

# 二つの表面層がある場合の $M_2$ 地震波について\*

長 宗 留 男\*\*

550.341

## $M_2$ Waves in a Medium with Double Surface Layers

T. Nagamune

(Matsushiro Seismological Observatory)

In the present paper, the dispersion curves of  $M$  - and  $M_2$  - waves are obtained from the characteristic equation of Rayleigh waves transmitted through a two layered surface structure (Fig. 1). And the results are shown in Table 1 and Fig. 2, 3.

The sense of the orbital motion of  $M$  waves on the surface of the ground is always opposite to that of gravitational waves as in the case of an usual Rayleigh waves. On the other hand, the sense of the orbital motion of  $M_2$  waves is same to that of gravitational waves in the range of the present calculation of a case in which ratio of rigidities of each medium is comparatively large as shown in Fig. 1, (I). But, for a case in which ratio of rigidities are comparatively small (Fig. 1, (II)), the sense is opposite to that of gravitational waves as in the case of  $M$  waves (Table 2).

For reference, for a case of a single stratified body, the nature of the orbital motion of  $M_2$  waves on the surface of the ground are examined in detail. And it was found that, for a case in which the ratio of rigidities was comparatively small ( $\lambda_1/\mu_1 = \lambda_2/\mu_2 = 1$ ,  $\rho_1/\rho_2 = 1$ ,  $\mu_2/\mu_1 = 2$ ), there exist two kinds of orbital motion according to the variation of wave length, one in the same sense as that of the gravitational waves and the other in the same sense as that of the  $M$  waves (Table 3), and even a case in which the ratio was comparatively large, the motion of a particle was retrograde as in the case of an usual Rayleigh waves for relatively small wave length (Table 4).

The distribution of displacements in the layer and in the semi-infinite medium are obtained for a few examples of case of a single stratified body (Fig. 8, 9).

### § 1. まえがき

半無限弾性体の表面に一つの層がある場合の Rayleigh 波の理論は、K. Sezawa および K. Kanai らによって詳細に議論されている。このような表面構造に対しては普通の Rayleigh 波の性質をもった分散曲線のほかにも分散曲線が存在し、前者は  $M$  波、後者は  $M_2$  波 (Sezawa 波) と呼ばれている。そして、これらの高次のものも無数に存在するわけである<sup>(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7)</sup>。

\* Received April 11, 1956.

\*\* 地震観測所

また、実際の地震記象から  $M_2$  波の性質をもった地震波の存在することも報告されている<sup>(2),(6),(8)</sup>。

$M_2$  波が  $M$  波とちがうおもなものは、たとえば、 $M_2$  波は  $M$  波のように全波長にわたって存在するのではなくて、ある限界波長以上のものは存在しない点である。 $M_2$  波の存在する範囲はそれが伝ばする媒質の弾性常数のいかによって異なる。また、一般の場合、 $M_2$  波およびその高次のものは、 $M$  波または、その高次のものとは反対に、表面における質点は重力波と同じ方向の楕円運動をするなどの性質をもっている。

表面層が二つ以上あっても、やはり、Rayleigh 波の特性方程式からは多数の分散曲線が求められる。このときも、単一表面構造の場合と同様に、これらの波を  $M$  波、 $M_2$  波とよび、ここでは二つの層が存在する構造について  $M_2$  波の分散曲線

を求め、その一、二の性質についてのべる。

§ 2.  $M$  波および  $M_2$  波の分散曲線

Fig. 1 に示したようなきわめて単純なモデル構造を仮定して、 $M$  波および  $M_2$  波に対する分散曲線を求める。

表面層の数が二つあるいはそれ以上になると、特性方程式を求めることが非常に複雑であるが、最近 N. A. Haskell<sup>(9)</sup> が多数の層がある場合の表面波の特性方程式を計算しており、また、S. Homma<sup>(10)</sup> は別に

| (I)     |                                 |          |
|---------|---------------------------------|----------|
| Density | Rigidity                        | Depth    |
| $\rho$  | $\mu_1, \lambda_1 = \mu_1$      | $a$      |
| $\rho$  | $4\mu_1, \lambda_2 = \mu_2$     | $a$      |
| $\rho$  | $8\mu_1, \lambda_3 = \mu_3$     | $\infty$ |
| (II)    |                                 |          |
| Density | Rigidity                        | Depth    |
| $\rho$  | $\mu_1, \lambda_1 = \mu_1$      | $a$      |
| $\rho$  | $1.479\mu_1, \lambda_2 = \mu_2$ | $a$      |
| $\rho$  | $2.107\mu_1, \lambda_3 = \mu_3$ | $\infty$ |

Fig. 1. Surface structures assumed in the present paper

Tab. 1

Case (I);  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3, \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3, \mu_2 = 4\mu_1, \mu_3 = 8\mu_1$

| $\frac{V}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}}$ |       | 1.2  | 1.4  | 1.6  | 1.8   | 1.9  | 2.1   | 2.3   | 2.5   | 2.7   | 2.8    |
|---|-------|------|------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $fa$                                    | $M$   | 2.15 | 1.62 | 1.26 | 0.97  |      | 0.576 | 0.345 | 0.12  | —     | —      |
|   | $M_2$ | —    | 4.95 | 2.88 | 1.595 | 1.33 | 1.046 | 0.895 | 0.744 | 0.637 | 0.5926 |

Case (II);  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3, \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3, \mu_2 = 1.479\mu_1, \mu_3 = 2.107\mu_1$

| $\frac{V}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}}$ |       | 0.9737 | 1.0264 | 1.0765 | 1.1244 | 1.1703 | 1.2145 | 1.2571 | 1.2983 | 1.3383 | 1.3998 | 1.4296 | 1.4516 |
|---|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $fa$                                    | $M$   | 2.8695 | 2.0346 | 1.5749 | 1.2518 | 0.9838 | 0.7590 | 0.4328 | 0.1544 | —      | —      | —      | —      |
|   | $M_2$ | —      | —      | 9.36   | 7.328  | 5.68   | 4.499  | 3.718  | 3.174  | 2.750  | 2.1375 | 1.822  | 1.478  |

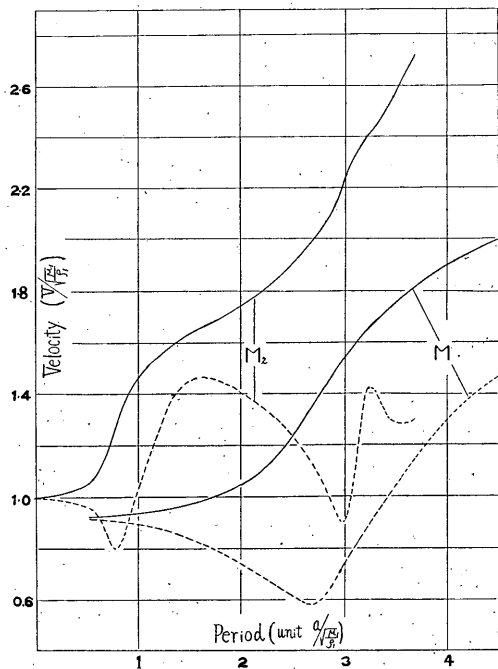


Fig. 2. The dispersion curves of  $M$ - and  $M_2$ -waves of case (I). Full lines: phase velocities; dashed lines: group velocities

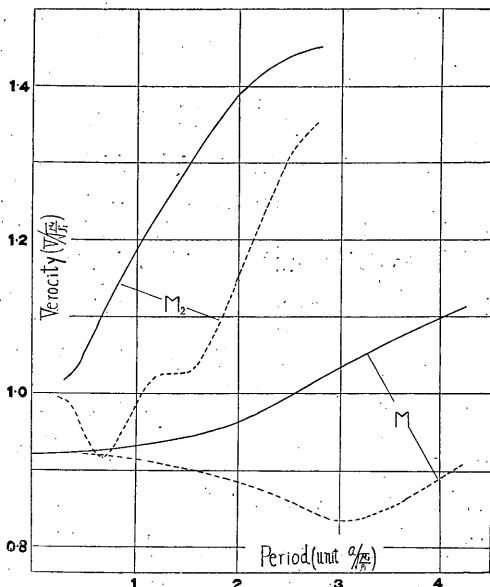


Fig. 3. The dispersion curves of  $M$ - and  $M_2$ -waves of case (II). Full lines: phase velocities; dashed lines: group velocities

二重表面構造に対する Rayleigh 波の速度を求め、一つの例について表面における振幅をも求めた。今回の数値計算には Homma の求めた式による。

計算の結果を Tab. 1 および Fig. 2, 3 に示す。\* Fig. 2, 3 の横軸には周期がとってある。Fig. 1 の (I) の構造の中間の層を取り除いたものは前に Kanai によって例として採用された単一層構造<sup>(9)</sup>と同じであり、(II) は Homma の例<sup>(10)</sup>と同じである。Fig. 2 の  $M_2$  波の群速度曲線には有限波長において明りょうな四つの極値が現れている。すなわち、第一の極小および極大とそれよりも周期の長いところにやはり極小値および極大値がある。相互の媒質の剛性率の比が比較的小さくなった場合、(II) には Fig. 3 に示してあるように一つの極小群速度と mini-max が現れている。単一層構造の場合にも、二つの媒質の剛性率の比が小さいときには、ただ一つの極小値だけが現れ、剛性率の比が大きくなるにつれて定常的な部分が多くなっており<sup>(11)</sup>、二重表面層の場合にも同じようなことがいえる。他方この場合でも、単一層構造の場合と同様に、 $M_2$  波の存するのはある有限波長までである。

\* Fig. 3 の  $M_2$  波に関する数値は S. Homma の求めたものを、そのまま借用して参考のため掲げたものである。Fig. 6 の場合も同様である。

§ 3. 地表面における質点運動

Fig. 4 のように座標をとり，水平方向および鉛直方向の変位  $u, w$  を

$$\left. \begin{aligned} u &= U \exp(iffx - ipt), \\ w &= iW \exp(iffx - ipt) \end{aligned} \right\}$$

の形で表わし，地表における水平変位と鉛直変位との比を二つの構造について計算した結果を Tab. 2 にのせてある. Fig. 5, 6 はこれらを図示したものである. これらの結果から二つの構造に

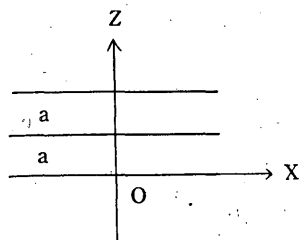


Fig. 4

対する  $M$  波および  $M_2$  波について比較してみる. まず,  $M$  波については, いずれの場合でも, 波長の短いところでは上下成分のほうが水平成分より大きく, 中間の波長では逆に水平成分が大きくなる. そして, 波長が充分長くなると, 両者の比は一定の値に漸近する. これは単一表面構造の場合と同様である, また,  $M$  波の地表面での質点の運動は楕円軌跡をえがき, その運動方向に半無限弾性体の表面に沿って伝わる Reyleigh 波と同じく, 進行方向に対して重力波と反対方向の運動をする. 他方,  $M_2$  波は (I) の場合 (各媒質の  $\mu$  の比が比較的大きい) には  $M$  波とは逆に表面における質点運動の方向は, 現在の計算範囲内では進行方向に対して重力波と同じ方向である. ところが (II) の構造では (これは  $\mu$  の比が前のものよりも小さい),  $M_2$  波は  $M$  波と同じくやはり「逆回り」\* の運動をすることになる. 単一構造と仮定した Sezawa および Kanai の計算による

Tab. 2. The ratio of horizontal and vertical displacements at the surface ( $z=2a$ )

| Case (I)                      |                |         | Case (II)                     |                |        |
|-------------------------------|----------------|---------|-------------------------------|----------------|--------|
| $\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}$ | $(U/W)_{z=2a}$ |         | $\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}$ | $(U/W)_{z=2a}$ |        |
|                               | $M$            | $M_2$   |                               | $M$            | $M_2$  |
| 1.2                           | 0.8535         | —       | 1.0765                        | —              | 0.7943 |
| 1.4                           | 0.6542         | -0.0012 |                               |                |        |
| 1.6                           | 0.8119         | -1.1642 | 1.1244                        | —              | 0.4718 |
| 1.8                           | 1.1188         | -1.6260 |                               |                |        |
| 1.9                           | —              | -1.2319 | 1.2145                        | 0.836          | 0.3336 |
| 2.1                           | 2.7361         | -0.9163 |                               |                |        |
| 2.3                           | 1.3840         | -0.8187 | 1.2985                        | —              | 0.1553 |
| 2.5                           | 1.0512         | -0.9446 |                               |                |        |
| 2.7                           | —              | -1.1497 | 1.4516                        | —              | 0.0476 |
| 2.8                           | —              | -1.2976 |                               |                |        |

\* 質点運動の方向は簡単のため,  $M$  波のように進行方向に対して重力波と反対のものを「逆回り」, 重力波と同じ方向に運動するものを「順回り」と呼んでおく.

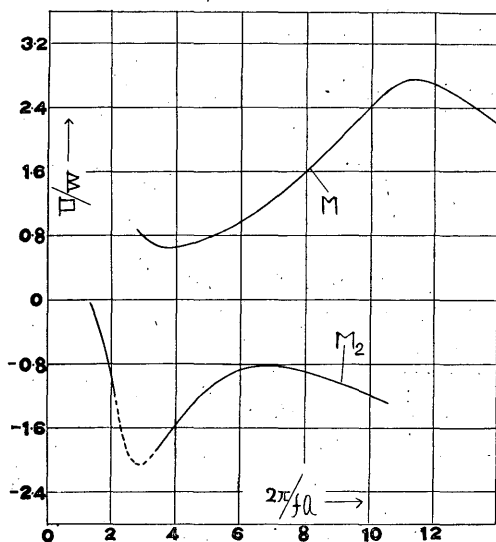


Fig. 5. Relation between the wave length and the ratio of horizontal and vertical displacements at the surface of case (I)

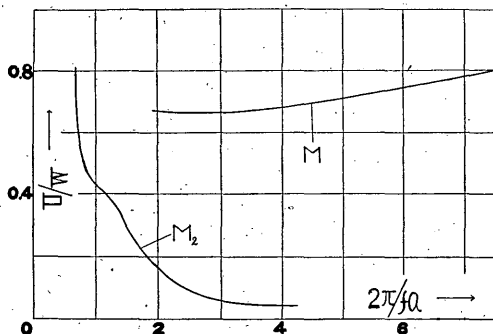


Fig. 6. Relation between the wave length and the ratio of horizontal and vertical displacements at the surface of case (II)

質との  $\mu$  の比がそれぞれ 5, 8, 20,  $\infty$  などの場合であって、現在のモデル (II) のものよりもいづれも大きい場合である。はたして単一層構造においても「逆回り」の  $M_2$  波があるかどうかを、Fig. 1 (II) の中間層を取り除いたものに近い構造について、参考のため少し詳細に計算してみる。すなわち、 $\rho_2/\rho_1=1$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$  とおき、層の厚さを  $a$  km とする。比較的波長の短い部分に対して計算した結果は Tab. 3 のとおりである。座標は Fig. 7 のようにとってあり、変位はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u &= iU \exp(ipt - ifx), \\ w &= W \exp(ipt - ifx) \end{aligned} \right\}$$

としてある。この結果からみると、 $M_2$  波は地表面で「逆回り」になるものもあり、「順回り」になる部分もある。波長  $2\pi/fa$  が 1.460 よりも長い部分では、すべて「順回り」になるか、あるいは「逆回り」の部分も現れる。

Tab. 3. The ratio of horizontal and vertical displacements of  $M$ - and  $M_2$ - waves at the surface of a case of single layered structure,  $\rho_2/\rho_1=1$ ,  $\lambda_1/\mu_1=\lambda_2/\mu_2=1$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$ .

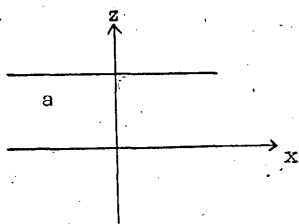


Fig. 7

| $\sqrt{\frac{V}{\mu_1/\rho_1}}$ | $2\pi/fa$ |        | $(U/W) z=a$ |        |
|---------------------------------|-----------|--------|-------------|--------|
|                                 | $M$       | $M_2$  | $M$         | $M_2$  |
| 1.21443                         | —         | 1.0    | —           | 0.4638 |
| 1.296                           | 225.0*    | 1.319* | 0.709       | 0.259  |
| 1.3                             | —         | 1.3410 | —           | 0.161  |
| 1.319.                          | —         | 1.460* | —           | -0.054 |

\* referred to the paper of K. Sezawa and K. Kanai. (2)

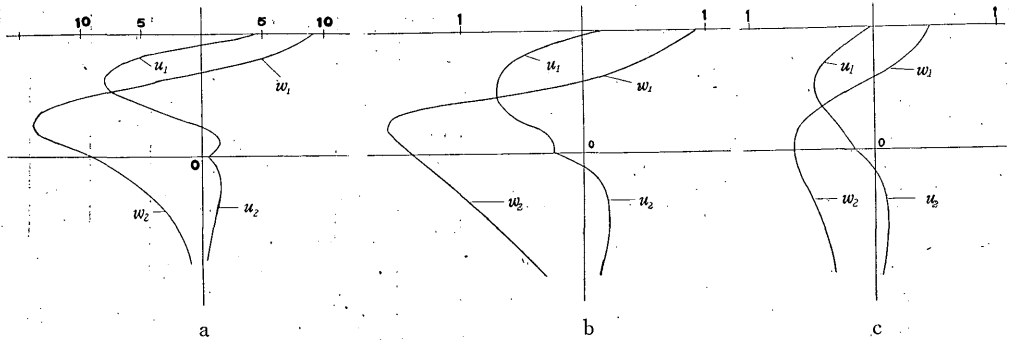


Fig. 8. Distributions of displacements in the layer and in the subjacent medium of cases: (a)  $2\pi/fa=1.0$ , (b)  $2\pi/fa=1.3410$  and (c)  $2\pi/fa=1.460$  respectively for the values shown in Tab. 3

か、この部分は計算のけた数を多くしなければはっきりいえないので求めていない。また、 $2\pi/fa=1$  以下の部分についても現用の函数表から詳しく求めることは困難である。

$2\pi/fa=1, 1.3410, 1.460$  について地中の振幅分布を求めて Fig. 8 に示してある。同図 (c) によると、上下成分  $w$  は層中において節をもっているが、 $u$  には節がない。(a) および (b) では、いずれも層中に節があるが、一般に波長が短くなると  $M_2$  波でも節のあることがあるので<sup>(6)</sup>、これらの点は  $M_2$  波、 $M$  波の高次のものではなく普通の  $M_2$  波の分散曲線に属するものと考えられる。また、 $\rho_1/\rho_2=1, \mu_1/\mu_2=1/5, 2\pi/fa=1$  の場合の根を求め、地中の振幅分布を Fig. 9 に示してある (Tab. 4 は地表面の値を示したものである)。これと同じ条件で比較的波長の長いところでは、すべて「逆回り」になっているが、計算を短波長の部分まで拡張してみると、 $\mu$  の比が比較的大きくなっても、上の例のように逆になる部分も存在することがわかる。

これらの例からみて、単一層構造の場合でも「逆回り」の運動をする  $M_2$  波の存在することがたしかめられたわけで、二重表面層を仮定した Fig. 1(II) のような構造において地表面で観測するときは、「逆回り」

Tab. 4. The ratio of horizontal and vertical displacements of  $M_2$  waves at the surface of a case where  $\rho_2/\rho_1=1, \lambda_1/\mu_1=\lambda_2/\mu_2=1, \mu_2/\mu_1=5$ .

| $V/\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}$ | $2\pi/fa$ | $(U/W) z=a$ |
|---------------------------------|-----------|-------------|
| 1.27316                         | 1.0       | 0.2603      |

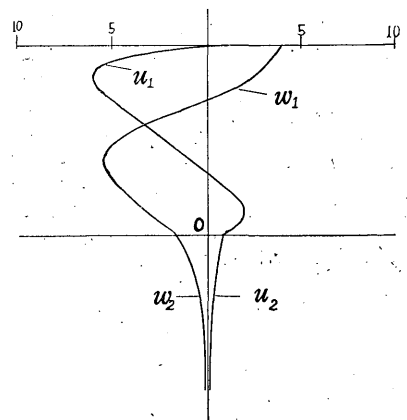


Fig. 9. Distributions of displacements in the layer and in the subjacent medium of the case where  $2\pi/fa=1.0$  and  $\mu_2/\mu_1=5$  (cf. Table 4)

の楕円運動をする  $M_2$  波がありうるということももうなずけるわけである。特に、 $M_2$  波あるいはこれらの高次のものが観測しやすいと考えられるのは、群速度が極小、極大あるいは mini-max になるような波長のものであるから、その付近での運動方向の性質を詳しく調べておかないと、質点運動の方向だけから  $M$  波であるか  $M_2$  波であるかを識別することは、困難なことも出てくることになる。

#### § 4. あとがき

今回の計算では二つの表面層をもった簡単な構造を仮定して、これに対する  $M_2$  波の分散曲線を求めたのであるが、その結果を要約すると次のとおりである。

1) 相互の媒質の剛性率の比が比較的小さい Fig. 1 (II) の例では、分散曲線は有限波長において一つの極小群速度と一つの mini-max をもっており、剛性率の比を大きくした Fig. 1 (I) の場合には極小群速度だけでなく、極大群速度もあらわれ、それらの数も多くなって来る。

2) 地表面における水平および垂直の変位は Fig. 1 の構造では垂直変位のほうが大きいこともあり、水平変位が大きい場合もある。第二の例では存在する全波長にわたって垂直成分のほうが大きい。これらは単一層構造に対して求められた結果と同様な傾向を示すものである。

3) 地表における質点は楕円運動をし、その方向は波の進行方向に対して重力波と同じ場合もあり、普通の Rayleigh 波と同様に重力波と反対の方向の運動をする場合もありうる。そして、これは各媒質の  $\mu$  の比の大小によって異なるように思われる。

この点をたしめるかため、単一層の場合をくわしく計算してみたところ、やはり二通りの質点運動の方向があり、また、同じ構造のときでも波長によって異なる。

波長が相当に短いところでは  $\mu$  の比が比較的大きくなっても、地表面の質点は普通の Rayleigh 波と同じ方向の楕円運動をすることがわかった。

なお、単一層の場合の二、三の点について地中の振幅分布をも計算した。

#### 文 献

- (1) K. Sezawa & K. Kanai : Discontinuity in the Dispersion Curves of Rayleigh Waves. B. E. R. I. **13** (1935) 237.
- (2) K. Sezawa & K. Kanai : The  $M_2$  Seismic Waves. ditto **13** (1935) 471.
- (3) K. Sezawa : Amplitudes of Rayleigh Waves with Discontinuities in their Dispersion Curves. ditto **16** (1938) 1.
- (4) K. Sezawa & K. Kanai : Dispersive Rayleigh Waves of Positive and Negative Orbital Motion and Allied Problems. ditto **18** (1940) 1.
- (5) 金井 :  $M_2$  地震波について. 地震 **15**, No. 8, 193.
- (6) K. Kanai : On the  $M_2$  Waves (Sezawa-Waves). B. E. R. I. **29** (1951) 39.
- (7) S. Homma : Rayleigh Waves of 3rd order in Stratified Surface of the Ground. 研究速報 **25** (1947) 12.

- (8) S. Homma & Y. Nishizawa : Observation of Rayleigh Waves Propagated over a Stratified Surface. Geophys. Mag. **23**, No. 3 (1952).
- (9) N. A. Haskell : The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media. B.S.S.A. **43** (1953) No. 1.
- (10) S. Homma : Rayleigh Waves in a Medium with Superficial Double Layers. Geophys. Mag. **27** (1956) No. 1.
- (11) K. Kanai : On the Group Velocity of Dispersive Surface Waves. B.E.R.I. **29** (1951) 49.