

地震の規模別度数の統計式について (序報)*

宇 津 徳 治**

550.341

On the Statistical Formula Showing the Magnitude-Frequency Relation of Earthquakes

(A Preliminary Report)

T. Utsu

(Seismological Section, J.M.A.)

The coefficient b in Gutenberg-Richter's statistical formula,

$$\log n(M) = a - bM,$$

showing the relation between magnitude M and frequency $n(M)$ of earthquakes with magnitude M occurring within a certain limited time and space, is one of the important parameters which characterize the earthquake group considered. In this paper, several practical methods of obtaining the value of b for a given earthquake group are outlined and preliminary investigations are made for estimating the accuracy of b obtained by various methods.

In § 3, the simplest method is discussed, i. e., to calculate

$$b_{lm} = \log(m/l) / (M_l - M_m)$$

as an approximate value of b . (M_l and M_m are the magnitude of the l -th and m -th earthquake respectively when the earthquakes are arranged according to magnitude.) The accuracy of this method can be estimated using the formula

$$Q_{lm}(x) = B_{1-10^{-bx}}(n-l, l) / B(m-l, l)$$

which gives the probability that $M_l - M_m$ does not exceed x (cf. Figs. 3, 4, and 5).

In § 4, an estimation of the accuracy of b obtained by eyefitting a line to the magnitude-frequency and magnitude-cumulative frequency diagrams is made by use of experimental magnitude distribution data provided from a table of random digits (cf. Fig. 8).

In § 5, the accuracy of b determined by the method of least squares (Gauss's method and Deming's method) is discussed using the same data as in § 4 (cf. Fig. 9).

§ 1. ま え が き

一定の時間および空間内に起つた地震を大きき別に分類すると、マグニチュード M から $M + dM$ までの地震の数 $n(M)dM$ が、多くの場合、近似的に

$$\log n(M) = a - bM \quad (1)$$

という式に適合することが知られている。そして、いろいろな地震群についての b の値について、あるいは、

この b の値が地震群によって異なるものかいかなどについて多数の研究が発表されている (たとえば, Gutenberg and Richter 1949, Tsuboi 1952, Suzuki 1959, Miyamura 1962 など)。この場合、実際の観測資料から、その地震群についての b の値を求める方法、および得られた b の値の精度その他について、二三の問題があるように思えたので調べてみた。

§ 2. b の値を求める種々の方法

与えられたデータに(1)式をあてはめて、その地震群についての b の値を推定するのにも、いろいろな方法

* Received May 13, 1963.

** 気象庁地震課

が考えられる。Table 1 のデータを例にして述べると、まずこのデータを片対数目盛および直線目盛のグラフ上にプロットしてみるとそれぞれ Fig. 1 (白丸) および Fig. 2 のようになるが、このとき

(1) Fig. 1 にプロットされた点 (白丸) になるべく適合するような直線を目見当で引き、その傾斜から b の値を決める。

(2) 目見当でなく、 $\log n(M) dM$ (ここでは $dM=0.1$) と M が直線関係になるとして、Gauss の最小 2 乗法で b の値を決める。この場合、 M の大きいところ (この例では $M=7.8, 7.9, 8.2$, および 8.4 以上) で $n(M)$ の観測値が 0 になるので、これらの点は Fig. 1 のような図にはプロットできないし、Gauss の最小 2 乗法にかけることもできない。これらの点を除外して、Fig. 1 にプロットされた点だけに着目して、直線を引いたり、あるいは、最小 2 乗法を行なうのは適当でない。そうすると、地震の総数が少いときほど b の値が小さく 出るとなると思われる。この $n(M)=0$ となる点の処理については、いろいろな方法が考えられるが、処理法によっては、得られる b の値に系統的な誤差が生じることが考えられる。また、各点ごとにウェイトを変え

ないで Gauss の最小 2 乗法にかけるということは $\log n(M)$ のバラツキが同じ標準偏差の正規分布をするとい

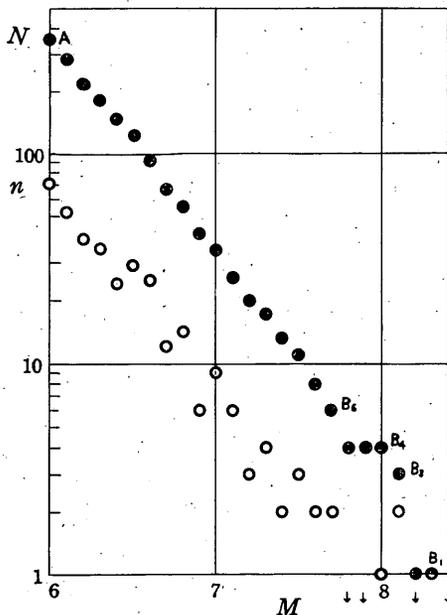


Fig. 1. Magnitude data given in Table 1 are plotted on semilogarithmic graph paper. Open and solid circles indicate n and N respectively.

Table 1. Frequency n of shallow earthquakes (depth 80 km and less) with magnitude M occurring in and near Japan (within the area shown on the index map (Utsu, 1961, p. 528)) in the years 1926 to 1959 inclusive. N is the cumulative frequency, i.e., the frequency of earthquakes with magnitude M and larger.

M	n	N	M	n	N
6.0	71	352	7.3	4	17
6.1	62	281	7.4	2	13
6.2	39	219	7.5	3	11
6.3	35	180	7.6	2	8
6.4	24	145	7.7	2	6
6.5	29	121	7.8	0	4
6.6	25	92	7.9	0	4
6.7	12	67	8.0	1	4
6.8	14	55	8.1	2	3
6.9	6	41	8.2	0	1
7.0	9	35	8.3	1	1
7.1	6	26	8.4 and over	0	0
7.2	3	20			

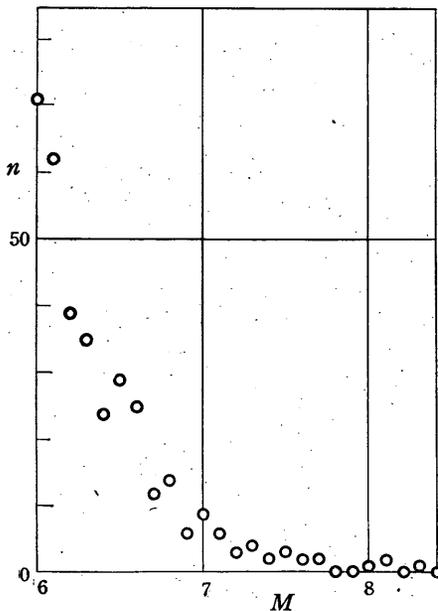


Fig. 2. The same data of n as in Fig. 1 are plotted on linear-scale graph paper.

う仮定に立っているが、実際はそうでないことは明らかである。

(3) $n(M)=0$ の点も計算に入れられるように Deming の最小 2 乗法を用いて、曲線

$$n(M)=10^a 10^{-bM} \quad (2)$$

を Fig. 2 にプロットされた点にあてはめ b の値を決める。このときも、 M がいくつまでの点を計算に入れるか (たとえば、 M が 6~8.3 の間の点を使うか、 M が 6~7.7 までか、 M が 6~8.8 にするかなど) によって b の値が多小違ってくるであろう。

(4) 上記 Deming の最小 2 乗法で、各点に適当なウエイトを掛けて計算する。

(5) Fig. 1 (黒丸) のように、累積度数 N を片対数のグラフにプロットし、その点になるべく適合するような直線を目見当で引き、その傾斜から b の値を決める。

(6) もっとも簡単な方法としては、Fig. 1 の最小の M (この場合 $M=6.0$) に対する点 A と最大の M (この場合 $M=8.3$) に対する点 B_1 とを直線で結び、その傾斜を求める。あるいは、点 A と 2 番目、3 番目、…、 l 番目、…の大きさの地震の M に対応する点 $B_2, B_3, \dots, B_l, \dots$ を結び、その傾斜を求める。

その他精度のよしあしを別にすれば、いろいろの方法が考えられようが、ここでは、以上あげた方法について吟味してみる。このとき、上の例では M を 0.1 ごとに区切っているが、この区切りかたも、得られる b の値に影響するし、また M の決めかたに基因する個々の地震の M の値の誤差の影響もありうる。しかし、本報では、 M の値には誤差はないものと仮定して議論を進める。

§ 3. 累積度数から b の値を求めること

いま、考えている地震群について、最大の地震のマグニチュードを M_1 、2 番目のものを M_2 、以下順に、 $M_3, M_4, \dots, M_l, \dots$ とすれば、 m 個の地震群の最小の地震のマグニチュードは M_m である。§ 2 の (6) の方法は

$$b_{1m} = \log m / (M_1 - M_m), \quad (3.1)$$

$$b_{lm} = \log (m/l) / (M_l - M_m), \quad (3.2)$$

等を求めて、これらの一つをもって b の近似値として用いようすることである。これら $b_{1m}, b_{2m}, \dots, b_{lm}$,

…のうち、どれが b の真の値に近い確率が大きいであろうか、また、真の値からの誤差はどのくらいになるであろうかをまず計算してみる。

それには、地震のマグニチュード別度数の分布の形が母集団においては (1) 式で表わされるようなものであるとし、実際に観測されるデータは、この母集団から無作為抽出の結果であると考え、このとき、 l 番目の大きさの地震と m 番目の大きさの地震 ($l > m$ とする) のマグニチュードの差 $M_l - M_m$ が x と $x+dx$ の間になる確率 $q_{lm}(x)dx$ を計算すればよい。

いま、次式で M_n^* を定義する。

$$M_n^* = M_1^* - \{(\log n)/b\}, \quad (4)$$

$$M_1^* = \{a - \log(b \ln 10)\}/b. \quad (5)$$

さて、 n 番目の地震のマグニチュードが \bar{M}_n と $\bar{M}_n + d\bar{M}_n$ の間になる確率は計算の結果 (Utsu 1961, p. 588)

$$g(\bar{M}_n) d\bar{M}_n = \frac{b \ln 10}{(n-1)!} \left\{ n 10^{-b(\bar{M}_n - M_n^*)} \right\}^n \times \exp \left\{ -n 10^{b(\bar{M}_n - M_n^*)} \right\} d\bar{M}_n \quad (6)$$

となる。

次に、(i) l 番目の地震のマグニチュードが \bar{M}_l と $\bar{M}_l + d\bar{M}_l$ の間になり、かつ、(ii) m 番目の地震のマグニチュードが \bar{M}_m と $\bar{M}_m + d\bar{M}_m$ の間になる確率 $g(\bar{M}_l, \bar{M}_m) d\bar{M}_l d\bar{M}_m$ を計算する。(この確率は $g(\bar{M}_l) g(\bar{M}_m) d\bar{M}_l d\bar{M}_m$ ではない。 $l > m$ という条件があるからである。) いま、 ν を充分大きな整数とし、 ν 番目の大きさの地震まで考えることにする。 $g(\bar{M}_l, \bar{M}_m)$ は、(a) l 番目の地震のマグニチュードが \bar{M}_l と $\bar{M}_l + d\bar{M}_l$ の間になる確率、(b) 残りの $(\nu-l)$ 個の地震のうちいずれか 1 個がマグニチュード \bar{M}_m と $\bar{M}_m + d\bar{M}_m$ の間になる確率、(c) 残りの $(\nu-l-1)$ 個の地震のうち $(n-m-1)$ 個がマグニチュード \bar{M}_l と \bar{M}_m の間になる確率、(d) 残りの $(\nu-m)$ 個の地震のマグニチュードが \bar{M}_m と M_ν の間になる確率、この 4 者の積となる。

$$(a) \text{ は } g(\bar{M}_l) d\bar{M}_l,$$

$$(b) \text{ は } \binom{\nu-l}{1} p''(M_m) d\bar{M}_m,$$

$$(c) \text{ は } \binom{\nu-l-1}{m-l-1} \left(\int_{\bar{M}_m}^{\bar{M}_l} p''(M) dM \right)^{l-m-1}$$

$$(d) \text{ は } \left(\int_{M_\nu}^{\bar{M}_m} p''(M) dM \right)^{\nu-m}$$

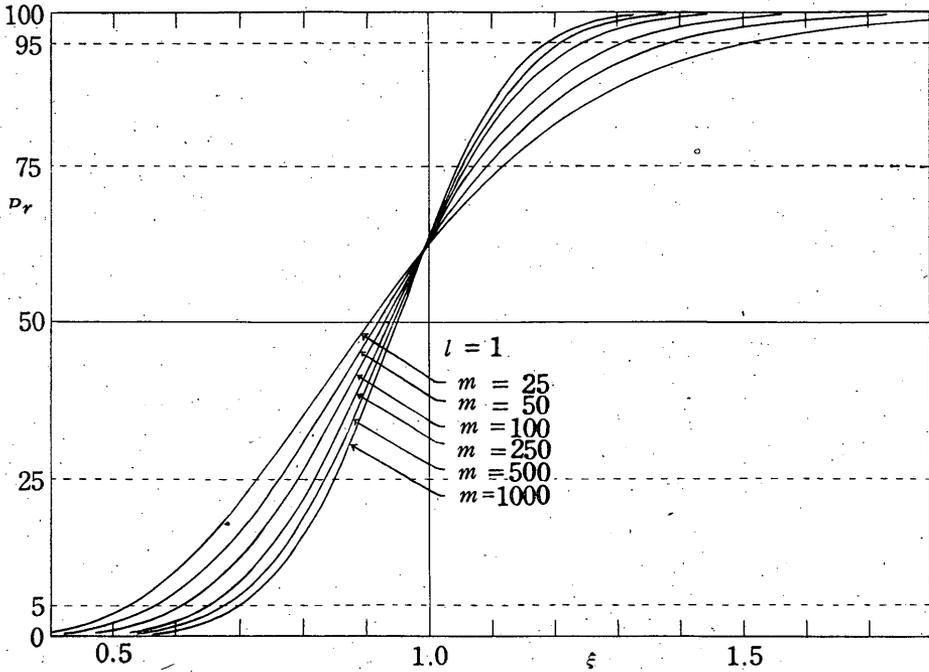


Fig. 3. The probabilities (in %) that b_{lm}/b does not exceed ξ are plotted against ξ for various values of m when $l=1$.

である。ここで $p''(M)$ は $p''=c''10^{-bM}$ の形で c'' を得る。

$$\int_{M_v}^{\bar{M}_l} p''(M) dM = 1 \quad (7)$$

となるべきもの、すなわち

$$c'' = b \ln 10 / (10^{-bM_v} - 10^{-b\bar{M}_l}) \quad (8)$$

従って

$$g(\bar{M}_l, \bar{M}_m) d\bar{M}_l d\bar{M}_m = \left[(\nu - l) \left(\frac{\nu - l - 1}{m - l - 1} \right) g(\bar{M}_l) \right. \\ \times b (\ln 10) 10^{-(m-l)b(\bar{M}_l - M_l^*)} 10^{(m-l)b(\bar{M}_l - \bar{M}_m)} \\ \times \left\{ 1 - 10^{-b(\bar{M}_l - \bar{M}_m)} \right\}^{m-l-1} \\ \times \left\{ 1 - \frac{l 10^{b(\bar{M}_l - \bar{M}_m)} 10^{-b(\bar{M}_l - M_l^*)}}{\nu} \right\}^{\nu-m} \\ \left. \div \left(\frac{\nu}{l} \right)^{m-l} \left\{ 1 - \frac{l 10^{-b(\bar{M}_l - M_l^*)}}{\nu} \right\}^{\nu-m} \right] d\bar{M}_l d\bar{M}_m \quad (9)$$

$\nu \rightarrow \infty$ とすると $M_\nu \rightarrow M_\nu^*$ になることを考慮して次式

$$g(\bar{M}_l, \bar{M}_m) d\bar{M}_l d\bar{M}_m = \frac{(b \ln 10)^2 l^m}{(l-1)! (m-l-1)!} \\ \times 10^{-mb(\bar{M}_l - M_l^*)} 10^{(m-l)b(\bar{M}_l - \bar{M}_m)} \\ \times \left\{ 1 - 10^{-b(\bar{M}_l - \bar{M}_m)} \right\}^{m-l-1} \\ \times \exp \left\{ -l 10^{b(\bar{M}_l - \bar{M}_m)} 10^{-(\bar{M}_l - M_l^*)} \right\} d\bar{M}_l d\bar{M}_m \quad (10)$$

この式は $l=1$ とおけば Utsu (1961) の (54) 式と一致する。 $M_l - M_m$ が x と $x+dx$ の間になる確率は (10) 式に $\bar{M}_l - \bar{M}_m = x$ とおいて M_l について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すれば得られる。

$$q_{lm}(x) dx = \frac{b \ln 10 (m-1)!}{(l-1)! (m-l-1)!} \\ \times 10^{-lbx} \left(1 - 10^{-bx} \right)^{m-l-1} dx \quad (11)$$

$q_{lm}(x)$ が極大になるのは

$$x = \log \{ (m-1)/l \} / b \quad (12)$$

においてである。

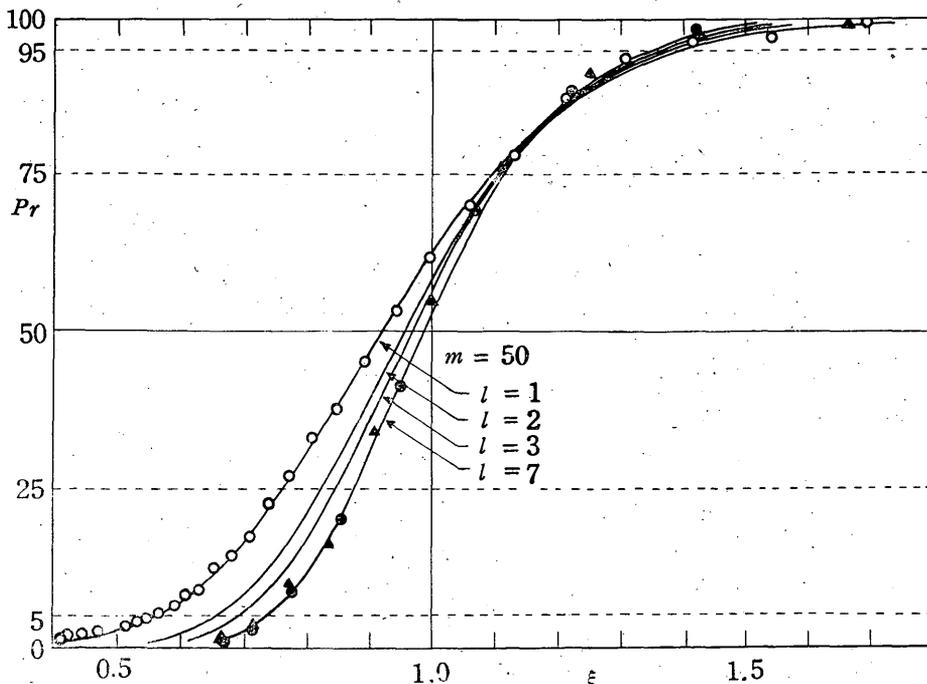


Fig. 4. The probabilities (in %) that b_{lm}/b does not exceed ξ are plotted against ξ for various values of l when $m=50$. The open and solid circles and triangles show the results from statistical experiments using random digits. These experimental data fit the theoretical curves very closely.

(11) を 0 から x まで積分して累積度数密度を求めると

$$\begin{aligned}
 Q_{lm}(x) &= \frac{(m-1)!}{(l-1)!(m-l-1)!} \int_0^1 10^{-bx} z^{l-1} (1-z)^{m-l-1} dz \\
 &= \frac{B_{1-10^{-bx}}(m-l, l)}{B(m-l, l)} \\
 &= I_{1-10^{-bx}}(m-l, l) \quad (13)
 \end{aligned}$$

が得られる。さらに次の漸化式が得られる。

$$Q_{lm}(x) = (1-10^{-bx})^{m-1}, \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{lm}(x) &= Q_{l-1, m}(x) \\
 &+ \frac{(m-1)!}{(l-1)!(m-l)!} \left\{ 10^{-(l-1)bx} (1-10^{-bx})^{m-l} \right\}. \quad (14. m)
 \end{aligned}$$

$Q_{lm}(x)$ は $M_l - M_m \leq x$ となる確率であるから、これは (3. m) 式によって b_{lm} を求めたとき $b_{lm}/b \leq \log(m/l)/bx$ となる確率であるともいえる。したがって、ある l, m について、いろいろの bx に対して $\xi = \log(m/l)/bx$ と $Q_{lm}(x)$ を計算し、横軸に ξ 、縦軸に $Q_{lm}(x)$

をとって一つの曲線を書けば、この図はそのまま、 b_{lm}/b が横軸に目盛られた値以下になる確率すなわち b_{lm}/b の累積確率 $Pr(b_{lm}/b \leq \xi)$ を示していることになる。いろいろな l, m の組合せについて、このような曲線を書いておけば、総数 m 個の地震のデータから b をこのような方法で推定するとき l をいくつにとったときももっとも精度がよくなるか、その精度はどのくらいかなどを知ることができる。もっとも精度のよくなる l は m の大きさに関係し、 m が大きいほどその l も大きくなることは容易に予想される。ここでは、 $l=1$ のときの種々の m に対する $Pr(b_{lm}/b \leq \xi)$ 、および $m=50$ のときの種々の l に対する $Pr(b_{lm}/b \leq \xi)$ のみを Fig. 3 と Fig. 4 に示すにとどめる。 $m=50$ のときは $l=5 \sim 15$ 程度にとったときももっとも精度がよくなること、 l がそれより小さくなるほど b_{lm} が真の値 b より小さく求まる確率がふえ $l=1$ のときは $b_{lm} \leq b$ となる確率は 63% となり (この値は Fig. 3 にみられるように m の値にともなってほとんど変化しない)、中間値は $0.92b$ となる、 $m=50, l=5 \sim 7$ のときの b_{lm}/b の中間値は 0.97

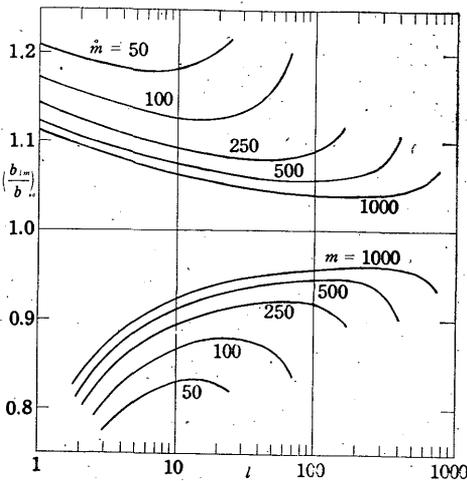


Fig. 5. A graph for estimating the standard deviation of b_{lm}/b for various values of l and m .

$$\left(\frac{b_{lm}}{b}\right)_{\pm\sigma} = \frac{\log(m/l)}{\log m / \left\{ l \pm \sqrt{\frac{(m-l)l}{m+1}} \right\}} \quad (20)$$

これは b_{lm}/b の平均値からその標準偏差分だけ加減した値と近似的に見なされるから、 b_{lm}/b の精度の見当をつけるに役立つ。

Fig. 5 は $m=50, 100, 250, 500, 1000$ の場合について、(20) の $(b_{lm}/b)_{\pm\sigma}$ を l に対してプロットしたものである。これからだいたい $l \approx m/5$ くらいのところでは偏差が最小になることがわかるから、(3.1) 式によって b_{lm} を求めてこれを考えている地震群の b の値とする場合には $l=m/5$ 程度の l を採用すればもっとも精度がよくなるといえる。

[付記] この節で論じたことから、筆者の論文 (Utsu, 1961) Appendix 3 Table 9, (p. 594), およびこれを得るための考えかたは誤りであることがわかったので訂正したい。

で、 b_{lm}/b の累積確率が 25%、75% に達するのは 0.87 と 1.11 である。 b_{lm}/b の確率分布は、正規分布ではないが、それに準ずるものとして中間値の両側 25% ずつになる幅を確率誤差と称することにすればこれは 0.12 となり、また、34.13% ずつになる幅を標準偏差と称することにすればこれは 0.18 となる。

次に、ここに述べた方法で b_{lm} を求めたとき、 b_{lm}/b の誤差、すなわち $1-b_{lm}/b$ が統計的に最小となるような l の値が m によってどう変わってゆくかを調べる。

$$X = 1 - 10^{-bx} \quad (15)$$

とおくと $Q_{lm}(x)$ は $Q_{lm}(x) = I_X(m-l, l)$ で、 X についてベータ分布であるから、累積確率分布が $I_X(m-l, l)$ となるような母集団の X についての平均値と分散は

$$\bar{X} = 1 - (l/m), \quad (16)$$

$$\sigma^2 = \frac{(m-l)l}{m^2(m+1)} \quad (17)$$

となる。したがって $\bar{X} \pm \sigma$ の点に対応する x は

$$1 - 10^{-bx} = 1 - \frac{l}{m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{(m-l)l}{m+1}} \quad (18)$$

から
$$bx = \log \frac{m}{l \pm \sqrt{\frac{(m-l)l}{m+1}}} \quad (19)$$

となる。この点に対応する b_{lm}/b は

§ 4. 目見当による直線のあてはめ

§2 に挙げた 6 つの方法のうち (1) から (5) までの方法は、(6) の方法のように理論的に吟味することが困難である。そこで乱数表を利用して、(1) 式を満足している母集団から無作為に抽出した標本を多数組作り、各組について §2 の (1) から (5) までの方法によって b の値を決めてみてそのバラツキの状況を調べてみた。

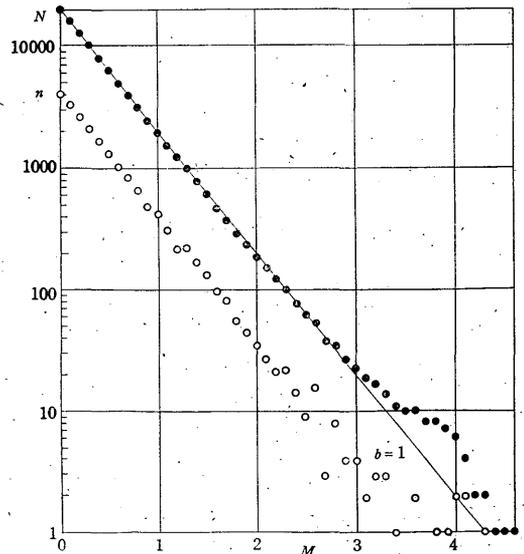


Fig. 6. The magnitude-frequency diagram for data given in Table 2.

Table 2. Magnitude distribution data made from 100,000 random digits.

<i>M</i>	<i>n</i>								
0.0	4054	1.0	425	2.0	36	3.0	4	4.0	2
0.1	3297	1.1	312	2.1	28	3.1	2	4.1	2
0.2	2595	1.2	221	2.2	22	3.2	3	4.2	0
0.3	2083	1.3	227	2.3	23	3.3	3	4.3	1
0.4	1683	1.4	173	2.4	15	3.4	1	4.4	0
0.5	1308	1.5	136	2.5	9	3.5	0	4.5	0
0.6	1021	1.6	98	2.6	16	3.6	2	4.6	1
0.7	842	1.7	82	2.7	3	3.7	0	4.7	0
0.8	665	1.8	57	2.8	8	3.8	1	4.8	0
0.9	488	1.9	46	2.9	4	3.9	1	4.9	0
Total									20,000

乱数表としては RAND Corporation (1955) のうちの 10 万 digits を使用した。母集団の b は 1.0 とし、2 万個のマグニチュードの表を作った。マグニチュードの最小値は 0.0 になるようにした。この 2 万個のマグニチュードの M 別度数は Table 2 のとおりである。これを片対数のグラフにプロットしてみると Fig. 6 のようになる。

次に、2 万個の M を 50 個ずつの 400 組に分け、各組について M 別の度数および累積度数を片対数のグラフ上にプロットした。この 400 枚の図は紙数のつごうで全部を掲げることはできないが、どれも $b=1.0$ の母集団からの標本であるにもかかわらず、いろいろなものがあって興味深い。多くは Fig. 7a のように $b=1.0$ の線のまわりに集っているが、中には b のように傾斜がかなりゆるやかに見えるものや逆に c のように傾斜が急に

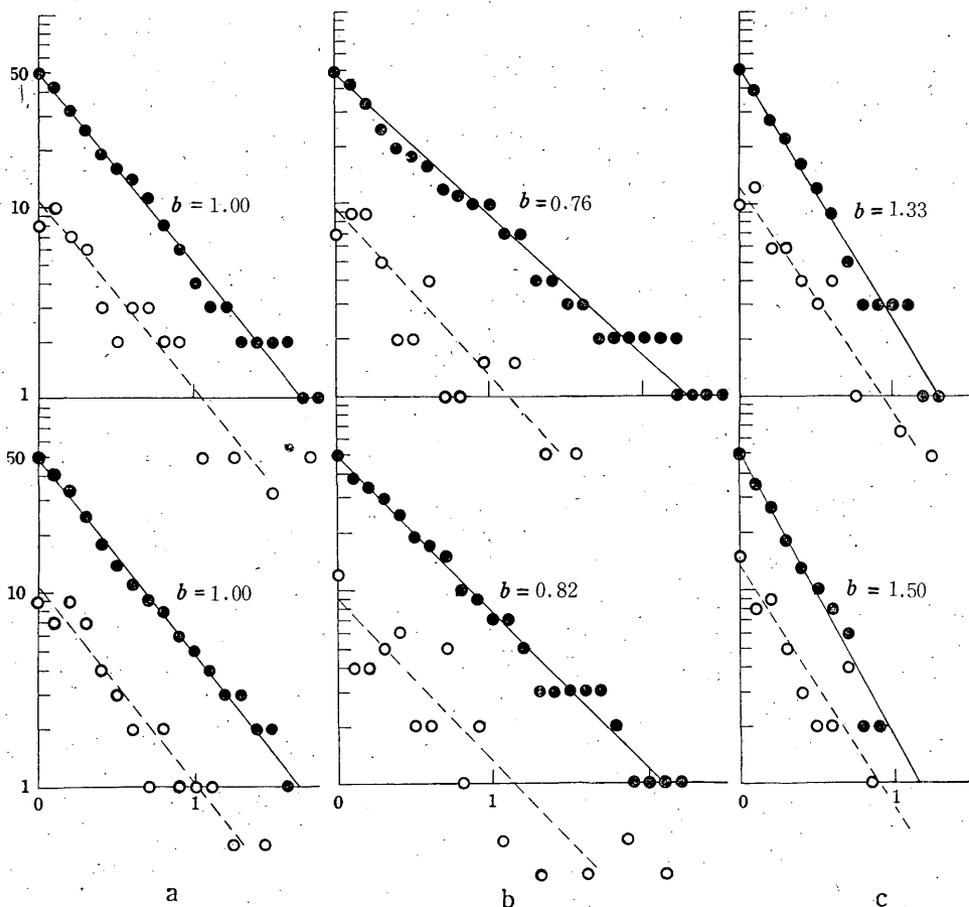


Fig. 7. Several examples taken from 400 magnitude-frequency diagrams made from experimental magnitude data for which the value of b in population is 1.0.

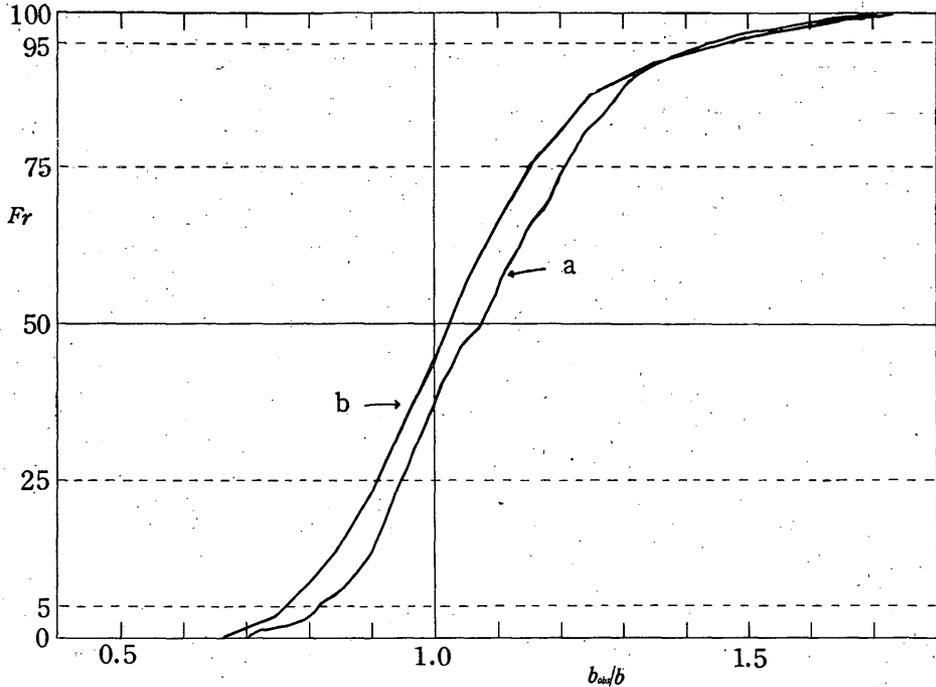


Fig. 8. Percentage of cumulative frequency of b_{obs}/b for $m=50$.

a: the curve for b_{obs}/b obtained by eyefitting to the magnitude-frequency diagrams,
 b: the curve for b_{obs}/b obtained by eyefitting to the magnitude-cumulative frequency diagrams.

えるものもある。

さて、このような 400 枚の図に見目当て直線をあてはめ、その傾斜 b_{obs} を測定した。(この見目当には筆者のくせが含まれているはずであるが、これはやむを得ない。) なお、 $N(M) \geq 1$ となる M のはんいで $n(M)=0$ となる区間は、その左右の $n(M) \neq 0$ の点との平均を Fig. 7 の例に示すような要領でとり、プロットした。得られた b_{obs} のデータを Fig. 4 等と比較するため、横軸に b_{obs}/b 、縦軸に $(b_{obs}$ の累積度数/ b_{obs} の全度数) をプロットしたものが Fig. 8 である。a は M 別度数をそのまま用いた場合、b は累積度数を用いた場合である。この図をみると、「累積」のほうから決めた b_{obs} のほうが、「そのまま」のほうよりも b_{obs}/b の値で約 0.05 小さく出る傾向がある。しかし、いずれの場合も $b_{obs} \geq b$ と出る場合のほうが多く、「累積」の場合には 56%、「そのまま」の場合には 63% が、正しい b の値より大きくなっている。これは前節で述べた、2 点間を直線で結ぶ方法とは逆の傾向である。 b_{obs}/b の中間値は「累積」では 1.03、「そのまま」では 1.07 である。25% と

75% に達する点は「累積」では 0.91 と 1.15、「そのまま」では 0.95 と 1.20 であるから、前節と同じ意味での b_{obs}/b の確率誤差はともに 0.12 となり、これは前節の方法で求めたものと同じ値である。また 5% と 95% の点は「累積」では 0.74 と 1.46、「そのまま」では 0.82 と 1.45 となる。さらに、2.5%、97.5% の点はそれぞれ 0.73 と 1.60 および 0.78 と 1.55 となる。つまり b_{obs}/b の値の大きいほうに誤差の広がり大きい。

なお参考までに本節のデータから、前節の方法によって $b_{1,50}$ 、 $b_{5,50}$ 、 $b_{7,50}$ を求めて、その累積度数を示す点を Fig. 4 の上にプロットしてみた(それぞれ白丸、三角、黒丸で示す)。プロットされた点は理論曲線とよく一致している。

§ 5. 最小 2 乗法による決定

(1) Gauss の最小 2 乗法

前に述べたとおり、Gauss の最小 2 乗法を用いるときは $n(M) = 0$ となる区間の処理法が問題となる。ここでは、前節の 400 組のデータについて、しばしば行なわ

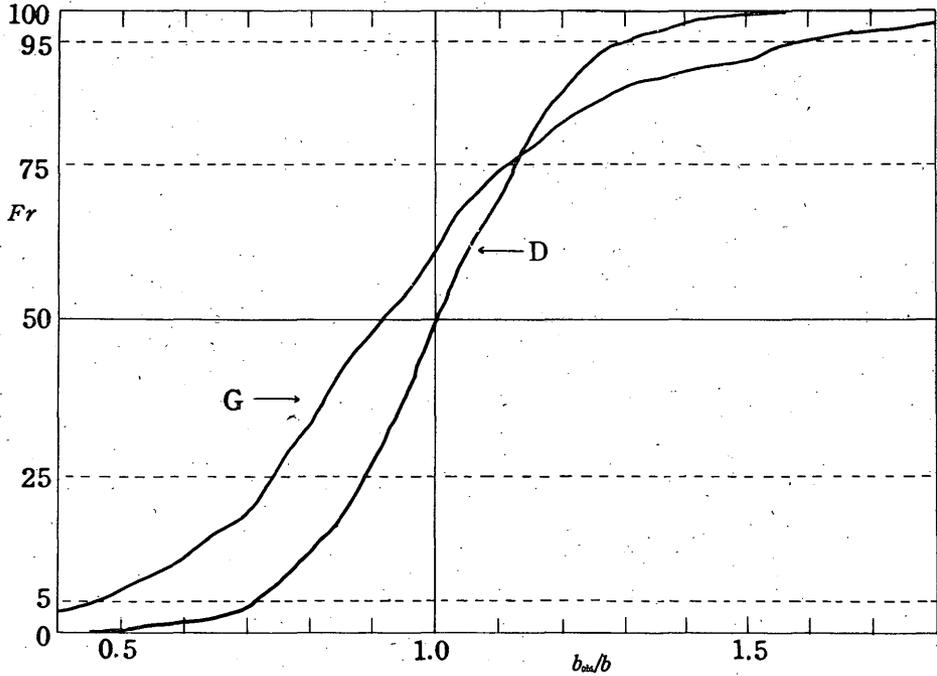


Fig. 9. Percentage of cumulative frequency of b_{obs}/b for $m=50$.
G and D indicate the case that values of b_{obs} are determined by Gauss's and Deming's method of least squares respectively.

れるように $n(M)=0$ となる M より小さい M の範囲だけを用いて Gauss の最 2 乗法により b_{obs} を求めた。結果は Fig. 9 の G 曲線である。この図は Fig. 8 と同様に b_{obs}/b の累積曲線を示してある。G 曲線は Fig. 8 の a, b 曲線にくらべて傾斜がゆるやかで、この方法による b の決定の精度の悪いことを示している。また、 b_{obs} の値そのものも小さく出る傾向が著しい。これは $n(M)=0$ となる区間より M の大きい部分のデータを捨てたことが大きく影響していると思われる。

(2) Deming の最小 2 乗法

同じ 400 組のデータについて Deming の最小 2 乗法により、データにはウエイトを掛けて、 b_{obs} を求めた。もとの式 (1) は記号を変えれば

$$y = a10^{-bx} \quad (21)$$

という形であるから

$$F = y - a10^{-bx} \quad (22)$$

とおくと

$$F_a = -10^{-bx}, \quad (23)$$

$$F_b = a \ln 10 x 10^{-bx}. \quad (24)$$

ここで a, b の近似値として母集団の値 $a_0=10, b_0=1$ を採用し、またウエイトとして

$$W_y = 1/\sigma_y^2 = 1/a_0 10^{-b_0 x} \quad (25)$$

を用いれば (y のばらつきは Poisson 分布に従うからその標準偏差は近似的に y の平均値 $a_0 10^{-b_0 x}$ の 2 乗根になる)

$$\left. \begin{aligned} [F_a F_a] &= \frac{1}{a_0} \sum 10^{-b_0 x}, \\ [F_a F_b] &= -\ln 10 \sum x 10^{-b_0 x}, \\ [F_b F_b] &= a_0 (\ln 10)^2 \sum x^2 10^{-b_0 x}, \\ [F_a F_0] &= -\frac{\sum y}{a_0} + \sum 10^{-b_0 x}, \\ [F_b F_0] &= \ln 10 (\sum xy - \sum a_0 x 10^{-b_0 x}), \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\Delta b = \frac{[F_a F_a][F_a F_0] - [F_a F_b][F_b F_0]}{[F_a F_b][F_b F_0] - [F_a F_0]^2} = \frac{\sum 10^{-b_0 x} \sum xy - \sum x 10^{-b_0 x} \sum y}{a_0 \ln 10 \{ \sum 10^{-b_0 x} \sum x^2 10^{-b_0 x} - (\sum x 10^{-b_0 x})^2 \}} \quad (27)$$

$$b_{obs} = b_0 - \Delta b \quad (28)$$

となる。(ウエイトを掛けたほうが式は簡単になることに注意)。

この式を用いて前節の 400 組のデータについて $M: 0$ から 1.5 までの範囲を用いて b_{obs} を求めた結果は Fig. 9 の D 曲線である。この曲線は G にくらべて傾斜は急で、Fig. 8 の a, b 曲線、Fig. 4 の $l=7$ 曲線と、左右のずれのあることをのぞきほとんど一致する。ただし b_{obs}/b の大きいところでは Fig. 4, Fig. 8 の曲線より急に 100% に近ずき、 b の決定の精度のよいことを示している。また 50% になるのがちょうど $b_{obs}/b=1$ の点であり、他の曲線のように左右にずれていない。

§ 6. む す び

§ 2 にのべたいくつかの方法によって、地震群の b の値を求めたときの精度を検討した。本報ではデータが少いので詳細な結論はひかえるが、地震の総数 50 の場合について各方法の精度を比較してみると、次のことがいえる。

(1) Gauss の最小 2 乗法により、 $n(M)=0$ になる区間の手前までのデータを使って b の値を決めることは精度が悪い。

(2) 他の方法、すなわち、片対数グラフ上にプロットした点に目見当で直線をあてはめる法、地震の総数が m のとき $l(\cong m/5)$ 番目に大きい地震と最小の地震のマグニチュード M_l, M_m から (3.1) 式によって決める法、Deming の最小 2 乗法による法の精度はほとんど同じである。ただし、細かくいえば Deming の法、目見当の

法、(3.1) 式による法の順にわずかに精度がよいように見えるが、この程度の差をどれだけ問題すべきか疑問である。

(3) 目見当の法するとき「そのまま」の度数をプロットしたものをを用いると b の値が平均 0.07 b くらい大きくでる。

本報告は問題の一部を不完全な形で述べたにすぎない。次の機会にさらに詳細な検討を行ないたいと思っている。

参 考 文 献

- Gutenberg, B. and Richter C. F., 1949: Seismicity of the Earth and Related Phenomena, Princeton University Press, Princeton, N. J.
- 宮村撰三, 1962: 地震活動と地体構造, 地震 II, 15, 23—52.
- The RAND Corporation, 1955: A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates, The Free Press, Glencoe, Ill.
- Suzuki, Z., 1959: A Statistical Study on the Occurrence of Small Earthquakes (Fourth Paper), *Sci. Rep. Tohoku Univ., Ser. 5, Geophysics*, 11, 10—54.
- Tsuboi, C., 1952: Magnitude-Frequency Relation for Earthquakes in and near Japan, *Journ. Phys. Earth*, 1, 47—54.
- Utsu, T., 1961: A Statistical Study on the Occurrence of Aftershocks, *Geophys. Mag.* 30, 521—605.