球状障害群の弾性波に及ぼす影響について (III)*

山　川　宜　男**

550.341

Investigation of the Disturbance by Spherical Obstacles on the Elastic Waves (III)

N. Yamakawa

(*Training School for Meteorological Observer*)

From the results obtained in the preceding papers, the energy in P waves scattered in unit time by a spherical obstacle, is given by

$$E_P=\frac{4\pi^3\rho h^4a^6A^2}{T^2}\left[2B_0^2+\frac{2}{3}B_1^2+\frac{2}{5}B_2^2\right]v_P.$$

Similarly the energy in scattered S waves, is given by

$$E_S=\frac{4\pi^3\rho k^4a^6A^2}{T^2}\left[\frac{4}{3}B_1^2+\frac{3}{5}\left(\frac{k}{h}\right)^2B_2^2\right]v_S.$$

From these results, the decrease of the intensity of plane P waves which pass through the small distance dx in the medium which has N spherical obstacles in a unit volume, is given by

$$-dI=I(2\pi a^6h^4N)\left[2B_0^2+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\frac{k^3}{h^3}\right)B_1^2+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\frac{k^5}{h^5}\right)B_2^2\right]dx.$$

Therefore, the intensity is given by

$$I=I_0\exp\left\{-2\pi a^6h^4N\left[2B_0^2+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\frac{k^3}{h^3}\right)B_1^2+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\frac{k^5}{h^5}\right)B_2^2\right]x\right\},$$

where I_0 is a constant which indicates the intensity of plane P waves at the standard point.

§ 5. 一つの障害球によって散乱されるエネルギー***

今までに得られた結果を整理すると，平面 P 波

$$u_x=A\,e^{i(hx-pt)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

が，その波長より十分小さい半径 a の球障害によって散乱されるとき，散乱源から十分離れた点における散乱波は，障害球の中心を原点とした球座標により P 波として

$$u=\frac{h^2a^3A}{r}\left[B_0-B_1\cos\theta-\frac{B_2}{4}(3\cos 2\theta+1)\right]e^{i(hr-pt)},\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

* Received March 15, 1957.

** 気象庁研修所

*** 験震時報 **21** No. 1, 2 参照

S 波として

$$v=\frac{k^2a^3A}{r}\left[B_1\sin\theta+\frac{3}{4}\left(\frac{k}{h}\right)B_2\sin 2\theta\right]e^{i(kr-pt)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.3)$$

で与えられる．ここに，u, v は，それぞれ変位の r, θ 成分であり，B_i は前論文（I）におけるものと異なり，（I）の (3.31) で与えられた $\overline{B_i}$ を A で除したもので，$B_i=f_i(\lambda,\mu,\rho,\lambda',\mu',\rho')$ なる係数である．特に，$\lambda=\mu$, $\lambda=\mu'$ のときは（II）における (4.3) から，直ちに，次のように得られる．

$$\left.\begin{aligned}B_0&=\frac{5}{3}\frac{(1-\mu_0)}{(4+5\mu_0)},\\B_1&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right),\\B_2&=\frac{-120+65\mu_0+55\mu_0^2}{3(552+781\mu_0+242\mu_0^2)}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

ここに，$\mu_0=\dfrac{\mu'}{\mu}$ である．

単位時間に，一つの球障害によって，P 波として散乱されるエネルギーは，障害球を中心にもつ半径 r $(\gg a)$ の球面から，単位時間に出ていく散乱 P 波のエネルギー E_P として，次のように求められる．

$$\begin{aligned}E_P&=\frac{2\pi^2\rho}{T^2}\int_0^\pi\left(\frac{h^2a^3A}{r}\right)^2\left[B_0-B_1\cos\theta-\frac{B_2}{4}(3\cos2\theta+1)\right]^2 2\pi r^2 d\theta\cdot v_P\\&=\frac{4\pi^3\rho h^4a^6A^2}{T^2}\left[2B_0^2+\frac{2}{3}B_1^2+\frac{2}{5}B_2^2\right]\cdot v_P.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.6)\end{aligned}$$

ここに，v_P は P 波の速度で $\dfrac{p}{h}$ で与えられ，また，T は波の周期で，$\dfrac{2\pi}{p}$ で与えられる．

同様にして，S 波として，散乱されるエネルギーは

$$\begin{aligned}E_S&=\frac{2\pi^2\rho}{T^2}\int_0^\pi\left(\frac{k^2a^3A}{r}\right)^2\left[B_1\sin\theta+\frac{3}{4}\left(\frac{k}{h}\right)B_2\sin2\theta\right]^2 2\pi r^2\sin\theta\cdot d\theta\cdot v_S\\&=\frac{4\pi^3\rho k^4a^6A^2}{T^2}\left[\frac{4}{3}B_1^2+\frac{3}{5}\left(\frac{k}{h}\right)^2B_2^2\right]\cdot v_S\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5.7)\end{aligned}$$

で与えられる．

上の値は，障害球の半径より十分大なる半径 r をもつ球面から，単位時間に出ていくエネルギーとして，計算したものであるが，媒質として，エネルギーの吸収のない完全弾性体を考えているから，得られた結果は当然 r に関係しないはずである．(5.6) および (5.7) の最後の値は，上の事実と矛盾しないことを示している．

§ 6. 媒質中に障害球が等密度に存在するときの平面波の減衰

平面 P 波

$$u_x = A\,e^{i(hx-pt)} \quad \cdots\cdots(6.1)$$

が進行するとき，その進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー E は

$$E = \frac{2\pi^2\rho A^2}{T^2}\cdot v_P \quad \cdots\cdots(6.2)$$

で与えられる．

いま，この平面波が，今まで論じたような障害球が単位体積中に N 個存在する媒質中を微小距離 dx だけ通過すると，波面の単位面積は $N\,dx$ 個の障害球に出会うわけである．したがって dx だけ進んだ場所にある単位面積を単位時間に通過する平面波のエネルギーは $(E_P+E_S)\,N\cdot dx$ だけ減少しているわけである．

よって，単位面積を単位時間に通過する平面波のエネルギーを E で表わし，その dx 間における減少を $-dE$ で表わせば次の式が得られる．

$$-dE = \left(\frac{2\rho\pi^2A^2}{T^2}\right)2\pi a^6\,(h^4\cdot C_Pv_P + k^4\cdot C_Sv_S)\,N\cdot dx. \quad \cdots\cdots(6.3)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} C_P &= 2B_0^2 + \frac{2}{3}B_1^2 + \frac{2}{5}B_2^2, \\ C_S &= \frac{4}{3}B_1^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{k}{h}\right)^2 B_2^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6.4)$$

である．すなわち，

$$\frac{dE}{dx} = -2\pi a^6h^4N\left[2B_0^2 + \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\frac{k^3}{h^3}\right)B_1^2 + \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\frac{k^5}{h^5}\right)B_2^2\right]\cdot E. \quad \cdots\cdots(6.5)$$

よって，

$$E = E_0\exp\left\{-2\pi a^6h^4N\left[2B_0^2 + \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\frac{k^3}{h^3}\right)B_1^2 + \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\frac{k^5}{h^5}\right)B_2^2\right]x\right\} \cdots(6.6)$$

を得る．

ここに，E_0 は積分常数で，基準の点における単位面積を，単位時間に通過するエネルギーを表わす．

波の強度と呼ばれるものは，波の進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギーに相当するものであるから，この場合，波の強度は，距離について指数函数的に減少することになる．いま，それを

$$I = I_0\,e^{-\alpha x} \quad \cdots\cdots(6.7)$$

と表わしたときの α を減衰定数と呼ぶ慣例に従えば，$h = \dfrac{2\pi}{\lambda_P}$ の関係から，減衰定数 α は波長の

4乗に逆比例することが知られる．また，$\dfrac{1}{h}=\dfrac{v_P}{p}$ から α は周波数 f の 4 乗に比例することにもなる．この結果は普通の音波の場合における Rayleigh 散乱[1] による減衰と定性的には一致するが，前にのべたように，弾性波においては普通散乱 S 波のほうが，散乱 P 波より大きいエネルギーをもつのであるから，比例常数を考慮すると，(6.5) に示されるように，かなり異なる結果になる．

また，(6.5) から，減衰定数 α が，障害球の体積 $V\left(=\dfrac{4}{3}\pi a^3\right)$ の二乗および媒質の単位体積中の障害球の数 N に比例することが知られる．

§7. 結　論

以上の議論はすべて媒質および障害球を完全弾性体として扱い，粘性などの事柄は考慮しなかった．それゆえ，ここにのべたような減衰機構を実際の地震波に適用するには，十分な留意が必要である．

砂利の多い地盤で行われる地震探鉱における波動の減衰機構には，ここに述べたような議論が，ある程度成立するのではないかと考えられる．しかし，実際に行われている地震探鉱の記録は，種々の目的および制約から，結局バンド・フィルターを通したものになっているので，ここに述べたような減衰機構を調べるための解析には適しないものが多い．将来，テープレコーダーなどによる解析につごうのよい記録が入手できれば，くわしい調査を行ないたい．

また，近ごろ，さかんに行われている金属，岩石などに対する超音波実験[2]において，媒質の結晶粒に比して，波長のかなり大きいときの弾性波の減衰機構を，単なる音波の Rayleigh 散乱で説明するのは，定性的にはともかく，定量的には，散乱 S 波のエネルギーが，散乱 P 波のエネルギーより大であることから考えてもかなり無理な議論であり，その意味でも，ここに述べた計算の意義が認められるように思われる．

御指導頂いた松沢武雄先生，井上宇胤先生，高木聖先生に感謝をささげる．

文　献

（1） Lord Rayleigh : Theory of Sound, II, 272.
（2） 広根徳太郎・神垣知夫：電子工業 **3** (1954), No. 4, 6.