるので、様々な環境で利用可能となる。また、OpenACC は C 言語と Fortran をサポートしている。ただし、利用できる機能には制限があり、前述のレジスタとシェアードメモリの使い分けはできないようである。OpenACC は後発のプログラミングモデルであり (現在のバージョンは 1.0。ただし、2.0 の仕様が策定された)、今後状況は変わると考えられる。また、指示行を挿入することによるプログラミングモデルである以上、どうしても、CUDA や OpenCL に比べると性能は出しにくいと考えられる。ただし、ユーザーにとってソースコードの可搬性は魅力的であり、OpenACC が広まるかどうかは、今後どの程度 GPU の性能を引き出せるかにかかっているであろう。

(5) Hybrid Fortran

OpenACC は汎用の指示行によるプログラミングモデルであるため、CUDA や OpenCL といった GPU 向けに言語仕様を拡張したプログラミングモデルよりも性能向上が限られると考えられることは前述した。しかし、asuca あるいは気象予測プログラムの性能向上を目的とするのであれば、必ずしも汎用のプログラミングモデルではなく、気象予測プログラムの特徴を活かしたプログラミングモデルも有効である。現業運用を考え、スーパーコンピュータシステムで動作させることを考える場合、単にソースコードの可搬性を保つだけでなく、OpenMP による指示行が適切に使われる必要があることから、GPU と CPU の双方に対応可能であるプログラミングモデルが望ましい。そこで、気象庁、東工大、理化学研究所の共同研究では、GPU 向けと CPU 向けとに適切なソースコードを生成するプログラミングモデルとして Hybrid Fortran に取り組んでいる [18] 。これは、Fortran のソースコードに Hybrid Fortran の指示行を挿入し、コンパイルの前にスクリプトを実行して、GPU 向けには CUDA Fortran のコードを生成し、CPU 向けには OpenMP の指示行を挿入したコードを生成するというプログラミングモデルである。現時点では、物理過程ライブラリと asuca を念頭において開発を行っている。

7.1.6 諸外国の数値予報における GPU 対応の動向

最近の諸外国の数値予報モデルの GPU 向け対応の動向について述べる。ここでは、2013 年 9 月に米国大気研究センターで開催された Programming weather, climate, and earth-system models on heterogeneous multi-core platforms ワークショップの講演資料を引用する。講演資料はウェブサイト [19] に掲載されているの

[15] http://www.esrl.noaa.gov/gsd/ab/ac/Accelerators.html
[16] http://www.khronos.org/opencl/
[17] http://www.openacc.org/
[18] http://typhooncomputing.com/
[19] http://data1.gfdl.noaa.gov/multi-core/

で、適宜ご覧いただきたい。なお、このワークショップは第 7.1.1 項で述べたアクセラレータ全般を取り扱っており、前述の MIC についても様々な講演が行われているが、紙幅の関係もあり省略する。

前述の通り、NOAA/ESRL で開発している NIM は F2C-ACC による GPU 対応に取り組んでいる。また、F2C-ACC が完全には Fortran90 の機能をサポートしていないことから、OpenACC による GPU 対応も行っているが、F2C-ACC よりも高速化はできていない [20]。

米国の WRF に対しては雲物理過程、移流スキーム等のスキームに対して CUDA を使ったベンチマークカーネルを作成している [21] 。

第 1.3 節で述べた COSMO コンソーシアムの COSMO も GPU 対応を進めており、CUDA C と OpenACC の組み合わせを採用している [22] 。比較的ソースコードの分量が少なく、かつ計算時間を多く要する力学コアについては CUDA C を用いて全面的に書き換え、ソースコードの分量が多く、様々な開発者が開発を行い、また複数のモデルでソースコードを共有する物理過程は OpenACC による対応としている。これは、計算効率と開発コストとのバランスを考慮したものと考えられる。

また、COSMO コンソーシアムにおける次期のモデルとなる ICON も GPU 対応が行われている。単一ノードでの利用に対しては、OpenCL と CUDA Fortran を用いて力学コアの実装を完了し、複数ノードの利用については OpenACC を用いて力学コアを移植している [23]。

NVIDIA 社のワークショップの講演資料 [24] によると WRF, COSMO, NIM 等の GPU 対応には NVIDIA 社が関わっていることや、OpenACC によるアプローチが急激に広がっていることなどが示されている。

7.1.7 終わりに

スーパーコンピュータは数値予報の高度化を支える根幹の技術であり、その性能向上は気象予測の精度向上に直接結びついている。スーパーコンピュータの利用者にとっては、現在のアーキテクチャ、現在の数値予報システム・プログラムのままで高度化ができれば開発作業としては最も作業コストが低く望ましいが、今後のスーパーコンピュータの技術動向や省電力の要請等を踏まえると、様々な選択肢を考慮しておく必要がある。その取り組みの一つとして、東工大との共同研究による asuca の CUDA を利用した GPU 対応の取り組みを紹介してきた。この成果は先駆的かつ画期的なものであったと考えている。その後、システム技術の動向として GPU を含むアクセラレータを用いたヘテロジニアスアーキテクチャが有力となりつつあり、また、ソフトウェア技術として CUDA Fortran の登場や OpenACC といったより容易なアプローチも可能になり、GPU の利用は今後より一層広がるであろう。

GPU あるいは MIC といった特定の計算機アーキテクチャに特化したチューニングを行うと、そのアーキテクチャにおいては高性能を引き出せるが、可搬性が失われる事態にもなる。一方で、何にでも適用可能な汎用的アプローチでは、計算機アーキテクチャの持つ性能のポテンシャルは引き出せない。一般に、良い性能を得るためには目的を特化したチューニングが必要である。

そのため、自らのプログラム固有の特性に応じたアプローチを考えていく必要がある。数値予報モデルの GPU 向け対応においては、その特性を最も熟知している数値予報モデルの開発者と様々な計算機アーキテクチャを熟知している専門家と共に問題解決にあたることが効果的であり、共同研究といったアプローチが重要となるだろう。前述のワークショップにおいては、NVIDIA 社や Intel 社からの講演もあり、その資料によると両社は様々な機関と共同で GPU 対応、あるいは MIC 対応を行っている。ベンダーによる囲い込みという見方もできるが、計算機の専門家とアプリケーションの専門家が協力して問題に対応することが重要であり、様々な機関がそのようなアプローチをしている状況と言える。asuca 及び物理過程ライブラリの GPU 向けの開発においては、東工大との共同研究を行ってきたところであり、今後も最新の技術動向や大学・研究機関の最新成果も反映しつつ、数値予報システムの高度化を進めていく必要があると考えている。

[20] http://data1.gfdl.noaa.gov/multi-core/presentations/govett_6b.pdf
[21] http://www.mmm.ucar.edu/wrf/WG2/GPU/
[22] http://srnwp.met.hu/Annual_Meetings/2013/download/thrusday/Philippe_Steiner.pdf
[23] http://data1.gfdl.noaa.gov/multi-core/presentations/sawyer_6b.pdf
[24] http://data1.gfdl.noaa.gov/multi-core/presentations/posey_6a.pdf

参考文献

Michalakes, J. and M. Vachharajani, 2008: GPU Acceleration of Numerical Weather Prediction. *Parallel Processing Letters*, **18**, 531–548.

室井ちあし, 2011: 省電力 GPU コンピューティング. 平成 23 年度数値予報研修テキスト, 気象庁予報部, 53–55.

下川辺隆史, 青木尊之, 石田純一, 河野耕平, 室井ちあし, 2011: メソスケール気象モデル ASUCA の TSUBAME2.0 での実行. ながれ, **30**, 75–78.

7.2 スーパーコンピュータ「京」での asuca の実行 [1]

7.2.1 はじめに

「京」(以下では単に京と記す) は文部科学省の次世代スーパーコンピュータ計画の一環として、理化学研究所と富士通が開発したスーパーコンピュータの愛称である。京は 2011 年 6 月には LINPACK ベンチマークで 8.162PFLOPS を記録して、世界で最も高速なコンピュータシステムの上位 500 位までをランク付けするプロジェクト TOP500 で 1 位になっている [2]。8 コアで構成される 1CPU あたり 128GFLOPS の計算性能を有する SPARC 64VIIIfx を約 88,000 個使用しており [3]、京は超並列による大規模計算の機会を多様な分野の研究者に提供している (野村 2013)。

気象庁は、「HPCI 戦略プログラム分野 3 防災・減災に資する地球変動予測 課題 (1) 防災・減災に資する気象・気候・環境予測研究 目標 1) 地球規模の気候・環境変動予測に関する研究」に独立行政法人海洋研究開発機構 (JAMSTEC) らと共に参加している。この研究の一環として行われる全球力学コアの比較の研究として、第 6 章に述べた asuca-Global を京の上で実行し、他の全球力学コアと比較する予定である。

本節では、その準備作業として緯度経度格子版の asuca を京に移植して実行した結果を述べる。次項以下では、第 7.2.2 項で asuca を京に移植する場合の可搬性について述べ、第 7.2.3 項では京での実行時間について記述する。

7.2.2 京への可搬性

京でユーザーに提供されるのは、標準的な Linux の環境だが、ジョブ投入を行う時に使用するモジュールの作成は指定のクロスコンパイラを使用する必要がある。

asuca は出力データの形式として NuSDaS[4]、NetCDF[5]、4byte 浮動小数点形式が選択可能である。4byte 浮動小数点形式で出力を行う場合には、物理過程ライブラリ以外のライブラリを導入する必要はないが、ある程度の大きな格子数と長い予測期間の計算を行う場合は、実行後のデータ転送やディスクスペースの都合により、NuSDaS、または NetCDF で出力を行う必要があり、これらのライブラリも導入する必要がある。これらのライブラリの作成についても、クロスコンパイラのオプションを調整する必要がある。しかし、クロスコンパイラを使ったモジュール作成環境と、モジュールとライブラリに適合するオプションの設定さえ行っておけば、プログラムの書き直しはほとんど必要ない [6]。従って、前節に述べた GPU を使用する場合に比べると、京の上では比較的簡単に大規模並列の計算を試みることができる。ただし、本稿の執筆時点では、物理過程のメモリ共有並列を京の上で実行させる場合の設定の一部に問題が残っている。

図 7.2.1 に京での実行結果の例を示す。この図は 2013 年 6 月 28 日 00UTC を初期値として、緯度方向、経度方向ともに 0.05 度の格子を 601 個、鉛直方向は上空約 20 km までを 57 層で、Δt =20 秒で asuca を実行した場合の 12 時間予測における前 6 時間降水量と海面更正気圧である。この計算には積雲対流を扱う物理過程が含まれていないので、雲物理過程の働きによって短期間に大きな熱量が放出されて、対流による鉛直流が強く表現される場合があり、Δt は短めに設定してある。

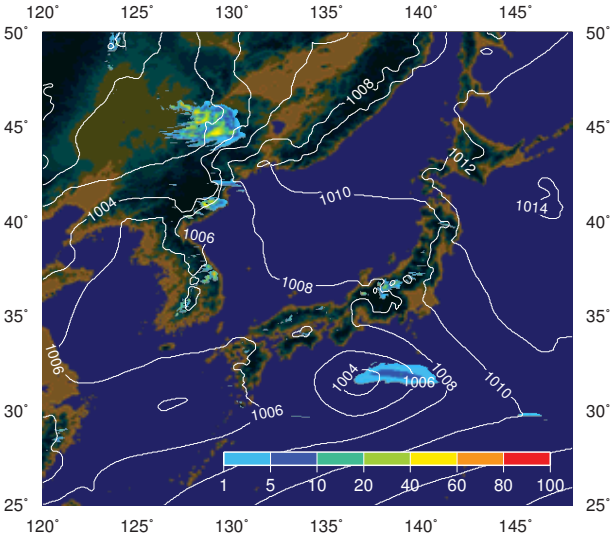

図 7.2.1 2013 年 6 月 28 日 00UTC からの 12 時間予測の海面更正気圧 (コンター、単位は hPa) と前 6 時間降水量 (陰影、単位は mm)

7.2.3 京での計算時間

京での asuca の計算性能を調べるために、前項の計算を並列の設定を変えて実行した結果をこの項に示す。

表 7.2.1 の上段に、1CPU あたり 1MPI プロセスを割り当てて、使用する CPU の数を変えて実行した場合の実行時間を示す。60CPU を使用した場合の実行時間に対して、120CPU を使用した場合の実行時間は 1/2、240CPU を使用した場合は 1/4、360CPU を使用した場合は 1/6 に近い値になっている。表 7.2.1 の下段は、1CPU に 2MPI プロセスを割り当てた場合の実行時間

---

[1] 坂本 雅巳

[2] 京は 2011 年 11 月にも 1 位になった。

[3] 京では、1 つの計算に対して、最大で 82,944CPU までが利用可能である。ただし、この設定が使用できるのは各研究課題で必要性を認められたユーザーのみである。

[4] NuSDaS は、NWP Standard Dataset System の略で、数値予報格子点データを格納するために作られたデータ形式である。C および Fortran で NuSDaS データを読み書きするためのサブルーチン集を NuSDaS ライブラリという。

[5] Network Common Data Form。配列指向のデータアクセスライブラリ NetCDF ライブラリによって作成される。

[6] 総称名の手続きなどにそのまま移植できない部分があり、これらの改修は行った。

表 7.2.1 使用する CPU の数と実行時間

1CPU あたり 1MPI プロセスの場合

CPU の数	60	120	240	360
MPI プロセス数	60	120	240	360
実行時間 [秒]	13869	7342	3833	2689
60CPU の実行時間を 1 とした実行時間比	1	0.53	0.28	0.19

1CPU あたり 2MPI プロセスの場合

CPU の数	60	120	240	360
MPI プロセス数	120	240	480	720
実行時間 [秒]	8313	4195	2388	1864
60CPU の実行時間を 1 とした実行時間比	1	0.50	0.29	0.22
1CPU あたり 1MPI プロセスに対する比率	0.60	0.57	0.62	0.69

である。同様に CPU の数にほぼ反比例して実行時間は減少している。1CPU あたり 1MPI プロセスを割り当てた場合の実行時間に対する比は概ね 0.6 から 0.7 倍であり、CPU の数を増やす場合よりも計算時間を短縮する効果は小さいが、CPU の数を変えずに MPI プロセスを増やすだけでも計算時間がかなり短縮されている。京ではメモリ非共有並列とメモリ共有並列を併用するアプリケーションが推奨されており、asuca も設計としてはそのように作られている。CPU の数を増やさずに MPI プロセスを増やすだけで、実行時間短縮の効果が大きいことは、メモリ共有並列計算の効率があまり高くないことを示唆している可能性がある。

図 7.2.2 の上図に 1CPU あたり 1MPI プロセスで、使用する CPU の数を 120、240、360 にした場合の計算時間を、出力処理 (output)、物理過程 (physics)、力学 (dynamics) に分けて示す。入力は力学の一部に含めている。また、asuca では、非同期通信を用いることで、通信を行っていない計算プロセスを待たせずに計算を続けさせる工夫が施されているので、通信単体の実行時間を分離していない。図 7.2.2 の上図では、出力、物理過程、力学のいずれも CPU の数にほぼ反比例して実行時間が短縮されている。

図 7.2.2 の下図に 120CPU 120MPI プロセスの実行時間（1CPU あたり 1MPI プロセス、上図の上と同じもの）と、120CPU 240MPI プロセス (1CPU あたり 2MPI プロセス) の実行時間の比較を示す。上図の上に示した 120CPU 120MPI プロセスから中央の 240CPU 240MPI プロセスへと CPU を 2 倍に増やす場合は、CPU を増やす前に比べて力学が 55%、物理過程が 50%、出力が 50%の実行時間になる。下図の下に示した 120CPU 240MPI プロセスへと MPI プロセス数だけを 2 倍に増やした場合では、力学が 64%、物理過程が 50%、出力が 57%になる。物理過程については、CPU を変えないで MPI プロセスを増やすだけで同様の短縮効果が得られていることが確認できる。物理過程がメモリ共有並列を十分に利用できていないのは、前出の移植時の設定の問題によるものと思われる。出力にかかる時間も MPI プロセスを増やすだけで、ある程度短縮されている。これは、1 時間毎の出力を行う設定で計算を行ったことと、asuca が複数の MPI プロセスを切り替えて出力させる仕組みになっていることに関係があると考えられる。出力にかかる時間は全体の実行時間に比して短いので、どの程度の MPI プロセス数が適当であるかは、力学、物理過程に費やす時間とのバランスを考慮すべきである。力学については、隣接計算領域を担当するプロセスを同一 CPU 内に割り当てる設定ができれば、他の CPU との通信が減るので、MPI プロセス数だけを増やした場合の時間短縮効果が幾分大きくなる可能性はある。しかし、京で推奨された設定を考えると、メモリ共有並列計算の効果を高める工夫を行う方が良さそうである。

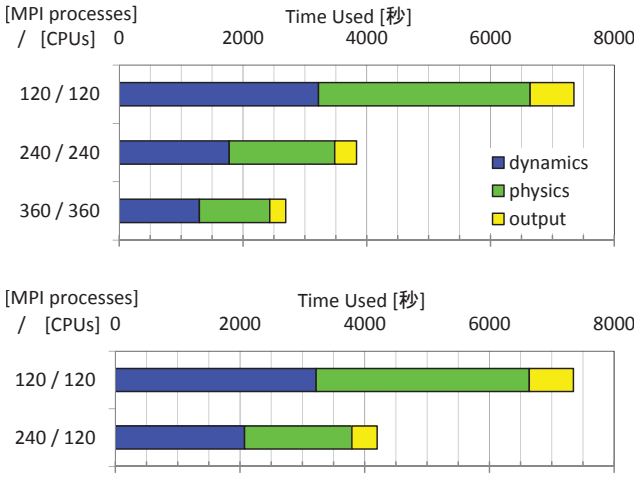

図 7.2.2 2013 年 6 月 28 日 00UTC からの 12 時間予測を行う場合の出力 (output、黄色)、物理過程 (physics、緑色)、力学 (dynamics、青色) の計算時間。縦軸は使用した MPI プロセス数と CPU の数、横軸は計算時間 [秒]。

7.2.4 まとめ

この節では、京での asuca の実行時間の計測結果を示した。前節の GPU クラスタを利用する場合と比べれば、プログラムを作り直す必要がないので、京への移植は比較的容易であった。現時点での測定結果でも、asuca はスケーラビリティの良さを京でも実現できている。物理過程のプログラムの移植時の問題が解消し、メモリ共有並列の効果を高める工夫を行っていけば、asuca は京での実行時間を更に短縮できるであろう。

参考文献

野村稔, 2013: 世界のスーパーコンピュータの動向. 科学技術動向, **137**, 11–18.

付録 A　システムデザイン *

A.1　並列化・高速化

A.1.1　はじめに

今後の計算機の動向として、CPU 単体の演算性能の向上が従来ほどは見込めず、より並列度が増していくこと、メモリの階層構造が複雑化していくこと、B/F 値が低下していくことなどが考えられる。これらのうち、並列度が増していくことに対してはデータ通信をより効率的に行うことが必要である。また、B/F 値の低下及びメモリの階層構造の複雑化を考えると、キャッシュのより効率的な利用といった対策も必要となる。

asuca においては、JMA-NHM で採用している並列化・高速化手法を継承し、さらに改良を行っている。本節ではその取り組み内容について記述する。なお、モデルの並列化についての一般的事項については室井 (1998) で、JMA-NHM の並列化手法については石田・荒波 (2003)、荒波・石田 (2008) でそれぞれ説明されているのであわせてご覧いただきたい。

A.1.2　水平 2 次元分割

メモリを共有しない複数のプロセスによる並列化において、まず予報領域を分割して、それぞれの領域を各プロセスが担当する手法を取る。室井 (1998) が述べている通り、鉛直方向には処理の依存性が強い過程が多いことから、水平方向に 1 次元または 2 次元に分割することが考えられる。JMA-NHM においては、室井 (2000) や石田・荒波 (2003) が述べている通り、当初は y 方向の 1 次元分割を採用していた。しかし、1 次元分割では並列度が増した場合に、各プロセスが担当する領域の大きさが不均等となり効率が低下する。そこで、荒波・石田 (2008) が水平 2 次元分割を導入した。asuca においては現在の JMA-NHM と同じ水平 2 次元分割を採用している。水平分割を行う場合は水平差分の計算等を行うために、隣接するプロセスが予報計算を行っている領域のデータを参照する必要がある。JMA-NHM も asuca もいわゆる「のりしろ」と呼ばれる領域を持っており、隣接するプロセスと適宜通信を行って、のりしろ領域にデータを配置する処理を行っている。2 次元分割の模式図を図 A.1.1 に示す。

A.1.3　入出力専用プロセス

データのディスク入出力は、一般に演算と比較して時間がかかる。そこで、高速化のためには何らかの工夫が必要となる。また、メモリを共有しないプロセス間のデータの分配・集約についても効率的な手法が求められる。

石田・荒波 (2003) ではディスク出力の高速化手法として、分散出力方式（各プロセスが担当する計算領域のデータをそれぞれ独立にディスク出力する方式）と出力専用プロセス方式（計算を行うプロセスが持つ出力データを出力専用プロセスに集約することにより、計算とディスク出力を並列に行う方式）の 2 種類が示されており、asuca においては後者を採用している。分散出力方式を選択した場合、ファイルフォーマットが変わり多数のユーザーが影響を受けるため採用しない [1]。

また、入力においても同様に、分散入力方式と入力専用プロセス方式による並列化が考えられる。出力についてはユーザーの利便性を考慮して分散出力は行っていないが、入力についてはそのような制限は無い。asuca は前処理プログラムが作成したファイルのみを入力とするため、前処理プログラムと asuca 本体を一体管理することにより、ファイルフォーマットの整合性を保ちやすいためである。そこで、現時点では分散入力方式と入力専用プロセス方式の両方を実装している。分散入力であれば、複数ファイルを並行に読み込むことによる時間短縮やデータを読み込んだプロセスからその他のプロセスへデータ送信を行う時間が不要となることにより、高速化につながると期待されるが、ファイル数の増加による入出力時間の増大がありうるため、どちらが高速かはシステムに依存する。そのため、両手法の実装を維持することとしている。なお、入力専用プロセスも出力専用プロセスも複数のプロセスを割り当てることを可能としている [2]。

次に、入力専用プロセスと出力専用プロセスによる処理の設計について説明する。なお、以後は両プロセスをあわせて入出力専用プロセスと呼ぶ。処理に要する時間は一般にディスクの入出力が一番大きく、次いでデータ通信、メモリコピーの順となる。また、ディスクの入出力やデータ通信を効率的に行うためには、なるべく大きな単位にまとめる必要がある。入出力専用プロセス方式の実装では、上記 2 点を念頭におき、計算を担当するプロセス (以下、計算プロセスという) になるべく処理待ちの状態が発生しないようにしている。

データ入力については、計算プロセスが計算している間に、次の計算に用いるデータを先にディスクから読み込んでメモリに保持しておくことが処理の高速化のために有効である。領域モデルとしての asuca の運用においては側面境界値の読み込みが必要であり、緩和領域にレイリーダンピングを適用するために、これ

---

* 石田 純一、 河野 耕平、 荒波 恒平

[1] 出力後にそれぞれ出力したファイルを集約することも考えられるが、そのためのディスク入出力がさらに発生する。特に現業数値予報では、出力したデータをユーザーが利用可能となるまでの時間を短縮する必要があることから、できるだけ余分な入出力を避ける必要がある。

[2] JMA-NHM は荒波・石田 (2008) の時点では入出力専用プロセスは 1 つしかなかったが、現在は asuca と同様に複数のプロセスを割り当てることが可能となっている。

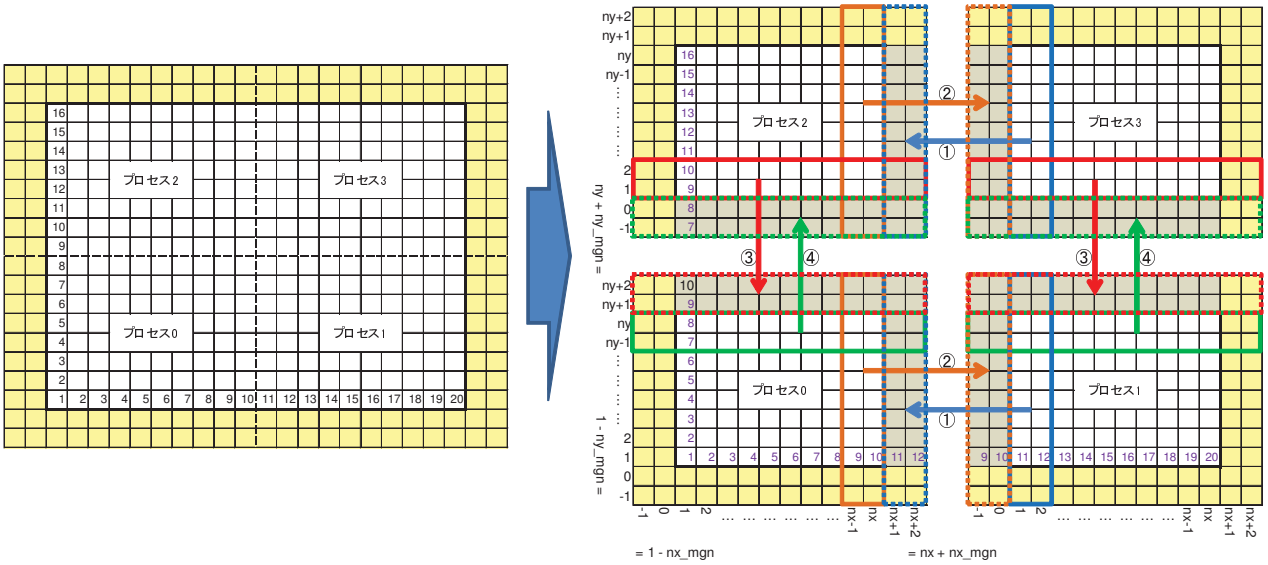

図 A.1.1　asuca における 2 次元分割の模式図。左の図は予報領域全体（格子数は 20 × 16）の図。黒い太線が計算領域と外部領域の境界。白色のセルが計算領域を、薄黄色のセルが外部領域を表す。また、点線は水平 2 次元分割 (2 × 2) を行った場合の各プロセスが担当する計算領域の境界を表す。図中の数字は、予報領域全体の配列を考えた場合のインデックスを表す。右の図は、予報領域を 4 プロセスに分割した図。この場合、各プロセスが分担する計算領域の大きさは 10 × 8 となる。灰色の領域はのりしろ領域（のりしろの幅は 2）を表す。図中の数字は、予報領域全体の配列のインデックスを、枠外の数字は分担した計算領域における配列のインデックスを表す。図中の矢印はのりしろ領域のデータ通信を表す。同じ色の矢印で表されるデータ通信は分割数が増えても同時に行うことが可能である。

に必要な入力データを読み込む時間は無視できない[3]。そこで、計算プロセスが時間積分を行っている間に入出力専用プロセスがデータをあらかじめ読み込んでおき、各計算プロセスへの送信準備を行う。これにより、時間積分が進んで側面境界値を更新する段階で入出力専用プロセスから直ちにデータを受信して計算を再開することができる。ここで、あらかじめ読み込む必要があるデータ量は計算の設定（側面境界値で言えば、緩和領域の大きさや更新頻度）に依存する一方、読み込めるデータ量にはシステムによる制限（メモリ量等）があるため、複数のプロセスを入出力専用としている。

計算プロセスが出力データのディスクへの書き出しを待たずに計算を進めるためには、出力される変数が予報計算の途中で上書きされる可能性があることに注意する必要がある。そこで、計算プロセスが出力のタイミングになったときに、自分が持つバッファに出力するデータをコピーしてから非同期の通信処理を起動し、後続計算を速やかに再開する。入出力専用プロセスは全予報領域のデータを格納できるバッファを準備し、計算プロセスの予報計算と並行してデータを受信・出力する。既に述べた通り、ディスクへの出力はデータ通信より時間がかかるために、多くのデータをバッファに貯めておく必要がある。ここで必要となるバッファの大きさもシステムによる制限を受けることから、複数のプロセスを入出力専用に利用できるようにしている。なお、出力する変数毎にバッファを用意しているため、ディスクへの出力間隔が短くなりすぎると出力が終了する前に次の出力する変数でバッファが上書きされる可能性がある。そこで、出力の場合は予報対象時刻毎に出力データを集めるプロセスを切り替えている。図 A.1.2 に入出力専用プロセスの模式図を示した。

[3] 第 5 章で述べた通り、LFM としての利用においては、予報領域が 1581 × 1301 であるのに対して、緩和領域の幅は 90 格子を考えている。これは、全予報領域の約 23%の領域となる。

A.1.4　通信関数の使い方

プロセス間のデータ通信は、時間積分の計算においては各プロセスと東西南北に隣接するプロセスとのデータ交換を基本とし、入力データの分配や出力データの集約を別途行う。これらの通信を行うライブラリは JMA-NHM にも同等の機能が組み込まれているが、asuca では計算効率や開発効率を念頭においた機能向上を行っている。

(1)　のりしろの交換

asuca と JMA-NHM において、のりしろの交換は時間積分で行われるデータ通信は大きな時間を要する。プログラミングにおいては、のりしろの交換が必要となる変数に対して、適切なタイミングでデータ通信のサブルーチンを呼ぶが、そのタイミングを誤ると適切でないデータがのりしろに配置される。この場合、適切な値とわずかに異なる値（例えば、時間積分で 1 ステップずれた値など）が配置されることがあり、バグに気づきにくい。JMA-NHM の開発においては、このようなバグを生じさせずに効率的にデータ通信するために多大な開発労力を割いてきた。そこで、開発効率

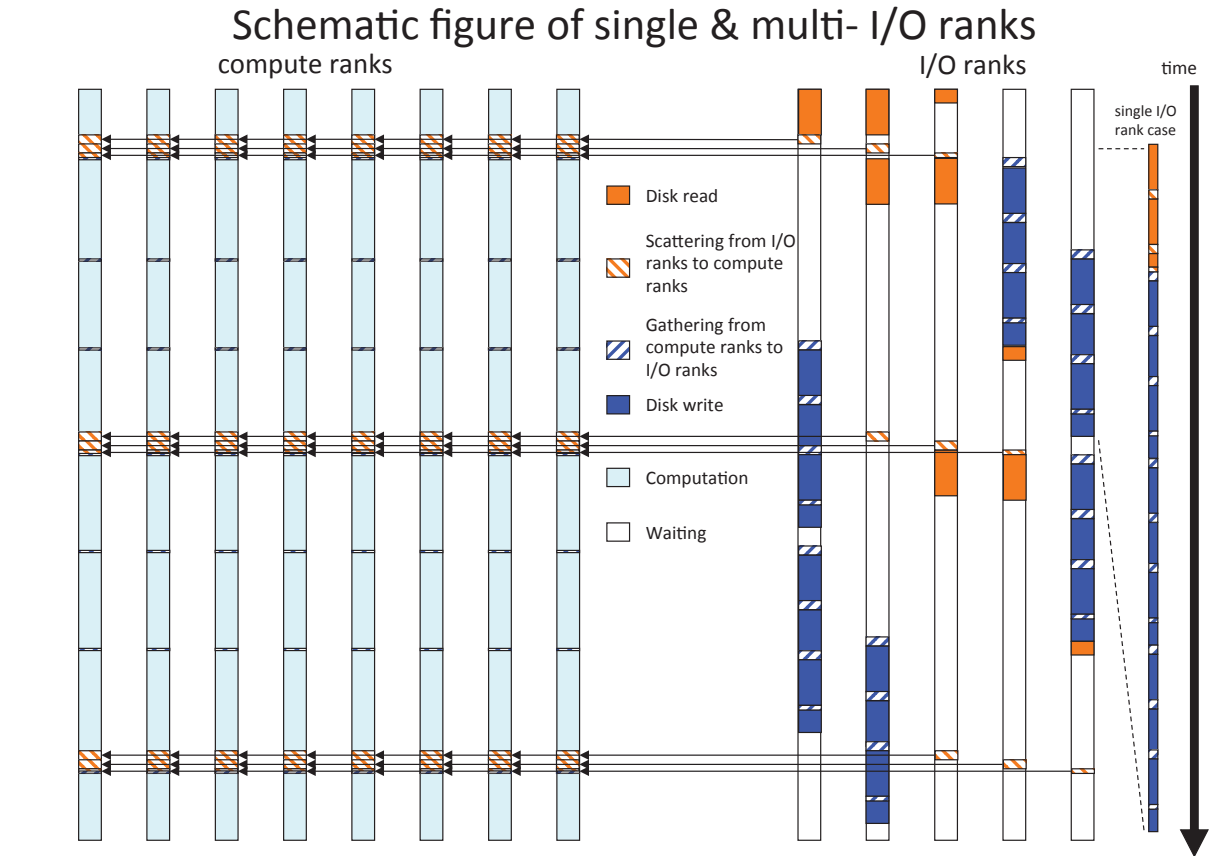

図 A.1.2　入出力専用プロセスの模式図。時間は上から下へ進んでいく。compute ranks と I/O ranks がそれぞれ計算プロセスと入出力専用プロセスを表す。この図においては出力と入力（側面境界値の更新）を同時に行うこととしている。ディスクの入出力に要する時間は入出力専用プロセスのオレンジ及び青の塗りつぶし領域に、データ通信及びメモリコピーの時間はオレンジと青の網掛け領域に示されている。計算プロセスはデータ通信やメモリコピーの時間だけで済むようにしている。

を高めるためバグが混入しにくいデータ通信の仕組みを開発中である。

時間積分等により担当する領域の変数を更新したとき、その変数が水平差分の計算等に用いられる場合は隣接プロセスにデータを送信する必要がある。データを送られる側の視点から見ると、水平差分等の水平方向に隣接するデータを参照して計算を行う場合、その前に隣接プロセスからデータを受信してのりしろ領域に正しいデータを配置しておく必要がある。データ通信は変数の更新とのりしろ領域の参照との間であれば任意のタイミングで行えばよいが、タイミングを誤ると適切でないのりしろ領域のデータを使って計算を行ってしまうこととなる。このとき、

- 担当する領域の変数を更新した後に必ずデータ通信を行う。
- 水平方向に隣接するデータを参照する前に必ずデータ通信を行う。

のいずれかのルールに従っていれば、のりしろ領域のデータが適切であることは保証される。しかし、前者の場合、変数の更新後にさらに別の処理で同じ変数が更新されると結果的に余計な通信が発生する一方、後者の場合は変数が更新されないにも関わらず、複数箇所で参照されると余計な通信が発生する。さらに、効率よくデータ通信を行うためには、複数の変数の通信をまとめる必要があり (荒波・石田 2008)、そのためには単純に上記のルールで対応できない。

そこで、更新された変数のリスト（以下、更新リストと言う）と更新リストに登録されていてかつ参照される変数、すなわち通信が必要な変数のリスト（以下、通信リストと言う）を準備し、通信リストに登録されている変数に対してのみ通信を行うこととする。この場合、上記のルールを少し変更して、

- 担当する領域の変数を更新した後に必ず更新リストに変数を登録する。
- 水平方向に隣接するデータを参照する前に、必ず更新リストに登録されているかチェックして、登録されていれば通信リストに変数を登録する。その後、通信リストに登録されている変数の通信を行う。

とすることにより、開発者にとっては変更箇所がほぼ一意に定まるために機械的にコーディングすることが可能となることに加え、不要な通信を行わずに高速化

を図ることが期待できる。ただし、これだけでは、変数をまとめて通信することができない。そこで、任意のタイミングで更新リストにある任意の変数を通信リストに登録して、今後通信が必要となる変数をあらかじめ通信しておくようにしている。

以上を踏まえて、現在の asuca では、以下の機能を持つサブルーチンを準備している。

- 担当する領域の変数を更新した後に更新リストに変数を登録する (mpi_halo_post_calc)。
- 水平方向に隣接するデータを参照する前に、「これからのりしろを使う」と宣言する (mpi_halo_pre_refer)。更新リストに変数が登録されていれば、通信リストに変数を登録し、更新リストから変数を抹消する。
- 実際に通信リストに登録されている変数全ての通信を行うサブルーチン (mpi_halo_comm_all) を呼ぶ。mpi_halo_pre_refer の後に呼ぶことが必須。通信リストに登録された変数を全て通信し、通信した変数を通信リストから削除する。

mpi_halo_post_calc と mpi_halo_pre_refer は上記のルールを実現するために更新リスト及び通信リストを書き換えるためのサブルーチンであり、mpi_halo_comm_all は全ての通信を行うためのサブルーチンである。

これらのサブルーチンの使い方と実際の通信のタイミング、及びリストに含まれる変数に関する模式図を図 A.1.3 に示した。ここで、サブルーチン modify_xxx と refer_xxx が数値予報モデルにおける処理であり、それぞれ時間積分等の変数を更新する処理と水平差分の計算等の変数を参照する処理を表している。変数毎に見ると余計な通信を行っていないことがわかる。また、任意のタイミングで任意の変数を通信するためのサブルーチンとして、図 A.1.4 に示したラッパーサブルーチン mpi_halo_run を準備している。図 A.1.3 の例で言えば、modify_a_3 と refer_b_1 との間で mpi_halo_run(a, b) として呼び出すことにより、変数 a, b の通信をまとめて行い、通信コストを減らすことができる。効率を追求するためには、サブルーチン mpi_halo_run を適切なタイミング・引数で呼び出す必要があり、コーディングの際はその見極めが重要である。

ただし、現在の asuca では、これらのサブルーチンはプログラム上は動作可能となっているものの、処理が若干煩雑なこと、上記のルールを徹底したことによる更新リストや通信リストの変更による処理の負荷について未確認であること、及び通信が必要なのりしろの幅が異なりうること（後述）への対応が終わっていないなどの理由により、mpi_halo_post_calc と mpi_halo_pre_refer の使い分けはせずに、JMA-NHM と同様にのりしろの交換が必要な変数の更新後にまとめて通信を行うようにしている。今後、mpi_halo_pre_refer については、参照が必要な変数の通信が必要な場合には通信を行うように変更するとともに、リストの変更に係る処理の負荷を確認し、高速化を図る等の対応を行った上で、上記ルールの徹底を図りたいと考えている。

(2) データの読み込みと各プロセスへのデータの分配

2/3 次元データのディスクからの読み込みと各プロセスへのデータの分配には mpi_comm_read_scatter_run というサブルーチンを準備している。これは、以下のように複数のサブルーチンのラッパーとなっている。

```
subroutine mpi_comm_read_scatter_run
  call read_to_buffer
  call scatter_one_record
  call scatter_buf2array
  call scatter_post
end subroutine mpi_comm_read_scatter_run
```

また、それぞれの関数は

```
read_to_buffer      :読み込みバッファの確保、
                     データの読み込み
scatter_one_record:通信 (受信用バッファへの格納)
scatter_buf2array :受信用バッファから
                     ユーザー配列へのコピー
scatter_post        :受信用バッファの開放
```

であり、ユーザーはこれらを個別に利用することもできる。

(3) 各プロセスからのデータの集約

全領域の総和計算や全データを集約してファイル出力などを行うためには、1 つのプロセスにデータを集約する必要がある。ファイル出力においては、出力を行う複数プロセスの制御（入出力専用プロセス方式を用いる場合）、といった独自の処理が必要なため、一般データ用のサブルーチンとは別に出力専用のサブルーチンを準備している。

一般のデータの集約

単にデータを集約する場合（たとえば、全領域のデータを集めて和をとる場合など）は、サブルーチン mpi_comm_gather を用いる。このサブルーチンを呼び出すと、計算プロセスにおいて集約したい配列が通信バッファに格納され、出力専用プロセスに送信される。次いで、出力専用プロセスに集約された配列は集約用の配列に格納される。集約したプロセスではこの集約用の配列を参照することにより、全領域の総和計算等を実行できる。このような通信パターンは非常に通信時間を要するため、なるべく避けるべきである。現在のところ、この方法はログ出力のための領域平均・最大・最小の計算と並列化した前処理のみで利用しており、asuca 本体の時間積分計算では、総和計算等の全領域のデータを集約する処理は不要としている。

```
call modify_a_1                  ! 変数 a の更新
call mpi_halo_post_calc(a, ...) ! 更新リストは変数 a、通信リストは無しとなる。
call modify_b_1                  ! 変数 b の更新
call mpi_halo_post_calc(b, ...) ! 更新リストは変数 a, b、通信リストは無しとなる。
call modify_a_2                  ! 変数 a の更新
call mpi_halo_post_calc(a, ...) ! 更新リストは変数 a, b、通信リストは無しとなる。
...
call mpi_halo_pre_refer(a, ...) ! 更新リストは変数 b、通信リストは変数 a となる。
call mpi_halo_comm_all           ! 変数 a の通信を行い、更新リストは変数 b、通信リストは無しとなる。
call refer_a_1                   ! 変数 a ののりしろ領域の参照
call mpi_halo_pre_refer(a, ...) ! 更新リストは変数 b、通信リストは無し（リストは変わらない）となる。
call mpi_halo_comm_all           ! 通信リストに登録された変数はないので何もしない。
call refer_a_2                   ! 変数 a ののりしろ領域の参照
...
call modify_a_3                  ! 変数 a の更新
call mpi_halo_post_calc(a, ...) ! 更新リストは変数 a, b、通信リストは無し。
...
call mpi_halo_pre_refer(b, ...) ! 更新リストは変数 a、通信リストが変数 b となる。
call mpi_halo_comm_all           ! 変数 b の通信を行い、更新リストは変数 a、通信リストは無しとなる。
call refer_b_1                   ! 変数 b ののりしろ領域の参照
...
call mpi_halo_pre_refer(a, ...) ! 更新リストは無し、通信リストは変数 a となる。
call mpi_halo_comm_all           ! 変数 a の通信を行い、更新リスト・通信リストともに無しとなる。
call refer_a_3                   ! 変数 a ののりしろ領域の参照
```

図 A.1.3 通信サブルーチンの使い方の例とその挙動についての模式図。サブルーチン `modify_xxx` が変数を更新する処理、`refer_xxx` が変数を参照する処理を表す。`mpi_halo_post_calc` と `mpi_halo_pre_refer` はそれぞれ `modify_xxx` と `refer_xxx` と 1 対 1 に対応している。適切なタイミングで通信を行っており、余計な通信を行っていない。

```
subroutine mpi_halo_run(a, b, ..., y, z)
...
call mpi_halo_post_calc(a, ...) ! 更新リストは変数 a、通信リストは無しとなる。
call mpi_halo_pre_refer(a, ...) ! 更新リストは変数無し、通信リストは変数 a となる。
call mpi_halo_post_calc(b, ...) ! 更新リストは変数 b、通信リストは変数 a となる。
call mpi_halo_pre_refer(b, ...) ! 更新リストは変数無し、通信リストは変数 a, b となる。
...
call mpi_halo_post_calc(z, ...) ! 更新リストは変数 z、通信リストは変数 a-y となる。
call mpi_halo_pre_refer(z, ...) ! 更新リストは変数無し、通信リストは変数 a-z となる。
call mpi_halo_comm_all           ! 変数 a-z の通信を行い、更新リスト、通信リストの変数は無しとなる。
```

図 A.1.4 任意の場所で a から z の変数の通信を行う通信サブルーチンのラッパー。新しく作成した通信サブルーチンを用いている。1 変数用、2 変数用…とまとめて通信したい変数の数に応じてサブルーチンを準備すれば、任意の場所で任意の変数の通信を行うことが可能になる。なお、実装では引数は全て `optional` 属性とすることにより、引数として渡した変数のみを通信するようにして、一つのサブルーチンにまとめている。

出力用データの集約

出力用のデータを集約する場合は、サブルーチン `output_gather_pre` を用いる。このサブルーチンが呼ばれると、計算プロセスにおいて、出力用の変数を格納するモジュール変数にデータが格納され、その後 `output_gather_comm_and_out` を呼ぶことにより、出力専用プロセスへの通信およびファイルへの書き込みが行われる。

A.1.5 OpenMP の利用

asuca は OpenMP による指示行を用いてプロセス内の並列化（メモリ共有並列）を行っている。JMA-NHM においては特に指示行等は用いずにコンパイラによる自動並列化を用いていたが、さらなる高速化を図ることがその目的である。

現在のところ、物理過程は鉛直 1 次元とみなすことができ、物理過程ライブラリを実装に用いていることは第 4.1 節で既に述べた。そのため、物理過程の呼び出しは水平方向のループが外側となり、コーディングは図 A.1.5 のようになる。OpenMP による並列化においては、プロセス内でそれぞれ処理を行うスレッドの起動・終了の時間を減らすためにも、最外側で並列化を適用することが望ましい。物理過程ライブラリが鉛直 1 次元で実装されていることから、OpenMP と組み合わせることにより最外側で並列化を適用することが可能となっている。なお、雲物理過程とそれ以外の物理過程はそれぞれまとめて並列化を行っている [4] 。

[4] 雲物理過程が分かれる理由は第 4.2.2 項で述べた通り計算安定性確保のためである。当然のことながら計算効率より計算安定性が優先される。

```
!$OMP PARALLEL DO
do j = 1, ny
do i = 1, nx
  call A ! 物理過程ライブラリのサブルーチン
  call B ! 物理過程ライブラリのサブルーチン
  call C ! 物理過程ライブラリのサブルーチン
  ...
end do
end do
!$OMP END PARALLEL DO
```

図 A.1.5 物理過程ライブラリを用いて OpenMP による並列化を行うコードの例。

```
do k = 1, nz
do j = 1, ny
do i = 1, nx
  a(i,j,k) = ...
end do
end do
end do
```

図 A.1.6 a(i,j,k) とインデックスを用いる場合の三重ループのコーディングの例。

A.1.6 配列のとりかた: kij 方式

(1) コーディング

asuca のコーディングの特徴の一つに配列の次元の取り方がある。Fortran の配列を考えると、多くのモデルでは a(i, j, k) や a(i, k) のように水平方向の格子数を表すインデックス（ここでは i と j）を鉛直層数を表すインデックス（ここでは k）より内側に配置することが多い。その場合、配列の全ての要素にわたるループはメモリアクセスを連続にしようとすると、通常は図 A.1.6 のようになる。気象モデルの特徴として、多くの場合に鉛直層の数よりも東西もしくは南北方向の格子数が多いことや物理過程を中心に鉛直方向に依存性がある処理が水平方向に依存性がある処理よりも多いことがあげられる。鉛直方向に依存性がある場合は k のループでは並列化が適用できず、i または j のループで並列化を適用することとなり、スレッドの起動・終了の時間を要してしまう。そこで、図 A.1.7 といったコーディングスタイルをとることにより、鉛直方向に依存性があっても外側で並列化でき、かつ外側のループ長が大きいため並列化効率も高くなる。また、格子点やカラムに含まれる変数を使って大量の計算を行う場合は、図 A.1.8 のように ループを融合することにより、必要な変数が全てキャッシュにのったまま、大量の計算を行える可能性がある。

以上のことを考慮して、asuca では a(k, i, j) というようにインデックスを用いる。なお、x, y, z 方向

```
!$OMP PARALLEL DO
do j = 1, ny
do i = 1, nx
do k = 1, nz
  a(k,i,j) = ...
end do
end do
end do
!$OMP END PARALLEL DO
```

図 A.1.7 a(k,i,j) とインデックスを用いる場合の三重ループのコーディングの例。

```
!$OMP PARALLEL DO
do j = 1, ny
do i = 1, nx
  ...
  do k = 1, nz
    a(k,i,j) = ...
    b(k,i,j) = ...
    c(k,i,j) = ...
  end do
  ...
end do
end do
!$OMP END PARALLEL DO
```

図 A.1.8 大量の三重ループを融合したコーディングの例。

のループのインデックスとして、一般的に i, j, k が用いられることから a(i, j, k) のような利用方式を「ijk 方式」と呼ぶのに対し、asuca のような方式を「kij 方式」と呼んでいる。

(2) ファイルのフォーマット

上記で述べた「kij 方式」とは、あくまでもモデル本体や前処理のコーディングスタイルとして用いているものであり、入出力ファイルにはユーザーの利便性を考慮して他のモデルと同様にしている（上述の呼び方では「ijk 方式」）。

asuca の処理ではモデル本体や前処理の全てにおいて、3 次元データの入力で読み込む「ijk 方式」のデータをプログラムの内部処理である「kij 方式」に変更する必要があり、またデータの出力の際は、逆に「kij 方式」の配列を「ijk 方式」に変更する必要がある。

A.2 新規にコードを組み込む際の考え方

A.2.1 初期化部と時間積分ループ部の区別

asuca では、変数の初期値の設定といった、計算の最初のみに行う処理（初期化）と、時間積分ループの中で繰り返し計算が行われる処理とをコーディング上、

明確に区別している。初期化の処理は、時間積分ループに入る前にサブルーチン xxxx_ini により行う。これにより、モデルの初期化部分と時間積分ループが明確に区別されて見通しがよくなる。

A.2.2 診断量の計算

物理過程や力学過程で必要な診断量をそれぞれの処理で計算するのは、計算コストやメモリ利用の面から見て不適当である。そこで、時間積分やルンゲクッタ法の仮の時間積分により予報変数の値が更新されたタイミングで、時間変化率の計算に必要な変数をまとめて診断し、各処理でそれらを利用する、という設計にしている。

A.3 変数

A.3.1 命名規則

asuca で使う変数の大まかな命名規則は以下の通りである。なお、格子配置については第 2.2.1 項を参照のこと。

- _x：x 方向を示す。また、x 方向に半格子ずれたポイントを表すところもある。y, z も同様。
- _xi :計算空間における x 方向を示す。y, z も同様。
- _f：セル中心のレベル（フルレベル）における値
- _h：w が定義されるレベル（ハーフレベル）における値
- tend_：時間変化率
- 先頭の r：密度 (ρ) がかかっているもの
- _v：体積 ($1/J$) がかかっているもの
- ptb_：基本場からの偏差
- _l：ルンゲクッタループの外の f^t
- _s：ショートタイムステップ中の f^t
- _a：アジャストメントに使われる f^t
- _rk_s：ショートタイムステップ中の f^*, f^{**}
- _rk：ルンゲクッタループ (長い方) の f^*, f^{**}

A.3.2 予報変数

asuca で用いる予報変数の一覧を表 A.3.1 に示す。なお、rqa_v でまとめて確保される変数は、rqa_v : id_XX のように示す。予報変数ののりしろの幅は、移流の精度から決まる nx_mgn, ny_mgn [5] で与える。

A.3.3 診断変数

次に、診断変数の一覧を表 A.3.2 に示す。これらは物理過程や力学過程の処理における入力として利用され、複数の処理で共用されることが前提となっている。表 A.3.2 には、変数ののりしろの幅と目的を示している。のりしろの幅は、移流のフラックスの評価、内挿など目的によって異なるためである。

[5] nx_mgn, ny_mgn は 2 以上とする。

表 A.3.1 予報変数。ただし、概要説明においてヤコビアンは省略している。

変数名	概要	式
mom_x_v	x 方向の運動量	$\rho u/J$
mom_y_v	y 方向の運動量	$\rho v/J$
mom_z_v	y 方向の運動量	$\rho w/J$
dens_ptb_v	密度の偏差	ρ'/J
rmpt_ptb_v	$\rho\theta_m$ の偏差	$(\rho\theta_m)'/J$
rqa_v : id_qv	水蒸気の密度	$\rho q_v/J$
rqa_v : id_qc	雲水の密度	$\rho q_c/J$
rqa_v : id_qr	雨の密度	$\rho q_r/J$
rqa_v : id_qi	雲氷の密度	$\rho q_i/J$
rqa_v : id_qs	雪の密度	$\rho q_s/J$
rqa_v : id_qg	霰の密度	$\rho q_g/J$
rqa_v : id_qke	2× 乱流エネルギー	$\rho\overline{u_i'u_i'}/J$
rqa_v : id_tsq	液水温位の揺らぎの自己相関	$\rho\overline{\theta_l'^2}/J$
rqa_v : id_qsq	総水混合比の揺らぎの自己相関	$\rho\overline{q_w'^2}/J$
rqa_v : id_cov	$\overline{\theta_l'}$ と $\overline{q_w'}$ の相関	$\rho\overline{\theta_l'q_w'}/J$

A.3.4 変数ののりしろについて

以下では、変数ののりしろについて補足する。前述のとおり、予報変数ののりしろとして、幅 nx_mgn, ny_mgn の格子を確保する。また、診断変数はその目的に応じてのりしろが異なる。のりしろの値は、予報変数についてはのりしろを交換し、診断変数についてはのりしろを含めた範囲で予報変数から診断する方法を基本とする。なお、ひとつの変数について、場面に応じて必要なのりしろが異なることもある。例えば、x 方向の風 (vel_x) は、移流のフラックス評価のためにはのりしろ幅 nx_mgn が必要であるが、内挿処理のためにはのりしろ幅 1 の範囲のデータを通信すれば良い。このような場合、のりしろ幅は最大の大きさ（この例では nx_mgn）を取っておき、必要となる場所において、通信を行うのりしろ幅を指定するようにしている。以下では、のりしろの扱いを分類したものを示す。

(1) 予報変数

$\rho u/J$, $\rho v/J$, $\rho w/J$, ρ'/J, $(\rho\theta_m)'/J$, $\rho q_x/J$

- のりしろの幅: nx_mgn, ny_mgn で与える。
- 東、西、南、北と隣接しているプロセスとのりしろを通信する。
- 北東、北西、南東、南西のプロセスとも通信を行う必要がある [6]。

[6] 例えば x 方向に半格子ずれた点での y 方向の気圧傾度力を考える際に、x, y の両方向に半格子ずれた点での気圧が必要となる。予報変数からのりしろ領域を含めて気圧を診断するため、予報変数を通信しておく。ただし、移流のフラックス評価に使う場合、この通信は必須ではない（ただし、現状は通信している）。

表 A.3.2 診断変数。 のりしろの幅の mgn は nx_mgn, ny_mgn で与えることを示す.

変数名	概要	式	のりしろ幅：のりしろの目的
vel_x	x 方向の風	u	mgn:フラックス評価
vel_y	y 方向の風	v	mgn:フラックス評価
vel_z	z 方向の風	w	mgn:フラックス評価
mom_xi_v	x 方向の運動量（計算空間）	$\rho U/J$	1:移流速度
mom_yi_v	y 方向の運動量（計算空間）	$\rho V/J$	1:移流速度
mom_zi_v	z 方向の運動量（計算空間）	$\rho W/J$	1:移流速度
dens_ptb	密度の偏差	ρ'	mgn:フラックス評価、 u 等の算出
mptmp	θ_m	θ_m	mgn:フラックス評価
pres_ptb	気圧の偏差	p'	1:圧力の水平勾配
exner	エクスナー関数	π	1:圧力の水平勾配
ptemp	温位	θ	mgn:水平拡散
temp	気温	T	mgn:観測演算子
qa : id_qv	水蒸気の密度と全密度の比	q_v	mgn:フラックス評価
qa : id_qc	雲水の密度と全密度の比	q_c	mgn:フラックス評価
qa : id_qr	雨の密度と全密度の比	q_r	mgn:フラックス評価
qa : id_qi	雲氷の密度と全密度の比	q_i	mgn:フラックス評価
qa : id_qs	雪の密度と全密度の比	q_s	mgn:フラックス評価
qa : id_qg	霰の密度と全密度の比	q_g	mgn:フラックス評価
qa : id_qke	2× 乱流エネルギー	$\overline{u_i'u_i'}$	mgn:フラックス評価
qa : id_tsq	液水温位の揺らぎの自己相関	$\overline{\theta_l'^2}$	mgn:フラックス評価
qa : id_qsq	総水混合比の揺らぎの自己相関	$\overline{q_w'^2}$	mgn:フラックス評価
qa : id_cov	$\overline{\theta_l'}$ と $\overline{q_w'}$ の相関	$\overline{\theta_l'q_w'}$	mgn:フラックス評価

- ネストの場合は外から与える。
- 周期境界条件の場合は反対側から与える。

(2) 移流のフラックス評価に使う変数

u, v, w, θ_m, q_a, ρ'

- のりしろの幅: nx_mgn, ny_mgn で与える。
- nx_mgn, ny_mgn の範囲で予報変数から診断する。ただし、 u, v は ρ' と水平方向の定義ポイントが異なることから全ての範囲では正しい値にはならないため診断後に通信が必要になる。
- この目的においては、北東、北西、南東、南西のプロセスと通信を行う必要はない。

(3) 水平拡散する可能性のある変数

u, v, w, θ_m, θ, q_v

- 移流のフラックス評価に使う変数と同様の属性（のりしろ幅は水平拡散の次数によるが、現状は特に区別しない）。

(4) 移流速度

$\rho U/J$, $\rho V/J$, $\rho W/J$ （移流項を評価する際、この変数を移流速度として使っている。）

- のりしろの幅:1
- のりしろの値は予報変数から診断（通信はしない）。

(5) 圧力の水平勾配

p', π

- のりしろの幅:1
- のりしろの値は予報変数から診断（通信はしない）。

(6) 観測演算子

観測地点への内挿処理（4 点内挿）のため、観測演算子の計算にのりしろの幅 1 が必要となる。気温、海面気圧、地表面気圧、地上物理診断量及びその診断に必要な変数が対象となる。

- のりしろの幅:1
- のりしろ幅 1 を含む範囲で診断する。
- 計算範囲にのりしろを含まない変数に対しては、計算後にのりしろを通信する必要がある。

(7) 時間変化率

時間変化率を表す変数はのりしろを持たない。例外として、あるポイントで求めた時間変化率を半格子ずれたポイントに内挿するためにのりしろ幅 1 を持たせる場合がある。

(8) モニタ変数

モニタのために配列を確保する変数については、のりしろは不要である。

参考文献

荒波恒平, 石田純一, 2008: 並列化と高速化. 数値予報課報告・別冊第 54 号, 気象庁予報部, 58–65.

石田純一, 荒波恒平, 2003: 並列化. 数値予報課報告・別冊第 49 号, 気象庁予報部, 107–111.

室井ちあし, 1998: 非静力モデルの開発. 数値予報課報告・別冊第 44 号, 気象庁予報部, 25–41.

室井ちあし, 2000: 非静力学メソモデル・飛行場予報モデルの開発と将来展望. 数値予報課報告・別冊第 47 号, 気象庁予報部, 114–121.

付録Ｂ　電子計算室報告、同別冊、数値予報課報告・別冊 発行履歴

発行年月	発行号	表題
2014 年（平成 26 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 60 号	次世代非静力学モデル asuca
2013 年（平成 25 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 59 号	物理過程の改善に向けて (II)
2012 年（平成 24 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 58 号	物理過程の改善に向けて (I)
2011 年（平成 23 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 57 号	データ同化の改善に向けて
2010 年（平成 22 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 56 号	非静力学メソ 4 次元変分法
2009 年（平成 21 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 55 号	全球モデルの課題と展望
2008 年（平成 20 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 54 号	気象庁非静力学モデル II ―現業利用の開始とその後の発展 ―
2007 年（平成 19 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 53 号	数値予報と衛星データ ―同化の現状と課題―
2006 年（平成 18 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 52 号	アンサンブル技術の短期・中期予報への利用―激しい気象現象の予測向上を目指して―
2005 年（平成 17 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 51 号	全球モデル開発プロジェクト (II)
2004 年（平成 16 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 50 号	全球モデル開発プロジェクト (I)
2003 年（平成 15 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 49 号	気象庁非静力学モデル
2002 年（平成 14 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 48 号	変分法データ同化システムの現業化
2000 年（平成 12 年）10 月	数値予報課報告・別冊第 47 号	新しい数値解析予報システム（数値予報解説資料 (33) 平成 12 年度数値予報研修テキスト合併）
2000 年（平成 12 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 46 号	全球モデル開発の現状と展望 ―気象業務の基幹モデルとして ―
1999 年（平成 11 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 45 号	数値予報のための衛星データ同化
1998 年（平成 10 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 44 号	メソ数値予報の実用化に向けて
1997 年（平成　9 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 43 号	データ同化の現状と展望
1996 年（平成　8 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 42 号	一ヶ月予報に向けた全球モデルの開発 ―バイアスの小さな予報モデルを目指して ―
1994 年（平成　6 年） 9 月	数値予報課報告・別冊第 41 号	数値予報の実際（数値予報解説資料 (27) 平成 6 年度数値予報研修テキスト合併）
1994 年（平成　6 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 40 号	気候監視のための海洋データ同化システム ―大気海洋結合モデルによる季節予報に向けて ―
1993 年（平成　5 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 39 号	数値予報とリモートセンシング
1992 年（平成　4 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 38 号	力学的 1ヶ月予報の課題と展望
1991 年（平成　3 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 37 号	狭領域モデルの課題と展望
1990 年（平成　2 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 36 号	気象データと客観解析
1989 年（平成　元年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 35 号	力学的長期予報をめざして
1988 年（昭和 63 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 34 号	数値予報モデルの物理過程
1987 年（昭和 62 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 33 号	低緯度の数値予報
1986 年（昭和 61 年） 3 月	数値予報課報告・別冊第 32 号	メソスケール現象と数値予報
1985 年（昭和 60 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 31 号	延長予報に関する最近の話題
1984 年（昭和 59 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 30 号	ノーマル・モード・イニシャリゼーション
1983 年（昭和 58 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 29 号	北半球およびファインメッシュ予報モデル（8L NHM および 10L FLM）と解析システム
1982 年（昭和 57 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 28 号	スペクトル法による数値予報（その原理と実際）
1981 年（昭和 56 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 27 号	数値予報モデルの時間差分スキームと物理過程

発行年月	発行号	表題
1980 年（昭和 55 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 26 号	気象衛星資料と数値予報
1979 年（昭和 54 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 25 号	4 層北半球プリミティブ・モデルの改良について
1978 年（昭和 53 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 24 号	数値予報による延長予報
1977 年（昭和 52 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 23 号	数値予報と天気予報
1976 年（昭和 51 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 22 号	客観解析
1975 年（昭和 50 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 21 号	4 層北半球プリミティブ・モデルについて
1974 年（昭和 49 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 20 号	数値予報特別研修のまとめ
1973 年（昭和 48 年）10 月	電子計算室報告・別冊第 19 号	プリミティブ・モデルについて（数値予報解説資料 (6) 合併）
1973 年（昭和 48 年） 3 月	電子計算室報告・別冊第 18 号	プリミティブ・モデルをめぐって
1972 年（昭和 47 年）10 月	電子計算室報告別冊第 17 号	新しく予報を担当される方のための電計資料の見方（数値予報解説資料 (5) 合併）
1971 年（昭和 46 年）10 月	電子計算室報告別冊第 16 号	じょう乱の構造について（数値予報解説資料 (4) 合併）
1971 年（昭和 46 年） 9 月	電子計算室報告別冊第 15 号	中間規模じょう乱をめぐって
1970 年（昭和 45 年）11 月	電子計算室報告別冊第 14 号	北半球 3 層非地衡風バランス・モデル（数値予報解説資料 (3) 合併）
1969 年（昭和 44 年）10 月	電子計算室報告別冊第 13 号	北半球 3 層非地衡風バランス・モデル（数値予報解説資料 (2) 合併）
1969 年（昭和 44 年） 9 月	電子計算室報告別冊第 12 号	数値予報のはじめ（数値予報解説資料 (1) 合併）
1968 年（昭和 43 年）10 月	電子計算室報告別冊第 11 号	予報技術改善の方向
1968 年（昭和 43 年） 3 月	電子計算室報告別冊第 10 号	数値予報
1966 年（昭和 41 年）10 月	電子計算室報告別冊第 9 号	北半球 4 層傾圧予報について
1965 年（昭和 40 年）11 月	電子計算室報告別冊第 8 号	IUGG 大気科学委員会第一回活動概要報告
1964 年（昭和 39 年） 2 月	電子計算室報告 VIII	
1963 年（昭和 38 年） 6 月	電子計算室報告別冊第 7 号	バロクリニツク大気の性質
1963 年（昭和 38 年） 6 月	電子計算室報告別冊第 6 号	アジア地区のバロクリニツク予報
1962 年（昭和 37 年） 7 月	電子計算室報告別冊第 5 号	北半球バロトロピツク予報
1962 年（昭和 37 年） 6 月	電子計算室報告別冊第 4 号	気象庁電子計算室におけるルーチン傾圧モデルの概要
1961 年（昭和 36 年） 5 月	電子計算室報告 別冊 No.3	500MB 面渦度及びその予報図の利用法
1961 年（昭和 36 年） 3 月	電子計算室報告 VI VII	
1960 年（昭和 35 年） 8 月	電子計算室報告 別冊 No.2	機械でつくる天気図について
1960 年（昭和 35 年） 7 月	電子計算室報告 V	
1960 年（昭和 35 年） 5 月	電子計算室報告 別冊 No.1	渦度分布図の利用法並びに高層天気図の予報への応用について、1 パラメーターモデルによる上昇速度とその利用法について
1960 年（昭和 35 年） 4 月	電子計算室報告 IV	
1960 年（昭和 35 年） 1 月	電子計算室報告 III	
1959 年（昭和 34 年）10 月	電子計算室報告 II	
1959 年（昭和 34 年） 7 月	電子計算室コータリーレポート	