

# 軸方向の圧縮荷重を負っている Flexure pivot をもつ倒立振り子の運動\*

樋口長太郎\*\*

550.341:534.647

## On a Motion of Inverted Pendulum with Flexure Pivot under Axial Compression Load

T. Higuti

(Meteorological Research Institute)

In an inverted pendulum with flexure pivot under axial compression load, the distance  $L$  between center of gravity and suspension point, and the natural period  $T_0$  were calculated, as follows;

$$1) \quad L = \frac{1}{2} [-D \pm \sqrt{D^2 + 4\rho^2}],$$

$$D = \frac{N}{N+B(\varepsilon+1)} \left( h + l - \frac{\tan kl}{k} + \frac{B}{N} h(\varepsilon+1)^2 - \frac{N+B}{N} \frac{\rho^2}{h} \right),$$

where

$\rho$ : radius of gyration about center of gravity of stiff member,

$h$ : distance between center of gravity of stiff member and clamping point of flexure pivot,

$l$ : length of flexure pivot,

$B$ : flexure rigidity of flexure pivot,

$$k = \sqrt{\frac{Mg}{B}},$$

$M$ : mass of stiff member,

$g$ : acceleration of gravity,

$$\varepsilon+1 = \sec kl,$$

$$N = Mgh \frac{\tan kl}{k} + B,$$

and

$$2) \quad T_0 = 2\pi k \sqrt{\frac{\rho^2 + L(h + \frac{l}{2})}{g(\frac{1}{l} - k^2 h)}},$$

where

$$\tan kl = kl,$$

$$\sec kl = 1 + 1/2(kl)^2.$$

\* Received June 9, 1957.

\*\* 気象研究所地震研究部

## 1. まえがき

弾性金属板を振り子の支点に使う場合、工学関係者はこれを **Flexure pivot** とよんでいる。この pivot をもつ振り子のうち、ヴィーヘルト水平動地震計のように pivot に軸方向の引張荷重がかかる場合の運動の理論はすでに発表されているが<sup>1)</sup>、石本加速度地震計のような圧縮荷重のものについて論じたものはまだ見あたらないようであるので、これについて一応の見とおしをつけておきたいと考え、調べてみることにした。

## § 2. 軸方向の圧縮荷重を負っている Flexure pivot をもつ倒立振り子の運動

Fig. 1 に示されるように、重心 G をもつ剛体の一端 A に弾性金属板をつかませ、板の他端を固定架の O 点につかんで構成される倒立振り子の自由振動について調べよう。

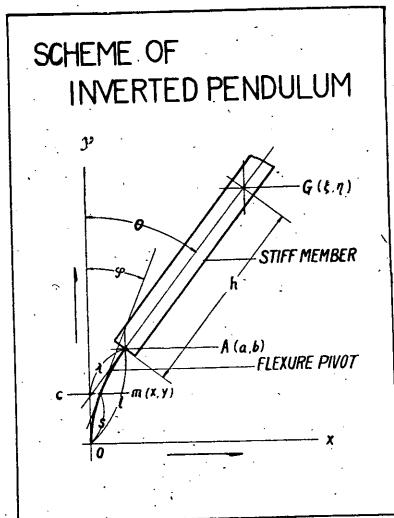


Fig. 1

剛体は A 点を pivot に対して  $(\pm X), (-Y)$  なる一つ

ることとしよう。するとその運動式は

三

$M$ : 剛体の質量,

$I_0$ : 剛体の重心の周りの慣性モーメント,

1) 松沢武雄：回転軸にうすい板ばねを使った振子の運動，地震，8，No. 4.

$h$ : 剛体の AG 間の距離,

$\xi, \eta$ : 刚体の重心の座標,

$g$ : 重力加速度.

A 点の座標を  $(a, b)$  とする

$$\begin{aligned}\xi &= a + h \sin \theta, & \eta &= b + h \cos \theta, \\ \dot{\xi} &= \dot{a} + h \cos \theta \cdot \dot{\theta}, & \dot{\eta} &= \dot{b} - h \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \\ \ddot{\xi} &= \ddot{a} + h(\cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2), & \ddot{\eta} &= \ddot{b} - h(\sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2).\end{aligned}$$

これらの関係を (1) 式に入れかきなおすと

۱۷۸

$I = I_0 + Mh^2$ : 剛体の A 点の周りの慣性モーメント

となり、この式は剛体の A 点についての運動に対応するものである。

つぎに pivot は A 点に剛体から力をうけ、その点のたわみが  $a$  となってつりあっているとして、その弾性線の方程式は、任意の点  $m(x, y)$  の曲率がその点に作用する外力のモーメントの総和に比例することから、 $m$  点の接線が  $Oy$  軸となす角を  $\varphi$ 、弧  $Om$  の長さを  $s$  とすると

となるであろう。ここに、 $B$  は比例定数で板の幅が  $w$ 、厚さが  $e$ 、材質の弾性率を  $E$  とすれば

$$B = E \frac{we^3}{12}$$

で表わされる。

ここで、あつかう振り子のふれの角  $\theta$  は極めて小さいとし

$$\sin \theta = \theta, \quad \sin \varphi = \varphi, \quad \cos \theta = 1, \quad \cos \varphi = 1$$

とおくことにする

(3) 式を解くためにこれを微分

$dx = \varphi ds$ ,  $dy = ds$  の関係を入れると

この式の一般解は

- 1 -

$$k = \sqrt{\frac{Y}{B}},$$

$P, Q$ : 積分定数.

積分定数  $P, Q$  は pivot の両端のつかみの条件からきまる。

$$\text{i. } s=0, \quad \varphi=0$$

この条件を (5) 式に入れると定数  $Q$  は

$$Q = \frac{X}{Y}$$

となる。

$$\text{ii. } s=l, \quad x=a, \quad y=b,$$

この条件を(3)式に入れて

$$\left( \frac{d\varphi}{ds} \right)_{s=t} = \frac{C}{B}. \quad (\text{a})$$

(5) 式を微分して

(a), (b) 式から定数  $P$  は

$$P = \frac{\frac{C}{B} + Qk \sin kl}{k \cos kl} = \frac{C + \frac{X}{Y} B k \sin kl}{B k \cos kl}$$

となる。したがって、 $\varphi$  の解は

また、 $m$  点の座標  $(x, y)$  は

$$x = \int_0^s \varphi ds = \frac{C + \frac{X}{Y} B k \sin kl}{B k^2 \cos kl} (1 - \cos ks) + \frac{X}{Y} \left( \frac{\sin ks}{k} - s \right), \quad \dots (7)$$

(6), (7) および (8) 式について A 点では

$s=l$ ,  $\varphi=\theta$ ,  $x=a$ ,  $y=b$  であるから

$$(\varphi)_{s=1} = \theta = \frac{C + \frac{X}{Y} B k \sin kl}{B k \cos kl} \sin kl + \frac{X}{Y} (\cos kl - 1), \dots \dots \dots (9)$$

$$(x)_{s=l} = \dot{a} = \frac{C + \frac{X}{Y} B k \sin kl}{B k^2 \cos kl} (1 - \cos kl) + \frac{X}{Y} \left( \frac{\sin kl}{k} - l \right), \quad \dots \quad (10)$$

(9) 式から  $C$  をひきだすと

(10) 式の  $C$  の値に (12) 式の右辺を代入しかきなおすと

そこで、これら pivot に関する (12) および (13) 式と剛体に関する (2) 式とを結びつければ、振り子の運動方程式を  $\theta$  の関数としてあらわされる。いまは、 $\theta$  が小さいとしたのであるから (2) 式を簡単な形になおすと

また、pivot の長さ  $l$  は剛体の AG の距離  $h$  にくらべて小さいと仮定する。したがって

$$a < h\theta, \quad \ddot{a} < h\ddot{\theta}.$$

ゆえに  $a$  を省略することとし

これを (12) 式に入れると

また、(13) 式は

そこで、(14), (16) および (17') 式とで振り子の運動方程式を立てると

$$C = -(I\ddot{\theta} + Mh\ddot{a} - Mgh\theta) = \frac{h}{g}Bk \tan \frac{kl}{2} \cdot \dot{\theta} + Bk \cot kl \cdot \theta,$$

$$I\ddot{\theta} + Mh\dot{a} + \frac{h}{g}Bk \tan \frac{kl}{2} \cdot \dot{\theta} + (Bk \cot kl - Mgh)\theta = 0,$$

$$\frac{Mh^2}{g} \left( l - \frac{2}{k} \tan \frac{kl}{2} \right) \dot{\theta} + \left[ M \left( \rho^2 + h^2 + \frac{h}{k} \tan \frac{kl}{2} \right) + \frac{1}{k} \tan \frac{kl}{2} \right] \ddot{\theta} + (Bk \cot kl - Mgh)\theta = 0. \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

ここに、 $I = M(\rho^2 + h^2)$ ,  $\rho$ : 剛体の重心の周りの回転半径となる。

すなわち、この形式の振り子の自由振動は、剛体と pivot との連成である。

ここで  $kl$  の値は実際には

$$0 < kl < 1$$

の範囲であることから上式中  $\tan \frac{kl}{2}$  について、

$$\tan \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2},$$

$$l - \frac{2}{k} \tan \frac{kl}{2} = 0$$

とおかれると  $\theta^{(4)}$  の項は消え次のようになる。

しかし、いまの場合は *pivot* 自身の振動は極めて速やかに減衰すると考えてよいから、運動は単純な調和的なものであると仮定して議論を進めることにする。

### § 3. 振り子の支点

われわれはこの形式の振り子を地震計に採用する場合に、ある定まった点（実際は軸）の周りを回転振動すると規定している。たとえば Fig. 1 では直線 AG の延長が  $Oy$  軸と交わる点 c が支点になると考える。したがって、運動は調和的な法則に従うであろう。ゆえに

$$\theta = \theta_0 \cos nt$$

ここに  $\theta_0$ : 角振幅,  $n$ : 円振動数.

また、pivot の上端 (A 点) のたわみ  $a$  も

$$a = a_0 \cos nt,$$

ここに、 $a_0$  は  $\theta_0$  のときのたわみ

となるであろう。そこで、

$$\frac{a}{\theta} = \frac{a_0}{\theta_0} = \text{定数}$$

の関係がみちびかれる。

この定数は  $Ac$  の距離に相当するから振り子の支点と重心との距離  $Gc=L$  は

ここに  $\lambda : \mathbf{Ac}$  の距離

となる。

この  $\lambda$  の値は振り子の性能に大きな影響をもち、この論文の主旨はこれについて検討するものである。そこでこれを計算により求めてみることにしよう。

前述の関係から、 $a = \lambda\theta$  におけるから (14) 式を書きなおすと

また、(15) および (12) 式は

そこで、(20) および (22) から立てられる振り子の運動式は

$$M\Box \rho^2 + h(h+\lambda)\Box \dot{\theta} + \frac{h+\lambda}{g} Bk \tan \frac{kl}{2} \cdot \ddot{\theta} + (Bk \cot kl - Mgh) \theta = 0,$$

$$\frac{1}{g} \left[ Mg \frac{\tan kl}{Bk} \rho^2 + L \left( Mgh \frac{\tan kl}{Bk} + \sec kl - 1 \right) \right] \dot{\theta} + \left( 1 - Mg h \frac{\tan kl}{Bk} \right) \theta = 0.$$

この式で

$$N = Mgh \frac{\tan kl}{k} - B,$$

$$\varepsilon = \sec kl - 1$$

とおくと

となる。また、この系の円振動数の二乗  $n_1^2$  は

$$n_1^2 = -\frac{1}{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{N}{B} - \frac{1}{g} \left[ \frac{N+B}{Bh} \rho^2 + L \left( \frac{N+B}{B} + \varepsilon \right) \right] \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

となる。

つぎにもう一つ運動式を pivot のたわみ  $a$  と剛体の運動とを関係づけて立てよう。

(10) 式の右辺の  $C$  に (20) 式の関係を入れると

$$a = \lambda\theta = \frac{-M[\rho^2 + h(h+\lambda)]\ddot{\theta} + Mgh\theta - \frac{h+\lambda}{g}Bk \sin kl}{Bk^2 \cos kl} (1 - \cos kl) - \frac{h+\lambda}{g} \left( \frac{\sin kl}{k} - l \right) \ddot{\theta},$$

$$\left[ \left\{ M \left( \rho^2 + h(h+\lambda) \right) + \frac{h+\lambda}{g} B k \sin kl \right\} (1 - \cos kl) + \frac{h+\lambda}{g} B k^2 \cos kl \left( \frac{\sin kl}{k} - l \right) \right] \ddot{\theta}$$

$$+ [Bk^2 \cos kl \cdot \lambda - Mgh(1 - \cos kl)]\theta = 0,$$

$$\frac{1}{g} \left[ \varepsilon \rho^2 + L \left( \varepsilon h + \frac{\tan kl}{k} - l \right) \right] \ddot{\theta} + (L - \varepsilon h - h) \dot{\theta} = 0, \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

さてここで、 $n_1^2$  と  $n_2^2$  とはいずれも同じ振動系について求めた値であるから

$$n_2^2 - n_1^2 = \frac{L - \varepsilon h - h}{g \left[ \varepsilon \rho^2 + L \left( \varepsilon h + \frac{\tan kl}{k} - l \right) \right]} + \frac{\frac{N}{B}}{g \left[ \frac{N+B}{Bh} \rho^2 + L \left( \frac{N+B}{B} + \varepsilon \right) \right]} = 0. \quad \dots \dots \dots (27)$$

とおけるであろう。この式を通分整理すると次のような  $L$  の二次式ができる。

$$L^2 - L \frac{N}{N+B(\varepsilon+1)} \left( h + l - \frac{\tan kl}{k} + \frac{B}{N} h (\varepsilon+1)^2 - \frac{N+B}{N} \frac{\rho^2}{h} \right) - \rho^2 = 0. \quad (28)$$

これから

$$\text{ここに } D = -\frac{N}{N+B(\varepsilon+1)} \left( h + l - \frac{\tan kl}{k} + \frac{B}{N} h (\varepsilon+1)^2 - \frac{N+B}{N} \cdot \frac{\rho^2}{h} \right)$$

となり、 $L$  の値がわかれば  $\lambda = L - h$  の値が求められる。

ここで特別な場合として、(2) 式につき

$Y=0$ ,  $I/M=0$ ,  $C=0$  とおけば

$$L = \lambda = \frac{2}{3}l$$

となるから文献<sup>2)</sup>に示されるとおりになる。

しかし一般には

2) 萩原尊礼：振動測定（昭和 20 年版），121-122.

$$\lambda = F(\rho, h, l, k)$$

の形になっているからそれぞれの変数を定めないと求めることができないが、 $\lambda$  と  $l$  との比は (28) 式について

$$\rho^2/L^2, \rho^2/h^2 \ll 1 \text{ として省略し,}$$

$$\text{また, } \tan kl = kl + \frac{1}{3}(kl)^2, \sec kl = 1 + \frac{1}{2}(kl)^2$$

とおくと次のようになる。

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{2 + (kl)^2}{4 \left[ 1 + \frac{1}{3}(kl)^2 + \frac{1}{2} \frac{l}{h} \right]} - \frac{\left( 1 + \frac{1}{3}(kl)^2 \right)(kl)^2 - \frac{l}{h}}{3 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{l}{h} \right) + (kl)^2}. \quad \dots \dots \dots (30)$$

この式を使って  $l/h$  の値が 1, 5, 10 の場合

について  $kl$  と  $\lambda/l$  との関係を図示すると Fig.

2 のようになるが、この図でわかるようにこの形式の振り子の  $\lambda$  の値は一般に  $kl$  の値が大きくなるほど小さくなる傾向をもっている。

#### § 4. 振り子の固有周期

この形式の振り子の固有周期  $T_0$  は

(23) 式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{Mg \cdot \tan kl}{Bk} \rho^2 + L \left( Mgh \frac{\tan kl}{Bk} + \varepsilon \right) \\ &= \frac{g \left( 1 - Mgh \frac{\tan kl}{Bk} \right)}{B \left( \frac{1}{l} - Mgh \right)} \\ &= \frac{M \left[ \rho^2 + L \left( h + \frac{l}{2} \right) \right]}{\frac{B}{l} - Mgh}, \end{aligned}$$

ここに  $\tan kl = kl$ ,

$$\varepsilon = \sec kl - 1 = \frac{1}{2}(kl)^2.$$

ゆえに

$$T_0 = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{M \left[ \rho^2 + L \left( h + \frac{l}{2} \right) \right]}{\frac{B}{l} - Mgh}} = 2\pi k \sqrt{\frac{\rho^2 + L \left( h + \frac{l}{2} \right)}{g \left( \frac{1}{l} - k^2 h \right)}} \quad \dots \dots \dots (31)$$

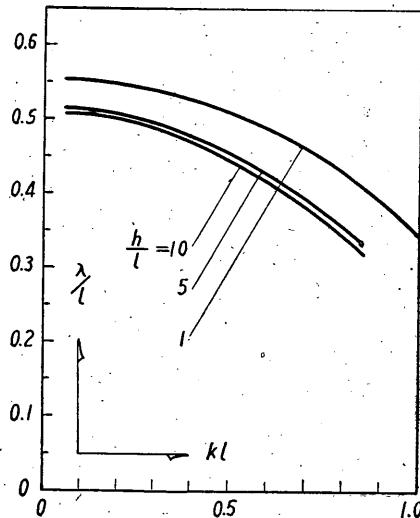


Fig. 2

となる。ここに、 $h$  は AG の距離であることに注意されたい。

### § 5. 実例

ここに述べた理論を、発表されている資料に適用して、 $L$ 、 $\lambda$  および  $T_0$  の値と計算してみよう。

資料（石本加速度地震計（水平成分））

$$\begin{aligned} M = 16/2 \text{ kg} &= 8 \times 10^3 \text{ gr.} & w &= 1.5 \text{ cm} \\ h &= 8.6 \text{ cm}, & e^3 &= 2.7 \times 10^{-2} \text{ cm}^3, \\ \rho^2 &= 8.82 \text{ cm}^2, & E &= 21 \times 10^{11} \text{ CGS (鋼),} \\ l &= 2.1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

### 計算

#### 1) $L$ および $\lambda$ の値

$$h + \lambda = L = \frac{1}{2} [-D + \sqrt{D^2 + 4\rho^2}],$$

$$D = -\frac{N}{N+B(\varepsilon+1)} \left( h + l - \frac{\tan kl}{k} + \frac{B}{N} h (\varepsilon+1)^2 - \frac{N+B}{N} \frac{\rho^2}{h} \right).$$

$Y=Mg$	$B=E(we^3/12)$	$k^2=Y/B$	$k$	$kl$	$\tan kl$
$7.840 \times 10^6$	$7.0875 \times 10^9$	$1.1062 \times 10^{-3}$	$3.327 \times 10^{-2}$	$6.9846 \times 10^{-2}$	$6.9960 \times 10^{-2}$

$\tan kl/k$	$\varepsilon+1=\sec kl$	$(\varepsilon+1)^2$	$(Mgh \tan kl)/k=N+B$	$N$
2.1034	1.0024	1.0048	$1.4181 \times 10^9$	$-(69.457 \times 10^8)$

$N+B(\varepsilon+1)$	$N/\{N+B(\varepsilon+1)\}$	$B/N$	$(B/N)h(\varepsilon+1)^2$	$(N+B)/N$	$\{(N+B)/N\}\rho^2/h$
$1.5881 \times 10^8$	43.736	$-(1.0204)$	-8.8175	$-(2.0417 \times 10^{-2})$	$-(2.094 \times 10^{-2})$

$$D = -(8.7691), \quad L = 9.681 \text{ cm}, \quad \lambda = 1.08 \text{ cm}$$

#### 2) $T_0$ の値

$$T_0 = 2\pi k \sqrt{\frac{\rho^2 + L \left( h + \frac{l}{2} \right)}{g \left( \frac{1}{l} - k^2 h \right)}},$$

$$\rho^2 + L \left( h + \frac{l}{2} \right) = 102.24, \quad g \left( \frac{1}{l} - k^2 h \right) = 457.27,$$

$$\sqrt{\frac{\rho^2 + L\left(h + \frac{l}{2}\right)}{g\left(\frac{1}{l} - k^2 h\right)}} = 46.29 \times 10^{-2}, \quad 2\pi k = 20.898,$$

$$T_0 = 0.0967 \text{ sec.}$$

なお、この例で、 $\lambda(h)$  を計算してみると  $h=4.2 \text{ cm}$  (重錘の半径) のとき  $\lambda=1.09 \text{ cm}$ ,  $h=18 \text{ cm}$  のとき  $\lambda=1.06 \text{ cm}$  で、その差はわずかに  $0.03 \text{ cm}$  程度であるが  $h/l$  の値が大きくなるにつれて  $\lambda$  の値は小さくなる傾向にある。

## § 6. む す び

この調べを行った動機は、この形式のある機械的記録式地震計について、その幾何倍率の計算値と基本倍率の実測値との間に意外に大きなへだたりのあることに不審をいたいたことである。

この理論から、この形式の振り子の見かけ上の支点は pivot のある点に固定されられるものでないということがいえるであろう。

この理論のうらづけはもちろん実験にまつべきであるが、現在の市販品は工作事情の点で供試用に不適格であるので、後日理想に近いものを作つてから行うこととする。

拡大てこの配置が振り子の支点の位置によって倍率に変化と非対称を生ずるような機構の地震計については、一応検討する要があると思う。

この研究は Flexure pivot につき、常に関心をもたれている広野前地震研究部長の理解と寛容のもとに行つた。また、井上現部長にはこの稿の校閲をお願いした。筆をおくにあたり両先生の御厚志に対し感謝の意を表します。