# 中空圓壔の自由振動

杵　島　　磨

**1. 緒言**　球或は圓壔の振動の問題には古くから多くの人々に依つて理論的結果があげられてゐる。先づ C. Chree[1] は週期的の表面歪力が働く場合の球の振動を解き H. Lamb は球殼の自由振動を特にその厚さが薄い場合をも論じ，更に Poisson,[3] H. Lamb[4] 等に依つて球體の振動が取扱はれてゐる。一方自由振動に及ぼす引力の影響は Bromwich[5] に依つて考へられ，地球の spheroidal vibration の週期はそのために 66 分から 55 分に減ぜられるといふ結果が得られてゐる。この方面の更に一般的な研究には有名な Jeans[6] の論文がある。之に依ると gravity や compressibility の影響を入れた場合の地球の spheroidal vibration の週期はポアッソン比を¼，且つ剛性率が steel と同一とすれば約1時間となる。一方境界が固定された球體の振動は P. Debge[7] 等に依つて解かれてゐる。

著者は簡單な場合として軸の方向に運動がない場合の中空圓壔の自由振動の解を求め Poisson の中空球體の radial vibration, H. Lamb の elastic plate の波動の解と比較してみた。

(1) C. Chree; Cambridge Phil. Soc. Trans. vol. 14 (1889) (2) Lond. Math. Soc. Proc., vol. 14 (1883) (3) Mémoire sur léquilibre et le mouvement des corps elastiques, Paris, Mém. de l'Acad. t. 8. (1829). (4) H. Lamb; Lond. Math. Soc. Proc. vol. 13 (1882) (5) Lond. Math. Soc. Proc., vol. 30 (1889) (6) Phil. Trans. Roy. Soc. (Ser. A), vol. 201 (1903) (7) Ann. d. Phys. (Ser. 4), Bd. 39, 1912, p. 789.

**2. 中空圓壔の週期方程式**　變位をベクトル $\vartheta$ で表せば均質等方體内の運動の方程式は

$$\rho\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\Delta+\mu\nabla^2\vartheta \cdots\cdots (1)$$

で表される。玆に $\rho$ は密度，$\lambda,\mu$ はラーメの彈性常數，$\Delta=\mathrm{div}\vartheta$ とする。圓壔座標 $(\varpi,\varphi)$ を用ふれば

$$\Delta=\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}(\varpi\vartheta_\varpi)+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\vartheta_\varphi}{\partial\varphi} \cdots\cdots (2)$$

$$\rho\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial\varpi^2}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Delta}{\partial\varpi}+\frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\varphi^2}\right) \cdots\cdots (3)$$

$$\mu\left\{\frac{\partial^2\vartheta_\varpi}{\partial\varpi^2}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\vartheta_\varpi}{\partial\varpi}-\frac{1}{\varpi^2}\left(\vartheta_\varpi-\frac{\partial^2\vartheta_\varpi}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{2}{\varpi^2}\frac{\partial\vartheta_\varphi}{\partial\varphi}\right\}-\rho\frac{\partial^2\vartheta_\varpi}{\partial t^2}$$
$$=-(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial\varpi}$$

$$\mu\left\{\frac{\partial^2\vartheta_\varphi}{\partial\varpi^2}+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\vartheta_\varphi}{\partial\varpi}-\frac{1}{\varpi^2}\left(\vartheta_\varphi-\frac{\partial^2\vartheta_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{2}{\varpi^2}\frac{\partial\vartheta_\varpi}{\partial\varphi}\right\}-\rho\frac{\partial^2\vartheta_\varphi}{\partial t^2}$$
$$=-(\lambda+\mu)\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

變位は $e^{in\varphi}$ $e^{ipt}$ に比例するとして上式を解けば[(1)] $\varpi,\varphi$ 方向の變位は次式で與へられる。

$$\vartheta_\varpi=\frac{1}{2}\left[\frac{A_n}{h}\{C_{n+1}(h\varpi)-C_{n-1}(h\varpi)\}+B_n\{C_{n+1}(k\varpi)+C_{n-1}(k\varpi)\}\right]e^{in\varphi}e^{ipt}$$
$$\vartheta_\varphi=\frac{1}{2i}\left[\frac{A_n}{h}\{C_{n+1}(h\varpi)+C_{n-1}(h\varpi)\}+B_n\{C_{n+1}(k\varpi)-C_{n-1}(k\varpi)\}\right]e^{in\varphi}e^{ipt}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

茲に $h^2=\rho\dfrac{p^2}{\lambda+2\mu}$, $k^2=\dfrac{\rho p^2}{\mu}$, $i=\sqrt{-1}$, $A_n$, $B_n$ は任意の常數, $C$ はベッセル函數を表す。

中空圓壔の內外の半徑を夫々 $b$, $a$ とすれば，境界條件は $\varpi=a,\ b$ に於て

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial\vartheta_\varpi}{\partial\varpi}=0 \quad =\widehat{\varpi\varpi}\\ &\frac{\partial}{\partial\varpi}\vartheta_\varphi-\frac{1}{\varpi}\vartheta_\varphi+\frac{1}{\varpi}\frac{\partial\vartheta_\varpi}{\partial\varphi}=0 \quad =\widehat{\varpi\varphi}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$C$ に第一，第二種圓壔函數を用ひ，(5) を (6) に代入すれば，$\varpi=a,b$ に於て

$$\begin{aligned}&A_n[\lambda J_n(h\varpi)+\mu\{J'_{n+1}(h\varpi)-J'_{n-1}(h\varpi)\}]+\mu B_n k\{J'_{n+1}(k\varpi)\\&\quad+J'_{n-1}(k\varpi)\}+A_n'[\lambda Y_n(h\varpi)+\mu\{Y'_{n+1}(h\varpi)-Y'_{n-1}(h\varpi)\}]\\&\quad+\mu B_n' k\{Y'_{n+1}(k\varpi)+Y'_{n-1}(k\varpi)\}=0\\&A_n\{J_{n+2}(h\varpi)-J_{n-2}(h\varpi)\}+kB_n\{J_{n+2}(k\varpi)+J_{n-2}(k\varpi)\}\\&\quad+A_n'\{Y_{n+2}(h\varpi)-Y_{n-2}(h\varpi)\}+kB_n'\{Y_{n+2}(k\varpi)+Y_{n-2}(k\varpi)\}=0\cdots(7)\end{aligned}$$

$A_n$ $A_n'$ $B_n$ $B_n'$ を消去すれば自由振動の週期を定める式を得る。

3. $n=0$ **なる場合** 前に得た結果を用ひて $n=0$ となる場合をしらべてみる。period equation は (7) より容易に導かれる。即ち

$$\begin{vmatrix}\lambda J_0(ha)+2\mu J_1'(ha) & \lambda Y_0(ha)+2\mu Y_1'(ha) & 0 & 0\\ \lambda J_0(hb)+2\mu J_1'(hb) & \lambda Y_0(hb)+2\mu Y_1'(hb) & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_2(ka) & Y_2(ka)\\ 0 & 0 & J_2(kb) & Y_2(kb)\end{vmatrix}=0\cdots(8)$$

之より

$$J_2(ka)Y_2(kb)-Y_2(ka)J_2(kb)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

或ひは

$$\{\lambda J_0(ha)+2\mu J_1'(ha)\}\{\lambda Y_0(hb)+2\mu Y_1'(hb)\}$$

(1) 中野，中央氣象臺歐文彙報第一卷 p. 256 參照

$$-\{\lambda J_0(hb)+2\mu J_1'(hb)\}\{\lambda Y_0(ha)+2\mu Y_1'(ha)\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

故に $k$, $h$ 卽ち橫及び縱の振動の週期は (9) (10) 式より夫々獨立に求められる。$n=0$ の場合は (5) 式から判る樣に radial 及び circumferential の變位は共存する事を許されず，一方が存在する時は他方は零となる。從つて period equation が (9) (10) の如く分離されるのは當然である。

今外徑と内徑との比が 1.2, 1.5, 2.0 の場合について (9) 式を滿足する $k$ の値を定めよう。この場合は Jahnke, Emde の表から直ちに次の結果が得られる。

| $a/b$ | $kb$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 15.8066 | 31.4656 | 47.1570 | 62.8567 | 78.5597 | 94.2644 |
| 1.5 | 6.4742 | 12.6648 | 18.9156 | 25.1823 | 31.4556 | 37.7322 |
| 2.0 | 3.4063 | 6.4277 | 9.5228 | 12.6404 | 15.7673 | 18.8991 |

a を地球半徑 $6.37\times10^3$km にとり橫波の速度を 5.0 km/sec とし，$k^2=\dfrac{p^2\rho}{\mu}$ の關係を用ひて捩り振動の週期を求むれば

| $a/b$ | $T$ (分) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 7.04 | 3.53 | 2.36 | 1.86 | 1.42 | 1.18 |
| 1.5 | 13.74 | 7.02 | 4.70 | 3.53 | 2.83 | 2.36 |
| 2.0 | 19.61 | 10.38 | 7.01 | 5.28 | 4.23 | 3.53 |

となる，玆に $T$ は週期で分を單位としてある。之に依ると $n=0$ の場合の捩り振動の週期は圓壔體の厚さが大になる程大きくなる。

$ka$, $kb$ が甚だ大きい時卽ち波長が半徑に比して甚だ短い時は (9) は次の樣に簡單化される。

$$\sin k(a-b)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

之より

$$k=\frac{s\pi}{a-b},\quad p=\frac{s\pi}{a-b}V_s,\quad s=1,2\cdots\cdots \qquad (12)$$

之は H. Lamb の平行板の波動の解[1]に於て軸の方向（波の傳播方向と一致する）の shearing motion のみが存在する場合の period equation と一致する。

次に (10) の數値計算を行ふ。簡單のために $\lambda=\mu$ 卽ちポアッソン比を $\dfrac{1}{4}$ とおいて計算すれば

(1) Proc. Roy. Soc. London. vol. XCIII. p. 122.

| $a/b$ | $hb$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 0.850 | 15.6 | 31.9 | 47. | 63. | 79. | 94. |
| 1.5 | 0.772 | 6.3 | 12.6 | 19. | 25. | 31. | 38. |
| 2.0 | 0.655 | 3.4 | 6.4 | 9. | 13. | 16. | 19. |

となり前同樣 $a$ を地球半徑に等しくとり，且つ縱波の速度を $V_p=\sqrt{3}\ V_s=8.66$ km/sec として週期を求むれば

| $a/b$ | $T$ (分) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 75.5 | 4.08 | 1.97 | 1.4 | 1.0 | 0.8 | 0.7 |
| 1.5 | 66.6 | 7.95 | 4.10 | 2.7 | 2.0 | 1.6 | 1.4 |
| 2.0 | 58.8 | 11.4 | 6.03 | 4.0 | 3.1 | 2.4 | 2.0 |

さてこの場合は前と異り長週期が一つづつ存在し，而も厚さが大になれば週期は短くなつてゐる。而して第二第三以上の根より求めた週期は前に得た捩り振動の週期に匹敵するもので厚さが大になる程週期は大きくなつてゐる。

$ha$, $hb$ が甚だ大きい時は (10) は

$$\cos h(a-b)=0,\quad p=\frac{(2s+1)\pi}{2}\,\frac{V_p}{a-b} \qquad \cdots\cdots(13)$$

4. **$n=1$ の場合** period equation は。

$$\begin{vmatrix} (\lambda+2\mu)J_1(ha) & (\lambda+2\mu)Y_1(ha) & -\frac{2\mu}{a}J_2(ka) & -\frac{2\mu}{a}Y_2(ka) \\ -\frac{2\mu}{ha}J_2(ha) & -\frac{2\mu}{ha}Y_2(ha) & & \\ (\lambda+2\mu)J_1(hb) & (\lambda+2\mu)Y_1(hb) & -\frac{2\mu}{b}J_2(kb) & -\frac{2\mu}{b}Y_2(kb) \\ -\frac{2\mu}{hb}J_2(hb) & -\frac{2\mu}{hb}Y_2(hb) & & \\ -\frac{2}{ha}J_2(ha) & -\frac{2}{ha}Y_2(ha) & kJ_2'(ka) & kY_2'(ka) \\ -\frac{2}{hb}J_2(hb) & -\frac{2}{hb}Y_2(hb) & kJ_2'(kb) & kY_2'(kb) \end{vmatrix}=0 \quad \cdots(14)$$

$\lambda=\mu$ とおき，第一行より第三行，第二行より第四行を減じ

$$kJ_2'(ka)=-\frac{2}{a}J_2(ka)+kJ_1(ka)$$

を用ひて變形すれば (14) は次の樣になる。

$$\begin{vmatrix} 3J_1(ha) & 3Y_1(ha) & -J_1(ka) & -Y_1(ka) \\ 3J_1(hb) & 3Y_1(hb) & -J_1(kb) & -Y_1(kb) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{ha}J_2(ha) & -\frac{2}{ha}Y_2(ha) & J_2'(ka) & Y_2'(ka) \\ -\frac{2}{hb}J_2(hb) & -\frac{2}{hb}Y_2(hb) & J_2'(kb) & Y_2'(kb) \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (15)$$

$\lambda=\mu$, $k/h=\sqrt{3}$, を用ひて（15）を滿足する根を數値的に求めると

| $a/b$ | $hb$ | | |
|---|---|---|---|
| 1.2 | 9.0 | 19.8 | 29.2 |

之より週期を出せば

| $a/b$ | $T$（分） | | |
|---|---|---|---|
| 1 2 | 10.0 | 4.5 | 3.1 |

となる。

更に $ha$, $hb$, $ka$, $kb$ が充分大きい時は

$$\frac{8}{3abhk}+\left[1+\frac{4}{h^2ab}\left\{\left(\frac{h}{k}\right)^2+\frac{1}{9}\right\}\right]\sin h(a-b)\sin k(a-b)$$

$$-\frac{8}{3abhk}\cos h(a-b)\cos k(a-b)-\frac{2(a-b)}{abk}\sin h(a-b)\cos k(a-b)$$

$$-\frac{2(a-b)}{3abh}\cos h(a-b)\sin k(a-b)=0 \quad \cdots\cdots (16)$$

**5. 中空球體の振動との比較** hollow sphere の radial vibration の問題は古く Poisson が解いたものがある[(1)]，即ち 4 $h^2/k^2=\nu$ とおけば period equation は次の樣になる。

$$\frac{\nu\, ha+(h^2a^2-\nu)\tan ha}{(h^2a^2-\nu)-\nu\, ha\tan ha}=\frac{\nu\, hb+(h^2b^2-\nu)\tan hb}{(h^2b^2-\nu)-\nu\, hb\tan hb} \quad \cdots\cdots (17)$$

更に厚さが甚だ薄い時は週期は

$$T=\pi a\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} \quad \cdots\cdots (18)$$

で與へられる，玆に $\sigma$ は Poisson 比である。

$\sigma=\frac{1}{4}$, $\lambda=\mu$, $\nu=\frac{4}{3}$ とおいて（17）を計算すれば

| $a/b$ | $hb$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 1.35 | 2.73 | 4.32 | 5.68 |
| 1.5 | 1.14 | 2 33 | 3.75 | 4.80 |
| 2.0 | 0.96 | 1.83 | 3.14 | 4.32 |

(1) Love: Math. Theory of Elasticity. p. 286.

$a$ を地球半徑，縦波の速度を 8.66 km/sec とおいて週期を求むれば

| $a/b$ | $T$ (分) | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 47.3 | 23.5 | 14.8 | 11.3 |
| 1.5 | 45.0 | 22.0 | 13.7 | 10.7 |
| 2.0 | 39.8 | 21.0 | 12.0 | 8.9 |

又同樣な假定の下に（18）を計算すれば $T=51.7$ を得る。

扨て $n=0$ の場合の中空圓壔の週期と比較するに，最大週期では

| $a/b$ | 圓　壔 | 球 | 兩者の比 |
|---|---|---|---|
| 1.2 | 75.5 | 47.3 | 1.60 |
| 1.5 | 66.6 | 45.0 | 1 48 |
| 2.0 | 58.8 | 39.8 | 1.48 |

即ち最大週期の縦振動では中空圓壔の方が中空の球に比べて一倍半程大きい事になる。

**6. 結語**　以上要するに中空圓壔の自由振動の解を求め $n=0$, 1 の場合について外徑を地球半徑大としたときの週期を求めてみた。それに依ると，$n=0$ の場合では捩り振動の週期は最大のもので數十分程度で中空圓壔の厚さが大になる程週期は增す。縦振動では前者に對等する週期が存在するが，更にその何倍といふ樣な長週期の振動があり，この場合は厚さが薄くなる程週期は大きくなる。之は中空球體の radial vibration に匹敵するもので兩者の最大週期を比較すれば略 1.5 となり中空圓壔の方が大きい。

本研究は簡單な計算に依つて大體の傾向を見たに過ぎず，更に軸の方向に波が傳播する場合[1]等の檢討が望まれる。

終りに臨み終始懇切なる御助言を賜はつた和達先生に深く感謝致します。更に本文を草するに當り多大なる御援助をお與へ下されし先輩櫻庭氏に厚く御禮申上げます。

(1) この解は容易に求められる，