不均質彈性體の內部及び表面に起る波動に就いて

櫻庭 信一

不均質彈性體に起る波動を論じた文献は尠くない[(1)—(7)]が其の解式の複雜な爲と得られた函數の性質の不確定の爲未だ其の議論は充分で無い。玆で取扱はんとする問題も別に新しい事ではないが，從來看却された一性質に就て述べ御高教を得たいと思ふ。

運動方程式の取扱ひ方は大體妹澤博士の論文を踏襲し，圓柱座標，r, θ, z を用ひ $r=0$ なる線源より發生せる表面波型の波動を考へた。ラーメの常數 λ, μ は深さ z だけの函數とし變位成分 u, v, w を用ひて運動方程式は

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi_z}{\partial\theta}+2\mu\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial z}+2\varpi_\theta\frac{d\mu}{dz},\\
\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}-2\mu\frac{\partial\varpi_r}{\partial z}+2\mu\frac{\partial\varpi_z}{\partial r}-2\varpi_r\frac{d\mu}{dz},\\
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\Delta\frac{d}{dz}(\lambda+2\mu)-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial(r\varpi_\theta)}{\partial r}+\frac{2\mu}{r}\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\}$$

---

(1) E. Meissner: Elastische Oberflächen-Querwellen, Verh. 2. int. Kongr. f. tech. Mech. (Zürich, 1926)

(2) K. Aichi: On the Transversal Seismic Waves travelling upon the Surface of Heterogeneous Material, Proc. Phys.-Math. Soc. [3], **4** (1922).

(3) H. Honda: On the Rayleigh Wave propagating over the Surface of a Heterogeneous Material, Geophys. Mag. **4** (1931).

(4) K. Sezawa: A Kind of Waves transmitted over a Semi-infinite Solid Body of Varying Elasticity, 地•硏•彙•**9**(1931)

(5) R. Stoneley: The Transmission of Rayleigh Waves in a Heterogeneous Material, Month. Not. Roy. Ast. Soc. Geophys. Supp., **3** (1934).

(6) H. Jeffreys: The Effect on Love Waves of Heterogeneity in the Lower Layer, Month. Not. Roy. Ast. Soc. Geophys. Supp., **2**(1928-1931).

(7) J. H. Jeans: Phil. Trans. Roy. Soc. (A), **201** (1903).

記號は普通用ひられるものであるか說明は省く。今

$$\Delta=0;\ w=0$$

に相當する特解を求むれば之は比較的容易に求められる。

卽[1]

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{m}{k^2}\Phi(z)\frac{C_m(kr)}{r}\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} m\theta.\, e^{ipt}, \\ v &= -\frac{1}{k^2}\Phi(z)\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\left.\begin{matrix}\sin\\ -\cos\end{matrix}\right\} m\theta.e^{ipt}, \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}\frac{d\Phi}{dz}+\left(\frac{\rho p^2}{\mu}-k^2\right)\Phi=0.$$

玆に $C_m(kr)$ は m 次の圓壔函數で進行發散波を取扱ふには Hankel の第二種圓壔函數 $H_{2,m}(kr)$ を用ふべきである。

扨 $$\mu=\mu_0(1+\sigma z)^2$$

の形を假定する時は解は容易に

$$\Phi(z)=(1+\sigma z)^{-\frac{1}{2}}B_\nu\left\{\frac{ik}{\sigma}(1+\sigma z)\right\}$$

で與へられる。 $\nu=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{p^2}{v_0^2\sigma^2}},\quad v_0^2=\frac{\mu_0}{\rho}.$

玆に B は矢張り圓壔函數である。

之でともかくも形式的の解は得られた事になるが此の詳細な吟味は容易でない。

卽上式より解る樣に $v_0^2\sigma^2 \gtreqless 4p^2$ に從つて ν は實數，零，虛數と變化して解式は甚しく異つたものになる。

1°. 先ず半無限彈性體論に移る豫備的考察として一面が剛體によつて密着され他方は無限に延びてゐる場合に就いて考へる。之は一見從來彈性論で取扱はれて來た諸問題から見て非常に不自然な境界條件であるが次の問題に移る豫備的な裝作として我慢して載く事にする。强ひて物理的意義を與へんとせば半無限大の不均質彈性體に表面波が發生してゐた場合に，此の狀態を損ふ事無しに表

---

(1) 妹澤：前揭參照.

面に剛體を密着させた時（かゝる相像は勿論自由である）既成の表面波はどんな状態で存在し得るか，又消失するかを見る事になるとでもとれば良い。此の場合勿論

$z\to\infty$ で變位は零に近づかなければならない。かゝる函數としては勿論 B_ν の形として $H_{1,\nu}$ を選むべきである。(argument は imaginary)

所が $H_{1,\nu}(\varsigma)$ は$(\varsigma=i\dfrac{k}{\sigma}(1+\sigma z))$ $\nu\gtrless 0$

の範圍では $-\dfrac{1}{2}\pi<\arg\varsigma<\dfrac{3}{2}\pi$ の面内で零點を有しない。[1] 即ち此の場合に相當する波動は存在し得無い。つまり與へられた表面横波速度を有し與へられた彈性係數の深さによる增分率を持つ不均質彈性體に於ては一面を剛體で劃されてゐる場合，或特定な週期 $v_0\sigma\leq 2p$

（然かもそれは週期のみに依關する）の表面波の性質を持つ波動は存在し得ない。

處で $v_0^2\sigma^2>4p^2$ 即ち v が虚數の場合も同樣な考へ方で $z=z_1$ 及び $z=z_2$ 或は $z=z_1$ 及び $z=\infty$ に於いて零になる樣な函數が見つかれば宜しい。

それがあつたとしたら勿論 $H_{1,\nu}(\varsigma)$ であり，虚數の ς 値に對して $H_{1,\nu}(\varsigma)=0$ ならば安定な波動が起り得る譯である。

所が $H_{1,\nu}(\varsigma)$ は虚軸の上で無數の零點を持つ事が證明出來る。

即

$$i\sin\nu\pi H_{1,\nu}(\varsigma)=J_\nu(\varsigma)-e^{-\nu\pi i}J_\nu(\varsigma)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^2}{1.\Gamma(2-\nu)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^4}{1.2\Gamma(3-\nu)}\cdots\cdots\right\}$$

$$-e^{-\nu\pi i}\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^{\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^2}{1.\Gamma(2+\nu)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^4}{1.2\Gamma(3+\nu)}\cdots\cdots\right\}$$

となるから

$$\nu=i\eta,\qquad \varsigma=i\xi$$

と書けば $\eta,\ \xi$ は實數となる

(1) G. I. Taylor: Effect of Variation in Density on the Stability of Superposed Streams of Fluids. Proc. Roy. Soc. London, (A)**132** (1931).

$$\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^{-\nu}=e^{\frac{1}{2}\eta\pi}e^{-i\eta\log\left(\frac{1}{2}\xi\right)},\quad e^{-\nu\pi}\left(\frac{1}{2}\varsigma\right)^{\nu}=e^{\frac{1}{2}\pi\eta}e^{i\eta\log\left(\frac{1}{2}\xi\right)}$$

を用ひて

$$-\sinh\eta\pi H_{1,\nu}(\varsigma)=e^{\frac{1}{2}\pi\eta}\Big[e^{i\eta\log\frac{1}{2}\xi}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2}{\Gamma(1.2-i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^4}{1.2\Gamma(3-i\eta)}+\cdots\cdots\right\}$$

$$-e^{-i\eta\log\frac{1}{2}\xi}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2}{1.\Gamma(2+i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^4}{1.2\Gamma(3+i\eta)}+\cdots\cdots\right\}$$

今 n を實數とすれば $\Gamma(n+i\eta)$ の實部は $\Gamma(n-i\eta)$ の實部に對し $\Gamma(n+i\eta)$ の虚部と $\Gamma(n-i\eta)$ 虚部とは絕體値等しく符號反對である。

故に ς が純粹の虚數の時は $H_{1,\nu}(\varsigma)$ も又純粹の虚數で

$$H_{1,\nu}(\varsigma)=ie^{\frac{1}{2}\eta\pi}\operatorname{cosech}\eta\pi\Big[\sin\left(\eta\log\frac{1}{2}\xi\right)\left\{\Re\frac{1}{\Gamma(1+i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2}{1}\Re\frac{1}{\Gamma(2+i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^4}{1.2}\Re\frac{1}{\Gamma(3+i\eta)}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\cos\left(\eta\log\frac{1}{2}\xi\right)\left\{\Im\frac{1}{\Gamma(1+i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2}{1}\Im\frac{1}{\Gamma(2+i\eta)}+\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^4}{1.2}\Im\frac{1}{\Gamma(3+i\eta)}+\cdots\cdots\right\}\Big]$$

$\Re$, $\Im$ は夫々實部，虚部をとる意で，ε を

$\dfrac{1}{\Gamma(n+i\eta)}$ の引數とすれば $H_{1,\nu}(\varsigma)$ は

$\sin\left(\eta\log\frac{1}{2}\xi+\varepsilon\right)$ に比例する。

$\xi\to 0$ で $\log\frac{1}{2}\xi\to\infty$ となるから $\sin\left(\eta\log\frac{1}{2}\xi+\varepsilon\right)$ は $\xi\to 0$ となるにつれて段々と急激にその附號を變ずる。

故に ς 面虚軸の上で $H_{1,\nu}(\varsigma)$ は無限數の零點を有する事が證明された。今かゝる零點を

$$\varsigma_1=i\xi_1,\qquad \varsigma_2=i\xi_2\qquad \text{とすれば}$$

境界面は $\quad z_1=\dfrac{\xi_1}{k}-\dfrac{1}{\sigma},\ z_2=\dfrac{\xi_2}{k}-\dfrac{1}{\sigma}$

なる高さにあり，此の兩平面は剛體の壁と見て宜しく彈性體の運動を變化させない。

故に二つの面が b 丈けの距離にあれば

$\xi_1-\xi_2=kb$ なるが如き波長の波が傳播される。

即ち波長は

$$\frac{2\pi b}{\xi_1-\xi_2}$$

故に b に或る値が與へられゝば或る數丈けの特別の一群の波長が存在し得るし一面丈けが劃されてゐる場合は總ての波長の波が存し得る事になる 。

2°. 次ぎに半無限彈性體の問題に移る。

之は前の結果を用ひて簡單に導き出せるので表面の條件として

$$\frac{d\Phi}{dz}=0$$

即ち $$\frac{H_{1,\nu+1}(\varsigma)}{H_{1,\nu}(\varsigma)}=\frac{\frac{1}{2}+\nu}{\varsigma}$$

但し $$\varsigma=\frac{ik}{\sigma}.$$

上の特性式は ς が純粹の虚數であるから ν が實數の時には根を持たない事は容易に證明出來る。之に反して ν が虚數の場合には無數の根を持つ譯で，無數の節平面を持つのが特長である。

實際問題として ν が虚數の場合が普通であるから(1)上式の事は單なる理論的興味に過ぎない。 （昭和十年四月中旬）

(1) H. Jeffreys : loc. cit.