回轉楕円座標における弾性波動方程式の解*

宇 佐 美 竜 夫**

550.341

General Solutions of the Equations of Motion of Homogeneous and Isotropic Elastic Body in Prolate and Oblate Spheroidal Coordinates

T. Usami

(*Seismological Section, J.M.A.*)

General solutions of the equations of motion of homogeneous and isotropic elastic body are obtained in prolate and oblate spheroidal coordinates. The method used is due to H. Takeuchi. Two solutions for distortional wave are obtained. Of the two, we must adopt more suitable one according to boundary or initial conditions.

§ 1. はしがき

最近，回転楕円座標が物理数学の各分野で盛んに使われてきている．筆者は寡聞にして，いまだ，均質・等方弾性体の波動方程式の回転楕円座標系における解を知らないので求めてみた．方法は竹内[1]によった．将来，この解を Diffraction，その他の問題に使いたいためである．この解が地球物理学や工学へ応用されることを望んでいる．

§ 1. 基礎の式

均質・等方弾性体の運動方程式は変位 vector を U と書くと

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,U+\mu\nabla^2 U \tag{1}$$

となる．ここに，

$$\nabla^2 U=\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,U-\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,U \tag{2}$$

である．

U を次のように仮定する．

$$U=U_1+U_2+U_3, \tag{3}$$

$$U_1=\mathrm{grad}\,\phi, \tag{4}$$

$$U_2=\mathrm{rot}\,A, \tag{5}$$

$$U_3=\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,A. \tag{6}$$

* Received Aug. 1, 1957.

** 気象庁地震課

ϕ は scalar, A は vector である.

このとき, scalar, ϕ, ψ がそれぞれ

$$\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\,\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\phi, \tag{7}$$

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\mu\,\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\psi \tag{8}$$

を満せば, (4), (5), (6) が (1) の解であることがわかっている. ただし, vector A としては次のものを使う[2].

$$(A_x,\ A_y,\ A_z)=(0,\ 0,\ 1)\psi \tag{9}$$

$$=(x,\ y,\ z)\psi. \tag{10}$$

また, orthogonal curvilinear coordinates を $(\xi,\ \eta,\ \varphi)$ とすると, よく知られているように次の式が成り立つ.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h_1^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2,\\ \frac{1}{h_2^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2,\\ \frac{1}{h_3^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\Delta=\mathrm{div}\,U=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{w}{h_1h_2}\right)\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}2\varpi_\alpha&=h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{w}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v}{h_2}\right)\right\},\\ 2\varpi_\beta&=h_3h_1\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u}{h_1}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{w}{h_3}\right)\right\},\\ 2\varpi_\gamma&=h_1h_2\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{h_1}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

こゝに Δ は dilatation, ϖ_α, ϖ_β, ϖ_γ は rotation の ξ, η, φ 成分である. また,

$$(U_\xi,\ U_\eta,\ U_\varphi)=(u,\ v,\ w) \tag{14}$$

とする.

一方, 均質・等方弾性体の運動方程式は

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)h_1\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}-2\mu h_2h_3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\varpi_\gamma}{h_3}\right)+2\mu h_2h_3\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varpi_\beta}{h_2}\right)&=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2},\\ (\lambda+2\mu)h_2\frac{\partial\Delta}{\partial\eta}-2\mu h_3h_1\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varpi_\alpha}{h_1}\right)+2\mu h_3h_1\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varpi_\gamma}{h_3}\right)&=\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2},\\ (\lambda+2\mu)h_3\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}-2\mu h_1h_2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varpi_\beta}{h_2}\right)+2\mu h_1h_2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\varpi_\alpha}{h_1}\right)&=\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

となる.

また，次式を得る．

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}=h_1h_2h_3\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \tag{16}$$

§ 2. Prolate spheroidal coordinates の場合

この場合には

$$\left.\begin{aligned} x&=c\ \sinh\xi\cdot\sin\eta\cdot\cos\varphi,\\ y&=c\ \sinh\xi\cdot\sin\eta\cdot\sin\varphi,\\ z&=c\ \cosh\xi\cdot\cos\eta,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$h_1^2=h_2^2=h^2=\frac{1}{c^2(\cosh^2\xi-\cos^2\eta)}, \tag{18}$$

$$h_3^2=\frac{1}{c^2\sinh^2\xi\cdot\sin^2\eta} \tag{19}$$

が成立つ．

したがって，(7) 式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+(\coth^2\xi+\cot^2\eta)\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\coth\xi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\cot\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}+\frac{p^2c^2\phi}{V_p^2}(\cosh^2\xi-\cos^2\eta)=0 \tag{20}$$

となる．たゞし

$$V_p^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho} \tag{21}$$

$$\phi\propto e^{ipt} \tag{22}$$

とおいた．また，e^{ipt} という項は，今後，必要のないかぎり省略する．

(20) は次のようにして解ける．$\Xi\cdot\mathrm{H}\cdot\Phi$ をそれぞれ，ξ, η, φ だけの函数とし

$$\phi=\Xi\cdot\mathrm{H}\cdot\Phi \tag{23}$$

とおくと，(20) は変数分離の型となり容易に

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \tag{24}$$

$$\Xi''+\Xi'\coth\xi+(j^2c^2\cosh^2\xi-m^2\coth^2\xi+A)\Xi=0 \tag{25}$$

$$\mathrm{H}''+\mathrm{H}'\cot\eta-(j^2c^2\cos^2\eta+m^2\cot^2\eta+A)\mathrm{H}=0 \tag{26}$$

を得る．たゞし

$$j^2=\frac{p^2}{V_p^2} \tag{27}$$

で，$'$ は $\dfrac{d}{d\xi}$, $\dfrac{d}{d\eta}$, $\dfrac{d}{d\varphi}$ のいずれかを示す．

したがって

$$\Phi = {}^{\cos}_{\sin} m\varphi \tag{28}$$

$$\Xi = R_{ml}(cj,\ \cosh\xi) \tag{29}$$

$$\mathrm{H} = S_{ml}(cj,\ \cos\eta) \tag{30}$$

を得る．R, S は prolate spheroidal funciton[3]で，A および m は常数，A は separation constant b_l と

$$b_l = m^2 - A - m(m+1) = -A - m \tag{31}$$

なる関係にある．

m および l は 0, 1, 2, ………なる値をとりうる．

よって，A_{ml} を常数とすれば

$$\phi = \sum_{m,l=0}^{\infty} A_{ml} S_{ml}(cj,\ \cos\eta) R_{ml}(cj,\ \cosh\xi) {}^{\cos}_{\sin} m\varphi. \tag{32}$$

全く同様にして（8）の解は

$$\psi = \sum_{m,l=0}^{\infty} B_{ml} S_{ml}(ck,\ \cos\eta) R_{ml}(ck,\ \cosh\xi) {}^{\cos}_{\sin} m\varphi. \tag{33}$$

こゝに，$k^2 = \dfrac{p^2}{V_s^2} = \dfrac{\rho p^2}{\mu}$ である．

また，今後，Σ は必要のない限り省略する．

前節により容易に次の解を得る．たゞし，vector A としては (10) をとるものとする．

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= A_{ml} S_{ml} R'_{ml} \cdot h_1 {}^{\cos}_{\sin} m\varphi, \\ v_1 &= A_{ml} S'_{ml} R_{ml} \cdot h_2 {}^{\cos}_{\sin} m\varphi, \\ w_1 &= -A_{ml} S_{ml} R_{ml} \cdot m \cdot h_3 {}^{\sin}_{-\cos} m\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\Delta_1 = -A_{ml} S_{ml} R_{ml} \cdot j^2 {}^{\cos}_{\sin} m\varphi, \tag{35}$$

$$\varpi_{\alpha 1} = \varpi_{\beta 1} = \varpi_{\gamma 1} = 0. \tag{36}$$

suffix, 1, 2, 3 は，それのついている量がそれぞれ U_1, U_2, U_3 に対応することをしめしている．したがって，suffix 1 の式に含まれている prolate spheroidal functions と，suffix 2, 3 の式に含まれている prolate spheroidal functions とでは parameter が cj と ck だけ異なっていることに注意する．

また，

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= -B_{ml} c^2 mhh_3 \cdot \cos\eta \cdot \sin\eta \cdot R_{ml} S_{ml} {}^{\sin}_{-\cos} m\varphi, \\ v_2 &= -B_{ml} c^2 mhh_3 \cdot \cosh\xi \cdot \sinh\xi \cdot R_{ml} S_{ml} {}^{\sin}_{-\cos} m\varphi, \\ w_2 &= -B_{ml} c^2 h^2 (\cos\eta \cdot \sin\eta \cdot R'_{ml} S_{ml} + \cosh\xi \cdot \sinh\xi \cdot R_{ml} S'_{ml}) {}^{\cos}_{\sin} m\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\Delta_2 = 0, \tag{38}$$

$$\frac{2\varpi_{\alpha 2}}{B_{ml}}=\frac{u_3}{C_{ml}}=-c^2h^3\Big\{\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R_{ml}S_{ml}(k^2c^2\cos^2\eta+A-m^2\coth^2\xi)+\sin\eta\cdot\cos\eta\cdot R'_{ml}$$
$$\cdot S'_{ml}-2h^2c^2\cos\eta\cdot\sin\eta\cdot\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R_{ml}S'_{ml}+(2\cos^2\eta-\sin^2\eta-2h^2c^2\cdot$$
$$\cos^2\eta\cdot\sin^2\eta)R'_{ml}S_{ml}\Big\}{\cos \atop \sin}m\varphi, \tag{39}$$

$$\frac{2\varpi_{\beta 2}}{B_{ml}}=\frac{v_3}{C_{ml}}=-c^2h^3\Big\{\cos\eta\cdot\sin\eta\cdot R_{ml}S_{ml}(m^2\cot^2\eta+A+k^2c^2\cosh^2\xi)-\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R'_{ml}$$
$$S'_{ml}+2h^2c^2\cos\eta\cdot\sin\eta\cdot\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot S_{ml}R'_{ml}-(2\cosh^2\xi+\sinh^2\xi-2h^2c^2\cdot$$
$$\cosh^2\xi\cdot\sinh^2\xi)S'_{ml},R_{ml}\Big\}{\cos \atop \sin}m\varphi, \tag{40}$$

$$\frac{2\varpi_{\gamma 2}}{B_{ml}}=\frac{w_3}{C_{ml}}=c^2mh^2h_3\Big\{\cos\eta\cdot\sin\eta\cdot R_{ml}S'_{ml}-\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R'_{ml}S_{ml}$$
$$-(\sinh^2\xi+\sin^2\eta)R_{ml}S_{ml}\Big\}{\sin \atop -\cos}m\varphi, \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\varpi_{\alpha 3}&=-C_{ml}hh_3c^2mk^2\cos\eta\cdot\sin\eta\cdot R_{ml}S_{ml}{\sin \atop -\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\beta 3}&=-C_{ml}hh_3c^2mk^2\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R_{ml}S_{ml}{\sin \atop -\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\gamma 3}&=-C_{ml}h^2c^2k^2(\cos\eta\cdot\sin\eta R'_{ml}S_{ml}+\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R_{ml}S'_{ml}){\cos \atop \sin}m\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\Delta_3=0. \tag{43}$$

こゝに，A_{ml}，B_{ml}，C_{ml} は初期条件や境界条件から決められる常数である．

次に
$$c\to 0,\ \ \xi\to\infty,\ \ c\cosh\xi=c\sinh\xi=r \tag{44}$$
の場合，つまり，prolate spheroidal coordinates が spherical coordinates になった場合を考える．このときは容易に

$$\left.\begin{aligned}
S_{ml}&=P^{\,m}_{m+l}(\cos\eta),\\
R_{ml}&=\frac{1}{\sqrt{r}}Z_{l+m+1/2}(jr)
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

なることがわかる．Z は円筒函数である．

また，

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial r}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial r}=r\frac{\partial}{\partial r},\\
&h=\frac{1}{r},\qquad h_3=\frac{1}{r\sin\eta}
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

を考えると上に得た解 (34)～(43) 式は $n=l+m$ とおけば妹沢[4]の解に一致することが容易に確かめられる．たゞし，Z として Hankel の函数 $H^{(2)}$をとる．

次に (9) 式を採用した場合の解は次のようになる．たゞし(34)，(35)，(36)は前と同じである．

$$\left.\begin{aligned}
u_2&=-B'_{ml}cmhh_3\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot S_{ml}R_{ml}{\sin \atop -\cos}m\varphi,\\
v_2&=-B'_{ml}cmhh_3\sinh\xi\cdot\cos\eta\cdot S_{ml}R_{ml}{\sin \atop -\cos}m\varphi,\\
w_2&=-B'_{ml}ch^2[\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot S_{ml}R'_{ml}+\sinh\xi\cdot\cos\eta\cdot R_{ml}S'_{ml}]{\cos \atop \sin}m\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\Delta_2=0, \tag{48}$$

$$\frac{2\varpi_{\alpha 2}}{B'_{ml}}=\frac{u_3}{C'_{ml}}=ch^3\Big[m^2\frac{h_3^2}{h^2}\sinh\xi\cdot\cos\eta\cdot R_{ml}S_{ml}-R'_{ml}\cosh\xi\Big(S'_{ml}\sin\eta+S_{ml}\cos\eta+S_{ml}\sin\eta$$
$$(\cot\eta-2h^2c^2\cos\eta\cdot\sin\eta)\Big)-R_{ml}\sinh\xi\Big(S''_{ml}\cos\eta-S'_{ml}\sin\eta+S'_{ml}\cos\eta\,(\cot\eta$$
$$-2h^2c^2\cos\eta\cdot\sin\eta)\Big)\Big]{\cos \atop \sin}m\varphi, \tag{49}$$

$$\frac{2\varpi_{\beta 2}}{B'_{ml}}=\frac{v_3}{C'_{ml}}=ch^3\Big[-m^2\frac{h_3^2}{h^2}\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot R_{ml}S_{ml}+S_{ml}\sin\eta\Big(R''_{ml}\cosh\xi+R'_{ml}\sinh\xi$$
$$+R'_{ml}\cosh\xi\,(\coth\xi-2h^2c^2\cosh\xi\cdot\sinh\xi)\Big)+S'_{ml}\cos\eta\Big(R'_{ml}\sinh\xi+R_{ml}\cosh\xi$$
$$+R_{ml}\sinh\xi(\coth\xi-2h^2c^2\cosh\xi\cdot\sinh\xi)\Big)\Big]{\cos \atop \sin}m\varphi, \tag{50}$$

$$\frac{2\varpi_{\gamma 2}}{B'_{ml}}=\frac{w_3}{C'_{ml}}=cmh^2h_3\Big[\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot R_{ml}S'_{ml}-\sinh\xi\cdot\cos\eta\cdot R'_{ml}S_{ml}\Big]{\sin \atop -\cos}m\varphi, \tag{51}$$

$$\Delta_3=0, \tag{52}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\varpi_{\alpha 3}&=-C'_{ml}\,cmhh_3k^2\cosh\xi\cdot\sin\eta\,R_{ml}\,S_{ml}{\sin \atop -\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\beta 3}&=-C'_{ml}\,cmhh_3k^2\sinh\xi\cdot\cos\eta\cdot R_{ml}\,S_{ml}{\sin \atop -\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\gamma 3}&=-C'_{ml}\,ch^2k^2[\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot R'_{ml}\,S_{ml}+\sinh\xi\cdot\cos\eta R_{ml}\,S'_{ml}]{\cos \atop \sin}m\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

U_2, U_3として(37)～(43)，あるいは(47)～(53)のふたつを得た．Vector Aのとりかたで，このほかにもいくつかの解が得られるはずであり，数学的には，それらがお互いに同等であるかないか調べる必要がある．しかし，われわれは，いろいろな解のうちから最も問題につごうのよい解を使えばよいのであって，普通の目的には(10)に対応する解があれば十分だろう．

なお，(34)～(43)，(47)～(53)式が(15)式を満たすことは，直接代入すれば容易に験証できる．

§ 3. Oblate spheroidal coordinatesの場合

このとき

$$\left.\begin{aligned}
x&=c\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot\cos\varphi,\\
y&=c\cosh\xi\cdot\sin\eta\cdot\sin\varphi,\\
z&=c\sinh\xi\cdot\cos\eta,
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned}
h_1^2&=h_2^2=h^2=1/c^2(\cosh^2\xi-\sin^2\eta),\\
h_3^2&=1/c^2\cosh^2\xi\cdot\sin^2\eta.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

prolateの場合とoblateの場合の違いはすべて(17)式と(54)式の違いから生れてくる．しかも，(17)式に

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{prolate} & \text{oblate} \\
c & -ic' \\
\cosh\xi & i\sinh\xi' \\
\sinh\xi & i\cosh\xi'
\end{array}\right\} \qquad (56)
$$

なる変換をして後に，c'，ξ' をあらためて c，ξ とおくと (54) 式を得る．したがって，前節に得た結果に変換 (56) を行うと自動的に oblate の場合の解を得る．

$$
\left.\begin{aligned}
\phi &= \sum_{m,l=0}^{\infty} A_{ml}\, S_{ml}(-icj,\ \cos\eta) R_{ml}\ (-icj,\ i\sinh\xi) {\cos \atop \sin} m\varphi, \\
\psi &= \sum_{m,l=0}^{\infty} B_{ml}\, S_{ml}(-ick,\ \cos\eta) R_{ml}\ (-ick,\ i\sinh\xi) {\cos \atop \sin} m\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (57)
$$

となる．こゝに S_{ml}, R_{ml} は oblate spheroidal function[5] である．これを使うと

$$
\left.\begin{aligned}
u_1 &= A_{ml} h_1 S_{ml}\ R'_{ml} {\cos \atop \sin} m\varphi, \\
v_1 &= A_{ml} h_2 S'_{ml}\ R_{ml} {\cos \atop \sin} m\varphi, \\
w_1 &= -A_{ml} h_3 S_{ml}\ R_{ml} \cdot m {\sin \atop -\cos} m\varphi,
\end{aligned}\right\} \qquad (58)
$$

$$
\Delta_1 = -A_{ml} \cdot j^2 \cdot S_{ml}\, R_{ml} {\cos \atop \sin} m\varphi, \qquad (59)
$$

$$
\varpi_{\alpha 1} = \varpi_{\beta 1} = \varpi_{\gamma 1} = 0. \qquad (60)
$$

(10) 式から得られる U_2，U_3 は

$$
\left.\begin{aligned}
u_2 &= B_{ml} c^2 m h h_3 \cos\eta \cdot \sin\eta \cdot R_{ml}\ S_{ml} {\sin \atop -\cos} m\varphi, \\
v_2 &= -B_{ml} c^2 m h h_2 \sinh\xi \cdot \cosh\xi \cdot R_{ml}\ S_{ml} {\sin \atop -\cos} m\varphi, \\
w_2 &= B_{ml} c^2 h^2 [\cos\eta \cdot \sin\eta \cdot R'_{ml} \cdot S_{ml} - \cosh\xi \cdot \sinh\xi \cdot R_{ml}\, S'_{ml}] {\cos \atop \sin} m\varphi,
\end{aligned}\right\} \qquad (61)
$$

$$
\Delta_2 = 0, \qquad (62)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{2\varpi_{\alpha 2}}{B_{ml}} = \frac{u_3}{C_{ml}} &= c^2 h^3 {\cos \atop \sin} m\varphi \Big(-\cosh\xi \cdot \sinh\xi \cdot R_{ml}\, S_{ml} (-k^2 c^2 \cos^2\eta + A - m^2 \tanh^2\xi) \\
&\quad + \sin\eta \cdot \cos\eta \cdot R'_{ml}\, S'_{ml} - 2h^2 c^2 \cos\eta \cdot \sin\eta \cdot \cosh\xi \cdot \sinh\xi \cdot R_{ml}\, S'_{ml} \\
&\quad + R'_{ml}\, S_{ml} (2\cos^2\eta - \sin^2\eta + 2h^2 c^2 \cos^2\eta \cdot \sin^2\eta) \Big), \\
\frac{2\varpi_{\beta 2}}{B_{ml}} = \frac{v_3}{C_{ml}} &= c^2 h^3 {\cos \atop \sin} m\varphi \Big(\cos\eta \cdot \sin\eta \cdot R_{ml}\, S_{ml} (m^2 \cot^2\eta + k^2 c^2 \sinh^2\xi + A) + \cosh\xi \cdot \\
&\quad \sinh\xi \cdot R'_{ml}\, S'_{ml} + 2h^2 c^2 \cos\eta \cdot \sin\eta \cdot \cosh\xi \cdot \sinh\xi \cdot S_{ml}\, R'_{ml} - S'_{ml} R_{ml} \\
&\quad (-2\sinh^2\xi - \cosh^2\xi + 2h^2 c^2 \cosh^2\xi \cdot \sinh^2\xi) \Big), \\
\frac{2\varpi_{\gamma 2}}{B_{ml}} = \frac{w_3}{C_{ml}} &= -c^2 m h^2 h_3 {\sin \atop -\cos} m\varphi \Big(\cos\eta \cdot \sin\eta R_{ml}\, S'_{ml} + \cosh\xi \cdot \sinh\xi\, R'_{ml}\, S_{ml} \\
&\quad - R_{ml}\, S_{ml}\ (\sin^2\eta - \cosh^2\xi) \Big),
\end{aligned}\right\} \qquad (63)
$$

$$\left.\begin{aligned}
2\varpi_{\alpha 3}&=C_{ml}c^2mhh_3\cdot k^2\cos\eta\cdot\sin\eta R_{ml}\,S_{ml}{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\beta 3}&=-C_{ml}c^2mhh_3\cdot k^2\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R_{ml}S_{ml}{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\gamma 3}&=C_{ml}c^2h^2k^2{}^{\cos}_{\sin}m\varphi[\cos\eta\cdot\sin\eta\cdot R'_{ml}\,S_{ml}-\cosh\xi\cdot\sinh\xi\cdot R_{ml}\cdot S'_{ml}],
\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

$$\Delta_3=0. \quad (65)$$

前節と同様に oblate spheroidal coordinates が spherical coordinates になった場合を考えると，(44)，(45)，(46) 式がそのまゝ，この場合にも成り立って，結局，(58)～(65) は妹沢の式[6]と一致することがすぐわかる．

また，(9)から得られる U_2，U_3 は

$$\left.\begin{aligned}
u_2&=-B'_{ml}\,cmhh_3\sinh\xi\cdot\sin\eta\cdot S_{ml}\,R_{ml}{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi,\\
v_2&=-B'_{ml}\,cmhh_3\cosh\xi\cdot\cos\eta\cdot S_{ml}\,R_{ml}{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi,\\
w_2&=-B'_{ml}ch^2[\sinh\xi\cdot\sin\eta\cdot S_{ml}\,R'_{ml}+\cosh\xi\cdot\cos\eta\cdot R_{ml}\,S'_{ml}]{}^{\cos}_{\sin}m\varphi,
\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

$$\Delta_2=0, \quad (67)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\varpi_{\alpha 2}}{B'_{ml}}&=\frac{u_3}{C'_{ml}}=ch^3{}^{\cos}_{\sin}m\varphi\Big[m^2\frac{h_3^2}{h^2}R_{ml}\,S_{ml}\cdot\cosh\xi\cdot\cos\eta-R'_{ml}\sinh\xi\Big(S'_{ml}\sin\eta\\
&\quad+S_{ml}\cos\eta+S_{ml}\sin\eta\,(\cot\eta+2h^2c^2\cos\eta\cdot\sin\eta)\Big)-R_{ml}\cosh\xi\\
&\quad\Big(S''_{ml}\cos\eta-S'_{ml}\sin\eta+S'_{ml}\cos\eta\,(\cot\eta+2h^2c^2\cos\eta\cdot\sin\eta)\Big)\Big],\\
\frac{2\varpi_{\beta 2}}{B'_{ml}}&=\frac{v_3}{C'_{ml}}=ch^3{}^{\cos}_{\sin}m\varphi\Big[-m^2\frac{h_3^2}{h^2}R_{ml}\,S_{ml}\cdot\sinh\xi\cdot\sin\eta+S_{ml}\sin\eta\Big(R''_{ml}\sinh\xi\\
&\quad+R'_{ml}\cosh\xi+R'_{ml}\sinh\xi\,(\tanh\xi-2h^2c^2\cosh\eta\cdot\sinh\xi)\Big)+S'_{ml}\cos\eta\\
&\quad\Big(R'_{ml}\cosh\xi+R_{ml}\sinh\xi+R_{ml}\cosh\xi\,(\tanh\xi-2h^2c^2\cosh\xi\cdot\sinh\xi)\Big)\Big]\\
\frac{2\varpi_{\gamma 2}}{B'_{ml}}&=\frac{w_3}{C'_{ml}}=cmh^2h_3{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi\Big[\sinh\xi\cdot\sin\eta\,R_{ml}\,S'_{ml}-\cosh\xi\cdot\cos\eta\,R'_{ml}\,S_{ml}\Big],
\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

$$\Delta_3=0, \quad (69)$$

$$\left.\begin{aligned}
2\varpi_{\alpha 3}&=-C'_{ml}cmhh_3\cdot k^2\sinh\xi\cdot\sin\eta\cdot R_{ml}\,S_{ml}{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\beta 3}&=-C'_{ml}cmhh_3\cdot k^2\cosh\xi\cdot\cos\eta\cdot R_{ml}\,S_{ml}{}^{\sin}_{-\cos}m\varphi,\\
2\varpi_{\gamma 3}&=-C'_{ml}ch^2k^2[\sinh\xi\cdot\sin\eta\cdot R'_{ml}\,S_{ml}+\cosh\xi\cdot\cos\eta\cdot R_{ml}\,S'_{ml}]{}^{\cos}_{\sin}m\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(70)$$

いうまでもないが，(58)，(59)，(60) 式の R_{ml}，S_{ml} の parameter は $-icj$，(61)～(70) 式の R_{ml}，S_{ml} の parameter は $-ick$ である．

References

1) H. Takeuchi; General Solutions of Equations of some Geophysical Importance. (in Japanese). Zisin 2nd series, **9** (1957) No. 4, p. 189.

2) loc, cit. 1).

3) J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, R. A. Hunter; Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, (1941), Wiley, New York.

4) K. Sezawa; Dilatational and Distortional Waves generated from a Cylindrical or a Spherical Origin, B. E. R. I. **2** (1927), 13～20.

5) loc. cit. 3).

6) loc. cit. 4).