

# 円錐振り子式起動機についての考察(第1報)\*

鎌 本 博 夫\*\*

550.341:534

## Study on the Conical Pendulum Governor for Seismograph (Report 1)

H. Kamamoto

(Weather Instrument Plant)

Equation of motion of rotating conical pendulum is given by eq. (1), where  $L$  and  $I$  are torque and momentum inertia respectively, and  $I$  is a function of angular velocity  $\omega$  (See eq. (4) and Fig. 1). And a solution of eq. (1) is finally written by the eq. (6), (7) and (8).

From eq. (6), if we set  $L=380$  dyne-cm (torque variation of pendulum by the main spring, Fig. 2),  $\omega_0=3\pi$  (standard angular vel.),  $L=11.2$  cm (length of pendulum),  $M=390$  gr. (mass of pendulum) and  $t=2/9$  sec. (time to pass the axis of pendulum between the nail of torque absorber to nail), we obtain  $\Delta\omega/\omega_0=0.003$ , where  $\Delta\omega$  is small deviation of angular velocity. Then torque absorber is driven and rotation of pendulum is controlled. Angular velocity variation of pendulum is shown in Fig. 3. Comparing the actual record on a drum (Fig. 4) with above calculated value, adequate value of  $L$  will be 1000 dyne-cm. This means that actual torque variation is larger than that of main spring alone.

With these calculations, we can express, an angular velocity deviation  $\Delta\omega/\omega_0$  is mainly proportional to  $Lt/M$ .

### まえがき

円錐振り子式起動機については、従来、いろいろの研究がなされている。本論文にはいわゆるカラクリ制動について、どこまで時間制御が可能かを理論的に解析し、最後に実際例と比較した。

### § 1. 円錐振り子の運動方程式

一定回転で回っている円錐振り子に、あるトルク変動が加わった場合の運動方程式は、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L}{I} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  : 振り子の回転角加速度、

$L$  : 余分に振り子に加わるトルク、

$I$  : 回転体 (主として振り子) の慣性能率。

\* Received Nov. 5, 1956.

\*\* 気象測器製作所

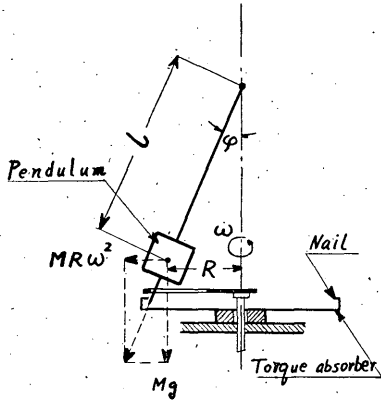


Fig. 1. Conical pendulum

Fig. 1 において、回転体の慣性は主として振りによるとして、他の回転部の慣性を無視できるとすれば、慣性能率  $I$  は、

$$I = MR^2 \dots \dots \dots (2)$$

で得られる。  $M$  は振子の質量、  $R$  は振子の回転中心と重心との距離である。

Fig. 1 の関係から

$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \varphi}, \quad R = l \sin \varphi \dots \dots \dots (3)$$

ここに、  $\omega$  : 振子の回転角速度、

$l$  : 振子の支点から重心までの距離、

$\varphi$  : 振子の振れ角

が得られ、(2)、(3) 式から慣性能率は次式で表わされる。

$$I = M \left( l^2 - \frac{g^2}{\omega^4} \right) \dots \dots \dots (4)$$

しかして、

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

であるから、(4) 式を(1) 式に代入し移項すれば、

$$M \left( l^2 - \frac{g^2}{\omega^4} \right) d\omega - L dt = 0$$

となり、簡単にこの微分方程式は解けて、

$$M \left( l^2 \omega + \frac{g^2}{3\omega^3} \right) - Lt = C$$

をうる。いま、  $t=0$  のとき  $\omega = \omega_0$  とおき、  $\omega_0$  を振子の標準角速度と考えれば積分常数が定まる。

すなわち、

$$C = M \left( l^2 \omega_0 + \frac{g^2}{3\omega_0^3} \right)$$

したがって、微分方程式の解は、

$$\frac{M}{L} \left\{ l^2 (\omega - \omega_0) + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{\omega^3} - \frac{1}{\omega_0^3} \right) \right\} = t \dots \dots \dots (5)$$

でえられる。

いま、ぜんまいのトルク変動を振子のトルク変動に直して、その値を  $L_1$  とすれば、それが上式の  $L$  に相当するし、また、回転が出すぎてカラクリを駆動した場合、そのカラクリによって消費

されるトルクを  $L_2$  とすれば,  $L_1 - L_2$  が振子に加わる制動トルクとなる. そして, もちろん,

$$L_1 - L_2 \leq 0$$

の関係が成り立たなければ, この振子式調速器は調速しない.

次に,  $\Delta\omega$  を角速度の微小変化とすれば,

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

とおけるので, これを (5) 式に代入し,  $\Delta\omega^2$  以上の高次の項を  $\Delta\omega$  に比較して無視し, 整理すれば,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{t}{\frac{M}{L} \left( l^2 \omega_0 - \frac{g^2}{\omega_0^3} \right) - 3t} \dots\dots\dots (6)$$

が得られる. また, (6) 式を書き直せば,

$$t = \frac{M \left( l^2 \omega_0 - \frac{g^2}{\omega_0^3} \right) \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}{L \left( 1 + 3 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)} \dots\dots\dots (7)$$

$$M = \frac{L \left( 1 + 3 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)}{\left( l^2 \omega_0 - \frac{g^2}{\omega_0^3} \right) \frac{\Delta\omega}{\omega_0} t} \dots\dots\dots (8)$$

とも書ける.

## § 2. 実際の問題

実際には, この円錐振子の回転速度が, ドラムの回転に, 直接, 歯車により関係づけられているから, ドラム上のタイムチェックの間隔から, その間の時間を正確に読みとろうとすれば, 振子の角速度のムラは, そのままドラムの回転ムラとなり, 時間の読みとり精度をそこなう.

そこで, 気象測器製作所製の 54 型三成分地震計 (幾何倍率 60 倍) に取りつけた起動機について, 計算値と実例を比較してみよう.

本地震計用の起動機ぜんまいは, 薄型のバネ (0.5 mm 厚) が使用され, ぜんまいの巻き初めと終りでトルクの変動は割合少ない. ぜんまい単独で試験した場合のトルク変動の実測値を Fig. 2 に示す. 図に明らかなように, ぜんまいの解ける道中で, ぜんまいバネどうしの摩擦のため, ぜんまいが段階的にほどけ, トルクの値は, 始終変動していることを示している.

このぜんまいのトルク変動の少ない部分から, 一日分を取り出し, そのあいだにあらわれる最大トルク変動を, 図から求めると約 5 kg cm である. ぜんまいの香箱の回転は, 17,280 倍に増速されて振子に伝えられているので, 振子にかかるトルク変動は,

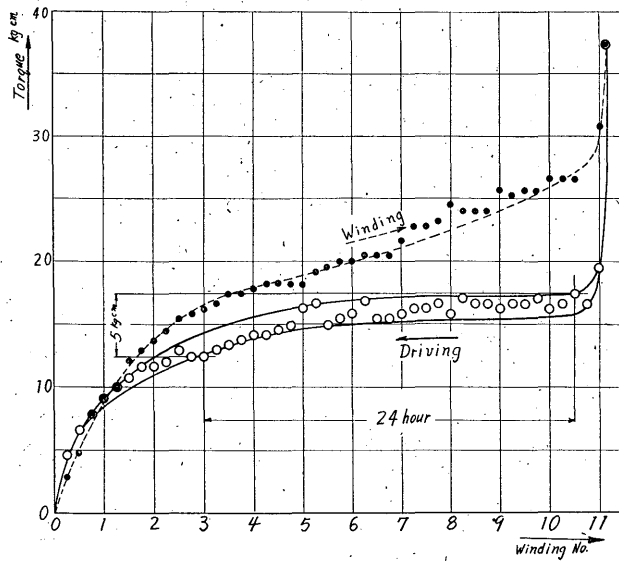


Fig. 2. Torque variation of main spring (spring alone)

$$L = 5,000 \times \frac{1}{17,280} \times 980 \doteq 280 \text{ dyne cm}$$

となる。

振子の標準周期  $T_0$  は  $\frac{2}{3}$  秒であるから、標準角速度  $\omega_0$  は

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3\pi,$$

振子の支点からその重心までの長さ  $l$  は

$$l = 11.2 \text{ cm},$$

振子の質量  $M$  は

$$M = 390 \text{ g}$$

であった。

また、一方、カラクリのつめは 3 方向についていて、標準周期は  $\frac{2}{3}$  秒であるから、最悪(カラクリに触れないぎりぎりのところで、標準速度で回っていた振子が、トルクの増加を受け、回転が早くなり、カラクリのつめに衝突するまでの時間を考えれば、それが時間  $t$  となり、

$$t = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \doteq 0.2 \text{ sec.}$$

の値を取る。これらの値を (6) 式にいれれば、

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0.003$$

を得る。このとき (6) 式の分母の第2項は第1項に比し、ほとんど無視できるので、振子は約 0.2 sec のあいだ、直線的に速度を増し、最高角速度は標準角速度の 1.003 倍に達する。

その後は、カラクリを駆動し、カラクリの制動トルクが働くことになる。この制動トルクの  $L_2$  の価は 1~2 g cm であったので、これを dyne cm に直し、

$$L_2 = (1\sim 2) \times 980 \doteq 1000 \text{ dyne cm}$$

にとる。この場合 (7) 式において、 $\omega_0$ ,  $L$  をそれぞれ次のように取るべきである。

$$\omega_0 = 3\pi \times 1.003$$

$$L = L_1 - L_2 = 300 - 1000 = -700 \text{ dyne cm.}$$

そして、角速度  $\omega$  がもとの  $3\pi$  になるためには、

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{0.003}{1.003} = 0.003,$$

に取ればよいことになる。この場合、カラクリの慣性は振子の慣性に対し、無視できるとすれば、

(7) 式から

$$t = 0.1 \text{ sec}$$

を得る。この場合も (6) 式の場合と同様、分母のカッコ内の第2項は第1項に比し無視できるので、ほとんど直線的に速度が減っていく。

したがって、ぜんまいのトルクが増して振子の回転が増し、ついで、カラクリ制動が働いて速度の減っていく模様は Fig. 3 のようになる。そして、その平均角速度は最大角速度の  $\frac{1}{2}$  となるから、標準角速度  $\omega_0$  の 1.0015 倍となる。

以上の計算をもう一度言葉でいい表わせれば、振子にかかるトルク変動がないとき、カラクリのつめすれすれに角速度  $\omega_0$  でまわっているとき、振子に 300 dyne cm のトルクが余分に加わり、100 dyne cm のカラクリ制動が働いたとき、のこぎり歯状の速度変動が現れ、その平均角速度は、標準角速度の 1.0015 倍となる。

次に、振子の回転はドラムに伝えられていて、そのドラムは通常、1分タイムチェック間に標準速度で 30 mm 送られるから、この場合、

$$1.0015 \times 30 = 30.045 \text{ mm}$$

進むことになる。このチェック間から 0.1 sec を正確に読みとるには、0.05 mm の精度があればよいのであるから、本起動機は実用できることになる。また、ドラム一回転に 25 分要するので、一回転の誤差の積算値は約 1 mm となる。

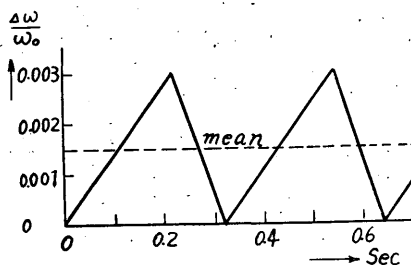


Fig. 3. Angular vel. variation of pendulum

もつとも、この計算には、振子以外の回転部の慣性を考慮していないので、実際には、もっと慣

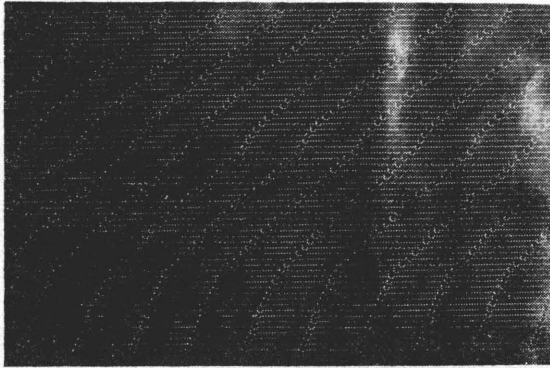


Fig. 4. Record of time check  
(Time interval 30 sec.)

性が大きくなり、精度が上がるはずであるが、一方、それらの回転軸の摩擦、歯車の摩擦の不同がトルク変動を増大するので、精度を悪くする。これらのことを考慮して Fig. 4 の記録例をみれば (30 秒ごとにタイムチェック)、誤差の最大は以上の計算値よりかなり大きい値を示している。

いま、かりに  $L_1=L_2=1000$  dyne cm の臨界状態を考えると、

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=0.01$$

となり、ドラム上、30 mm ごとのチェックマークは 30.3 mm 間隔となる。記録例の最大誤差も、大体、この程度に納まっている。このことは、ぜんまいが静かに解けると、ぜんまいどうしの摩擦のため階段状にほどけ、それが実測値より大きいこと、その他、歯車、軸の摩擦の不同のため、トルク変動が初めに仮定したものより大きかったためではないかと考える。

### § 3. カラクリ式円錐振子調速器設計の問題

われわれが地震計起動機を設計するに当り、振子の重量、カラクリ制動トルクなどの決定に苦しみ、全体の組立が終ってから、振子重量をいろいろ変えて実験のうえ、最後の値を決めることが多い。ところが、本論で述べた方式により、ぜんまいのトルク変動  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  を定めれば、(8)式から振子の質量が求められ、カラクリの制動トルクも定めうることがわかった。

なお、参考のために述べれば、ドラム回転に必要なトルクは測定の結果、ドラム回転部で約 200 g cm で、ぜんまい香箱部のトルクに換算すれば、ドラムの回転は香箱の 7.68 倍になっているから、

$$0.200 \times 7.68 = 1.5 \text{ kg cm}$$

であって、また、Fig. 2 から明らかなように、ぜんまいのトルクは最小約 12 kg cm であるから、振子駆動に 10.5 kg cm 必要なことがわかる。

このことは振子駆動にぜんまいの大半のエネルギーを消費していること、すなわち、歯車の伝達に大きな損失のあることを示している。したがって、歯車をラッピングしたり、軸受を吟味すれば、この損失は相当減じうるということが考えられるので、いっそう薄いぜんまいを使用し、トルク変動をますます小さく押えうる可能性がある。

#### § 4. 結 論

本方式によりカラクリ制動の場合の調速器の速度変動を、明らかになしえたと思ふ。また、一般の振子の回転をバネで制動する場合についても、トルク変動を回転角速度の函数として表わせば、同様の扱い方ができると思ふ。

#### 参 考 文 献

- 1) 那須信治：地震計の記録装置の改良に就て，地震，Ser. 1, 6, No. 1.