球状障害群の弾性波に及ぼす影響について (I)*

—— 一個の球状障害による弾性波の散乱 ——

山　川　宜　男**

550.341

Investigation of the Disturbance Produced by Spherical Obstacles on the Elastic Waves (I)

On the Scattering of the Elastic Waves by a Spherical Obstacle

N. Yamakawa

(Training School for Meteorological Observer)

If primary P waves incident upon a spherical obstacle whose radius is sufficiently small as compared with wave lenght λ, are denoted by

$$\Delta = Ae^{i(hx-pt)}, \qquad u_x = \frac{-iA}{h}e^{i(hx-pt)},$$

then the scattered P waves, reckoned at the distant point whose polar coordinates are r $(\gg\lambda)$, θ, are given by

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{iha^3}{r}\left[\overline{B}_0 - \overline{B}_1\cos\theta - \dfrac{\overline{B}_2}{4}(3\cos 2\theta + 1)\right]e^{i(hr-pt)}, \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

and the scattered S waves are given by

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = -\dfrac{iha^3}{r}\left[\overline{C}_1\sin\theta + \dfrac{3}{2}\overline{C}_2\sin 2\theta\right]e^{i(hr-pt)}, \end{cases}$$

where u_i, v_i are respectively the r, θ component of the displacement, and $\overline{B_i}$, $\overline{C_i}$ are the constants which are given in (3.22).

§1. 序　論

地震波の減衰機構を，粘弾性波の減衰として論じたものは K. Sezawa[(1)(2)] の研究を初めとして数多くあげられる．しかし，その減衰機構が，種々の factor のいりまじった複雑なものであることは，容易に考えられるところである．もちろん，地殻などの viscosity に起因するところも大きいであろう．しかし，地震波の通過する途中の媒質がなんらかの微細な構造をもつような場合，地震波がそこを通過する際に複雑な散乱をなし，その結果，減衰していくというような機構をも考えうるのではなかろうか．

* Received March 17, 1956

** 中央気象台研修所

物理の他の分野において，類似の機構が成立する場合として，金属中の超音波の減衰機構があげられる[3]．超音波の周波数，金属の結晶粒の大きさなどに従い，その減衰の機構は非常に複雑ではあるが，周波数の充分小なるもの，すなわち，波長が結晶粒の径に比して充分大であるものについては，音波の小さい球状障害による散乱，いわゆる Rayleigh 散乱から導かれる

$$\text{減衰定数} \propto f^4$$

なる関係に近いものがみとめられる．ここに，f は周波数を表わす．

ここでは，無数の小障害が存在するとき，地震波が散乱の結果，減衰する様子を調べるための第一過程として，一つの小さい球状障害による弾性平面波の散乱を調べた．

§2.　一般の球状障害による平面波の散乱

x 軸方向に進む平面 P 波を次のように表わす．

$$\Delta = Ae^{i(hx-pt)}, \qquad u_x = -\frac{i}{h}e^{i(hx-pt)} \tag{2.1}$$

ここに，Δ は dilatation, u_x は変位の x 成分を表わす．また，$h=\sqrt{\dfrac{\rho}{\lambda+2\mu}}\,p$ である．

(2.1) は Rayleigh[4] の公式により，障害球の中心に原点をとり，x 軸を極軸とした極座標により，次のように表わされる．ただし，以後当分のあいだ time factor e^{-ipt} を省略して書く．

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= A\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n j_n(hr)\,P_n(\cos\theta)\\
u_0 &= -\frac{1}{h^2}A\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,i^n\frac{d}{dr}j_n(hr)\,P_n(\cos\theta)\\
v_0 &= -\frac{1}{h^2}A\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,i^n\frac{1}{r}j_n(hr)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

ここに，u_0, v_0 はそれぞれ入射波の r 成分，θ 成分である．以下反射波，屈折波においても同様の意味で u_i, v_i を用いる．

また，$j_n(hr)$ は spherical Bessel function と呼ばれ，

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x) \tag{2.3}$$

で定義される．

また，反射 P 波，反射 S 波，屈折 P 波，屈折 S 波は T. Matuzawa[5] により次のように与えられる．

まず，反射 P 波は，

$$\left.\begin{aligned}
\Delta' &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n^{(1)}(hr) P_n(\cos\theta) \\
u_1 &= -\frac{1}{h^2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{d}{dr} h_n^{(1)}(hr) P_n(\cos\theta) \\
v_1 &= -\frac{1}{h^2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{r} h_n^{(1)}(hr) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

で表わされ，反射 S 波は

$$\left.\begin{aligned}
2\omega' &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(kr) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) \\
u_2 &= \frac{-1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n n(n+1) \frac{1}{r} h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \\
v_2 &= \frac{-1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}[r h_n^{(1)}(kr)] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

で表わされる．ここに $2\omega'$ は rotation を表わす．また，$k=\sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}\,p$ であり，$h_n^{(1)}(hr)$ は

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad (2.6)$$

で定義される spherical Bessel function である．

また，障害物体中の弾性常数を λ', μ', 密度を ρ' で表わせば，屈折 P 波は

$$\left.\begin{aligned}
\Delta'' &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n j_n(h'r) P_n(\cos\theta) \\
u_3 &= -\frac{1}{h'^2}\sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{d}{dr} j_n(h'r) P_n(\cos\theta) \\
v_3 &= -\frac{1}{h'^2}\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{1}{r} j_n(h'r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

で表わされる．ここに，$h'=\sqrt{\dfrac{\rho'}{\lambda'+2\mu'}}\,p$ である．

また，屈折 S 波は

$$\left.\begin{aligned}
2\omega'' &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n j_n(k'r) P_n(\cos\theta) \\
u_4 &= -\frac{1}{k'^2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) E_n \frac{1}{r} j_n(k'r) P_n(\cos\theta) \\
v_4 &= -\frac{1}{k'^2}\sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}[r\, j_n(k'r)] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

で表わされる．ここに，$k'=\sqrt{\dfrac{\rho'}{\mu'}}\,p$ である．

(2.7), (2.8) においては，原点において発散しない解を用いてある．

障害球の半径を a とすると，境界条件は $r=a$ において次のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda(\Delta+\Delta')+2\mu\frac{\partial}{\partial r}(u_0+u_1+u_2)=\lambda'\Delta''+2\mu'\frac{\partial}{\partial r}(u_3+u_4)\\
&\mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}(v_0+v_1+v_2)-\frac{1}{r}(v_0+v_1+v_2)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_0+u_1+u_2)\right\}\\
&\qquad=\mu'\left\{\frac{\partial}{\partial r}(v_3+v_4)-\frac{1}{r}(v_3+v_4)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_3+u_4)\right\}\\
&u_0+u_1+u_2=u_3+u_4\\
&v_0+v_1+v_2=v_3+v_4
\end{aligned}\right\}\qquad(2.9)$$

これに，(2.2)，(2.4)，(2.5)，(2.7) および (2.8) を代入して，次の式を得る．

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_{n1}B_n+\gamma_{n1}C_n+\delta_{n1}D_n+\varepsilon_{n1}E_n=i^n(2n+1)\alpha_{n1}A\\
&\beta_{n2}B_n+\gamma_{n2}C_n+\delta_{n2}D_n+\varepsilon_{n2}E_n=i^n(2n+1)\alpha_{n2}A\\
&\beta_{n3}B_n+\gamma_{n3}C_n+\delta_{n3}D_n+\varepsilon_{n3}E_n=i^n(2n+1)\alpha_{n3}A\\
&\beta_{n4}B_n+\gamma_{n4}C_n+\delta_{n4}D_n+\varepsilon_{n4}E_n=i^n(2n+1)\alpha_{n4}A
\end{aligned}\right\}\qquad(2.10)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{n1}=-\left\{\left[(\lambda+2\mu)-\frac{2\mu(n+1)(n+2)}{\xi^2}\right]j_n(\xi)+\frac{4\mu}{\xi}j_{n-1}(\xi)\right\}\\
&\beta_{n1}=\left\{\left[(\lambda+2\mu)-\frac{2\mu(n+1)(n+2)}{\xi^2}\right]h_n^{(1)}(\xi)+\frac{2\mu}{\xi}h_{n-1}^{(1)}(\xi)\right\}\\
&\gamma_{n1}=-\left[\frac{2\mu n(n+1)}{\eta^2}h_{n-1}^{(1)}(\eta)-(n+2)h_n^{(1)}(\eta)\right]\\
&\delta_{n1}=-\left\{\left[(\lambda'+2\mu')-\frac{2\mu'(n+1)(n+2)}{\xi'^2}\right]j_n(\xi')+\frac{4\mu'}{\xi'}j_{n-1}(\xi')\right\}\\
&\varepsilon_{n1}=\frac{2\mu'n(n+1)}{\eta'^2}\left[\eta' j_{n-1}(\eta')-(n+2)j_n(\eta')\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(2.11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{n2}=\frac{-2\mu}{\xi^2}\left[(n+2)j_n(\xi)-\xi j_{n-1}(\xi)\right]\\
&\beta_{n2}=\frac{2\mu}{\xi^2}\left[(n+2)h_n^{(1)}(\xi)-\xi h_{n-1}^{(1)}(\xi)\right]\\
&\gamma_{n2}=\frac{\mu}{\eta^2}\left\{2\eta h_{n-1}^{(1)}(\eta)+[\eta^2-2n(n+2)]h_n^{(1)}(\eta)\right\}\\
&\delta_{n2}=\frac{-2\mu}{\xi'^2}\left[(n+2)j_n(\xi')-\xi' j_{n-1}(\xi')\right]\\
&\varepsilon_{n2}=\frac{-\mu'}{\eta'^2}\left\{2\eta' j_{n-1}(\eta')+[\eta'^2-2n(n+2)]j_n(\eta')\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{n3}=-\frac{1}{\xi}\left[j_{n-1}(\xi)-\frac{n+1}{\xi}j_n(\xi)\right]\\
&\beta_{n3}=\frac{1}{\xi}\left[h_{n-1}^{(1)}(\xi)-\frac{n+1}{\xi}h_n^{(1)}(\xi)\right]
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{n3}&=\frac{n(n+1)}{\eta^2}h_n^{(1)}(\eta)\\
\delta_{n3}&=-\frac{1}{\xi'}\left[j_{n-1}(\xi')-\frac{n+1}{\xi'}j_n(\xi')\right]\\
\varepsilon_{n3}&=-\frac{n(n+1)}{\eta'^2}j_n(\eta')
\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{n4}&=-\frac{1}{\xi^2}j_n(\xi)\\
\beta_{n4}&=\frac{1}{\xi^2}h_n^{(1)}(\xi)\\
\gamma_{n4}&=\frac{1}{\eta^2}\left[\eta h_{n-1}^{(1)}(\eta)-nh_n^{(1)}(n)\right]\\
\delta_{n4}&=-\frac{1}{\xi'^2}j_n(\xi')\\
\varepsilon_{n4}&=-\frac{1}{\eta'^2}\left[\eta' i_{n-1}(\eta')-nj_n(\eta')\right]
\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

である．ここに，$\xi=ha,\ \eta=ka,\ \xi'=h'a,\ \eta'=k'a$ である．

上に得られた結果は，T. Matuzawa[6] が球面波を入射波として扱った場合と，α_{n1}，α_{n2}，α_{n3}，α_{n4} を除き一致する．ただし，β_{n1}，β_{n2}，γ_{n1}，γ_{n2}，δ_{n1}，δ_{n2}，ε_{n1}，ε_{n2} において $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，β_{n3}，β_{n4}，γ_{n3}，γ_{n4}，δ_{n3}，δ_{n4}，ε_{n3}，ε_{n4} において $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{1}{a}$ なる常数因子だけ異なる．また，ここでは，障害物が小さい場合を主として取り扱うわけであるから，球面波が入射しても，近似的に平面波が入射するものとして取り扱えることになる．

特に，$n=0$ のときは，(2.10) は次のように簡単になる．

$$\left.\begin{aligned}
\beta_{01}B_0+\delta_{01}D_0&=\alpha_{01}A\\
\beta_{03}B_0+\delta_{03}D_0&=\alpha_{03}A
\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{01}&=-\left[(\lambda+2\mu)j_0(\xi)-\frac{4\mu}{\xi}j_1(\xi)\right]\\
\beta_{01}&=\left[(\lambda+2\mu)h_0^{(1)}(\xi)-\frac{4\mu}{\xi}h_1^{(1)}(\xi)\right]\\
\delta_{01}&=-\left[(\lambda'+2\mu')j_0(\xi')-\frac{4\mu'}{\xi'}j_1(\xi')\right]
\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{03}&=-\frac{1}{\xi}j_1(\xi)\\
\beta_{03}&=\frac{1}{\xi}h_1^{(1)}(\xi)\\
\delta_{03}&=-\frac{1}{\xi'}j_1(\xi')
\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

である．

§3. 障害球が小なる場合

以下には，ξ, η, ξ', η' などがすべて1に比べて十分小さいとして，spherical Bessel function に

$$\left.\begin{aligned} j_n(x) &\doteqdot \frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^n\left[1-\frac{x^2}{2(2n+3)}+\frac{x^4}{8(2n+3)(2n+5)}\right] \\ h_n^{(1)}(x) &\doteqdot -\frac{i(2n)!}{2^n n! x^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2(2n-1)}x^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

などの近似式を用いる．ここに，$j_n(x)$ においては第三項，$h_n^{(1)}(x)$ においては第二項までとった理由は，以下の B_n, C_n の計算の途中において，$j_n(x)$ の第一項および第二項，$h_n^{(1)}(x)$ の第一項に由来する項が消えるためである．また，$n=0$ のときは，$h_n^{(1)}(x)$ の実数部分の第一項も (3.1) における第二項と同じ order になるが，この場合には，$j_0(x)$ の第一項および第二項，$h_0^{(1)}(x)$の第一項だけを用いるのみにて十分であるので，やはり実数部分は考慮しなくてよい．

α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij}, ε_{ij} などの係数は次のように与えられる．

$n=0$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{01} &= -\left\{(\lambda+\frac{2}{3}\mu)-\frac{1}{6}(\lambda+\frac{6}{5}\mu)\xi^2\right\} \\ \beta_{01} &= \frac{i4\mu}{\xi^3}\left[1-\frac{\lambda}{4\mu}\xi^2\right] \\ \delta_{01} &= -\left\{(\lambda'+\frac{2}{3}\mu')-\frac{1}{6}(\lambda'+\frac{6}{5}\mu')\xi'^2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{03} &= -\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{10}\xi^2\right] \\ \beta_{03} &= -i\frac{1}{\xi^2}\left[1+\frac{1}{2}\xi^2\right] \\ \delta_{03} &= -\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{10}\xi'^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

また，$n\geqq 1$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n1} &= 2\mu n(n-1)F\xi^{n-2}\left\{1-\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)n(n-1)}+\frac{\lambda}{2\mu n(n-1)}\right]\xi^2\right\} \\ \beta_{n1} &= i2\mu(n+1)(n+2)\frac{G}{\xi^{n+3}}\left\{1+\left[\frac{n(n-1)}{2(n+1)(n+2)(2n-1)}-\frac{\lambda}{2\mu(n+1)(n+2)}\right]\right\} \\ \gamma_{n1} &= -i2\mu n(n+1)(n+2)\frac{G}{\eta^{n+3}}\left\{1+\frac{n}{2(2n-1)(n+2)}\eta^2\right\} \\ \delta_{n1} &= 2\mu'(n-1)nF\xi'^{n-2}\left\{1-\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2(n-1)n(2n+3)}+\frac{\lambda'}{2\mu'(n-1)n}\right]\xi'^2\right. \\ &\qquad \left.+\left[\frac{(n+3)(n+4)}{8(n-1)n(2n+3)(2n+5)}+\frac{\lambda'}{4\mu'(n-1)n(2n+3)}\right]\xi'^4\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{n1}=2\mu'(n-1)n(n+1)\ F\eta'^{n-2}\left\{1-\frac{(n+1)}{2(n-1)(2n+3)}\eta'^2+\frac{(n+3)}{8(n-1)(2n+3)(2n+5)}\eta'^4\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{n2}&=2\mu(n-1)F\xi^{n-2}\left\{1-\frac{(n+1)}{2(2n+3)(n-1)}\xi^2\right\}\\
\beta_{n2}&=-i2\mu(n+2)\frac{G}{\xi^{n+3}}\left\{1+\frac{n}{2(2n-1)(n+2)}\xi^2\right\}\\
\gamma_{n2}&=i2\mu n\ (n+2)\frac{G}{\eta^{n+3}}\left\{1+\frac{(n+1)(n-1)}{2(2n-1)n(n+2)}\eta^2\right\}\\
\delta_{n2}&=2\mu'\ (n-1)F\xi'^{n-2}\left\{1-\frac{(n+1)}{2(n-1)(2n+3)}\xi'^2+\frac{(n+3)}{8(n-1)(2n+3)(2n+5)}\xi'^4\right\}\\
\varepsilon_{n2}&=2\mu(n-1)\ (n+1)F\eta'^{n-2}\left\{1-\frac{n(n+2)}{2(n-1)(n+1)(2n+3)}\eta'^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{n^2+4n+5}{8(n-1)(n+1)(2n+3)(2n+5)}\eta'^4\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(3.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{n3}&=-nF\xi^{n-2}\left\{1-\frac{n+2}{2n(2n+3)}\xi^2\right\}\\
\beta_{n3}&=i(n+1)\frac{G}{\xi^{n+3}}\left\{1+\frac{n-1}{4(2n-1)\ (n+1)}\xi^2\right\}\\
\gamma_{n3}&=-in\ (n+1)\frac{G}{\eta^{n+3}}\left\{1+\frac{1}{2(2n-1)}\eta^2\right\}\\
\delta_{n3}&=-nF\xi'^{n-2}\left\{1-\frac{(n+2)}{2n(2n+3)}\xi'^2+\frac{(n+4)}{8(2n+3)(2n+5)}\xi'^4\right\}\\
\varepsilon_{n3}&=-n\ (n+1)\ F\eta'^{n-2}\left\{1-\frac{1}{2(2n+3)}\eta'^2+\frac{1}{8(2n+3)(2n+5)}\eta'^4\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(3.6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{n4}&=-F\xi^{n-2}\left\{1-\frac{1}{2(2n+3)}\xi^2\right\}\\
\beta_{n4}&=-i\frac{G}{\xi^{n+3}}\left\{1+\frac{1}{2(2n-1)}\xi^2\right\}\\
\gamma_{n4}&=in\frac{G}{\eta^{n+4}}\left\{1+\frac{n-2}{2n(2n-1)}\eta^2\right\}\\
\delta_{n4}&=-\ F\xi'^{n-2}\left\{1-\frac{1}{2n(2n+3)}\xi'^2+\frac{1}{8(2n+3)(2n+5)}\xi'^4\right\}\\
\varepsilon_{n4}&=-(n+1)F\eta'^{n-2}\left\{1-\frac{(n+3)}{2(n+1)(2n+3)}\eta'^2+\frac{(n+5)}{8(n+1)(2n+3)(2n+5)}\eta'^4\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(3.7)$$

ここに，

$$F=\frac{2^n n!}{(2n+1)!},\qquad G=\frac{(2n)!}{2^n n!}\qquad(3.8)$$

である．

問題の主旨から明らかなように，求めるべき係数は B_n, C_n だけである．これらは次のように与えられる．

$n=0$ のとき,

$$B_0=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{01} & \delta_{01}\\ \alpha_{03} & \delta_{03}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_{01} & \delta_{01}\\ \beta_{03} & \delta_{03}\end{vmatrix}}A. \tag{3.9}$$

これに (3.2) および (3.3) を代入して,

$$B_0 \doteqdot \frac{-i\xi^3}{3}A\frac{\left\{(\lambda-\lambda')+\frac{2}{3}(\mu-\mu')-\left[\frac{1}{6}(\lambda+\frac{6}{5}\mu)-\frac{1}{10}(\lambda'+\frac{2}{3}\mu')\right]\xi^2 -\left[\frac{1}{10}(\lambda+\frac{2}{3}\mu)-\frac{1}{6}(\lambda'+\frac{6}{5}\mu')\right]\xi'^2\right\}}{\left\{\left[-\frac{4}{3}\mu+(\lambda'+\frac{2}{3}\mu')\right]+\left[\frac{\lambda}{3}+\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{2}{3}\mu')\right]\xi^2 +\left[\frac{2}{15}\mu-\frac{1}{6}(\lambda'+\frac{6}{5}\mu)\right]\xi'^2\right\}} \tag{3.10}$$

を得る.

$n\geqq 1$ に対しては

$$B_n=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{n1} & \gamma_{n1} & \delta_{n1} & \varepsilon_{n1}\\ \alpha_{n2} & \gamma_{n2} & \delta_{n2} & \varepsilon_{n2}\\ \alpha_{n3} & \gamma_{n3} & \delta_{n3} & \varepsilon_{n3}\\ \alpha_{n4} & \gamma_{n4} & \delta_{n4} & \varepsilon_{n4}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_{n1} & \gamma_{n1} & \delta_{n1} & \varepsilon_{n1}\\ \beta_{n2} & \gamma_{n2} & \delta_{n2} & \varepsilon_{n2}\\ \beta_{n3} & \gamma_{n3} & \delta_{n3} & \varepsilon_{n3}\\ \beta_{n4} & \gamma_{n4} & \delta_{n4} & \varepsilon_{n4}\end{vmatrix}}i^n(2n+1)A \tag{3.11}$$

$$C_n=\frac{\begin{vmatrix}\beta_{n1} & \alpha_{n1} & \delta_{n1} & \varepsilon_{n1}\\ \beta_{n2} & \alpha_{n2} & \delta_{n2} & \varepsilon_{n2}\\ \beta_{n3} & \alpha_{n3} & \delta_{n3} & \varepsilon_{n3}\\ \beta_{n4} & \alpha_{n4} & \delta_{n4} & \varepsilon_{n4}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_{n1} & \gamma_{n1} & \delta_{n1} & \varepsilon_{n1}\\ \beta_{n2} & \gamma_{n2} & \delta_{n2} & \varepsilon_{n2}\\ \beta_{n3} & \gamma_{n3} & \delta_{n3} & \varepsilon_{n3}\\ \beta_{n4} & \gamma_{n4} & \delta_{n4} & \varepsilon_{n4}\end{vmatrix}}i^n(2n+1)A \tag{3.12}$$

に (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) を代入して得られる.

いま, これらを

$$B_n=\frac{[B]_n}{[BC]_n}i^n(2n+1)A, \qquad C_n=\frac{[C]_n}{[BC]_n}i^n(2n+1)A \tag{3.13}$$

とおいて, $[B]_n$, $[C]_n$, $[BC]_n$ などを計算することにする.

まず, ξ, η, ξ', η' などについての最低次の項を計算すると,

$$[BC]_n=\frac{-4n(n+1)}{(2n+3)(2n+1)^2}\frac{(\xi'\eta')^{n-2}}{(\xi\eta)^{n+3}}\left\{\left[\frac{n(n+2)}{(2n-1)}\mu^2-\frac{(2n^2+2n-1)}{(2n-1)}\mu\mu' +\frac{(n+2)}{2}\lambda\mu-\frac{(n+2)}{2}\lambda\mu'-\frac{(2n+3)(n-1)}{2(2n-1)}\lambda'\mu+\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)}\mu'^2\right.\right.$$

$$+\frac{(2n+3)(n-1)}{2(2n-1)}\lambda'\mu'\Big](\xi\xi')^2+\Big[\frac{n^2(n+2)}{(n+1)(2n-1)}\mu^2+\frac{3(2n^3+3n^2-n-1)}{2(n+1)(2n-1)}\mu\mu'$$

$$+\frac{n(n+2)}{2(n+1)}\lambda\mu+\frac{(2n^2+4n+3)}{4(n+1)}\lambda\mu'-\frac{n(n-1)}{2(n-1)(n+1)}\mu'^2\Big](\xi\eta')^2$$

$$+\Big[(n+2)(n+1)\mu^2+\frac{3(2n^3+3n^2-1)}{2(2n-1)n}\mu\mu'+\frac{(2n+3)(2n^2+1)}{4(2n-1)n}\lambda'\mu+\frac{(n-1)(n+1)^2}{n(2n-1)}\mu'^2$$

$$+\frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{2(2n-1)n}\lambda'\mu'\Big](\eta\xi')^2$$

$$+\Big[\frac{(n+2)}{2(2n-1)}\mu^2-\frac{3}{2}\frac{\mu\mu'}{(2n-1)}-\frac{(n-1)}{2(2n-1)}\mu'^2\Big](\eta\eta')^2\Big\}, \tag{3.14}$$

および,

$$[B]_n=i^{n+1}\frac{4(2n+1)}{(2n+3)}n^2(n+1)(n-1)\Big[\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\Big]^2\frac{(\xi\xi'\eta')^{n-2}}{\eta^{n+3}}$$

$$\times\Big\{\Big[-\frac{(n+2)}{n}\mu^2+\frac{1}{n}\mu\mu'-\frac{(2n+3)}{2n}\mu\lambda'+\frac{(n+1)}{n}\mu'^2+\frac{(2n+3)\lambda'\mu'}{2n}\Big]\xi'^2$$

$$+\Big[\frac{-(n+2)\mu^2}{(n+1)}+\frac{(2n+5)}{2(n+1)}\mu\mu'-\frac{\mu'^2}{2(n+1)}\Big]\eta'^2\Big\} \tag{3.15}$$

$$[C]_n=\frac{N^{n+3}}{n}[B]_n \tag{3.16}$$

を得る．ここに，$N=\dfrac{\eta}{\xi}=\dfrac{k}{h}$ である．

当然のことながら，$\lambda=\lambda'$，$\mu=\mu'$ とすれば，$B_n=C_n=0$ を得る．

また，障害物が剛体の場合は，$\mu'\to\infty$ であるから，μ' に対して λ, μ, λ' を無視しうるとすると，

$$[BC]_n=-\frac{2}{(2n+3)(2n+1)^2}\frac{(\xi'\eta')^{n-2}}{\xi^{2n+4}N^{n+3}}\frac{(n-1)[(n+1)^2-n]}{(2n-1)}[n+(n+1)N^2]\mu'\rho'p^2 \tag{3.17}$$

$$[B]_n=\frac{2i^{n+1}(2n+1)n(n-1)}{(2n+3)}\Big[\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\Big]^2A\frac{(\xi'\eta')^{n-2}}{\xi^5N^{n+3}}[(n+1)^2-n]\mu'\rho'p^2 \tag{3.18}$$

をえ，これらから

$$B_n=-i^{n+1}(2n+1)(2n-1)n\Big[\frac{2n\,n!}{(2n)!}\Big]^2\frac{A}{[n+(n+1)N^2]}\xi^{2n-1} \tag{3.19}$$

を得る．同様に，

$$C_n=-i^{n+1}(2n+1)(2n-1)\Big[\frac{2n\,n!}{(2n)!}\Big]^2\frac{N^{n+3}A}{[n+(n+1)N^2]}\xi^{2n-1} \tag{3.20}$$

を得る．これらは平面 P 波が固定された剛体球に入射したときの散乱波の係数を与える．

ところで，障害物の弾性常数も媒質のそれと同じ order である場合には，B_n, C_n の分子に

$(n-1)$ なる factor がかかるため，(3.15)，(3.16) は $n\geqq 2$ に対してだけ用いられる．しかも，$n=2$ とおいて求めた B_2，C_2 は ξ^3 の order となる．このため $[B]_1$，$[C]_1$ においては，(3.15)，(3.16) に対応するものより，さらにもう一項，高次の項を計算しなければならない．これらは次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}[B]_1=&\frac{8A}{15\eta^4\xi\xi'\eta'}\left\{\left[-\mu^2+\mu\mu'-\frac{\lambda\mu}{2}+\frac{\lambda\mu'}{2}\right](\xi\xi')^2\right.\\&\left.-\left[\frac{\mu^2}{2}+\frac{3}{4}\mu\mu'+\frac{\lambda\mu}{4}+\frac{3}{8}\lambda\mu'\right](\xi\eta')^2+\frac{\mu'^2}{4}+\frac{\lambda'\mu}{4}+\frac{3}{8}\lambda'\mu'\right](\xi'\eta')^2\right\}\\ [C]_1=&N^4[B]_1\ .\end{aligned}\right\}\quad(3.21)$$

よって，ξ^3 の order までをとると，結局，次の五個の係数だけが残る．

$$\left.\begin{aligned}B_0&=\frac{i\xi^3\left[(\lambda-\lambda')+\frac{2}{3}(\mu-\mu')\right]A}{[4\mu-(3\lambda'+2\mu')]},\\ B_1&=4A\xi^3\frac{[b]_1}{[bc]_1},\\ C_1&=N^4B_1,\\ B_2&=i\frac{4}{3}A\xi^3\frac{[b]_2}{[bc]_2},\\ C^2&=\frac{N^5}{2\,\mathrm{B}_2}\ .\end{aligned}\right\}\qquad(3.22)$$

ここに，

$$\begin{aligned}[b]_1=&\left(\mu^2-\mu\mu'+\frac{\lambda\mu}{2}-\frac{\lambda\mu'}{2}\right)+\left(\frac{\mu^2}{2}+\frac{3}{4}\mu\mu'+\frac{\lambda\mu}{4}+\frac{3}{8}\lambda\mu'\right)N'^2\\&-\left(\mu\mu'+\frac{\mu'^2}{4}+\frac{\lambda'\mu}{4}+\frac{3}{8}\lambda'\mu'\right)q^2N'^2,\end{aligned}\qquad(3.23)$$

$$\begin{aligned}[bc]_1=&\left(\mu^2-\mu\mu'+\frac{\lambda\mu}{2}-\frac{\lambda\mu'}{2}\right)+\left(\frac{\mu^2}{2}+\frac{3}{4}\mu\mu'+\frac{\lambda\mu}{4}+\frac{3}{8}\lambda\mu'\right)N'^2\\&+\left(2\mu^2+2\mu\mu'+\frac{5}{4}\lambda'\mu\right)N^2+\left(\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu\mu'}{2}\right)N^2N'^2,\end{aligned}\qquad(3.24)$$

$$\begin{aligned}[b]_2=&\left(-2\mu^2+\frac{1}{2}\mu\mu'-\frac{7}{4}\mu\lambda'+\frac{2}{3}\mu'^2+\frac{7}{4}\lambda'\mu'\right)\\&+\left(-\frac{3}{4}\mu^2+\frac{3}{2}\mu\mu'-\frac{\mu'^2}{6}\right)N'^2\end{aligned}\qquad(3.25)$$

$$\begin{aligned}[bc]_2=&\left(\frac{8}{3}\mu^2-\frac{11}{3}\mu\mu'+2\lambda\mu-2\lambda\mu'-\frac{7}{6}\lambda'\mu+\mu'^2+\frac{7}{6}\lambda'\mu'\right)\\&+\left(\frac{16}{9}\mu^2+\frac{25}{6}\mu\mu'+\frac{3}{4}\lambda\mu+\frac{19}{12}\lambda\mu'-\frac{\mu'^2}{9}\right)N'^2\end{aligned}$$

$$+\left(12\mu^2+\frac{27}{21}\mu\mu'+\frac{21}{8}\lambda'\mu+\frac{3}{2}\mu'^2+\frac{7}{4}\lambda'\mu'\right)N^2+\left(\frac{2}{3}\mu^2-\frac{\mu\mu'}{2}-\frac{\mu'^2}{6}\right)N^2N'^2 \tag{3.26}$$

である．また，$q=\dfrac{\xi'}{\xi}=\dfrac{h'}{h}$，$N=\dfrac{\eta}{\xi}=\dfrac{k}{h}$，$N'=\dfrac{\eta'}{\xi'}=\dfrac{k'}{h'}$ である．

これらを用いて，散乱 P 波は

$$\left.\begin{aligned}
\Delta'&=\left[B_0h_0^{(1)}(hr)+B_1h_1^{(1)}(hr)\cos\theta+B_2h_2^{(1)}(hr)\frac{1}{4}(3\cos\theta+1)\right]e^{-ipt}\\
u_1&=-\frac{1}{h^2}\Bigg\{-hB_0h_1^{(1)}(hr)+B_1\left[h\cdot h_0^{(1)}(hr)-\frac{2}{r}h_1^{(1)}(hr)\right]\cos\theta\\
&\quad+B_2\left[h\,h_1^{(1)}(hr)-\frac{3}{r}h_2^{(1)}(hr)\right]\frac{1}{4}(\cos 2\theta+1)\Bigg\}e^{-ipt}\\
v_1&=\frac{1}{h^2}\left[B_1\frac{1}{r}h_1^{(1)}(hr)\sin\theta+B_2\frac{1}{r}h_2^{(1)}(hr)\frac{3}{2}\sin 2\theta\right]e^{-ipt}
\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

として得られ，散乱 S 波は，

$$\left.\begin{aligned}
2\omega'&=-\left[C_1h_1^{(1)}(kr)\sin 2\theta+C_2h_2^{(1)}(kr)\frac{3}{2}\sin\theta\right]e^{-ipt}\\
u_2&=\frac{-1}{k^2}\left[\frac{2}{r}C_1h_1^{(1)}(kr)\cos\theta+\frac{3}{2r}C_2h_2^{(1)}(kr)(3\cos 2\theta+1)\right]e^{-ipt}\\
v_2&=\frac{1}{k_2}\Bigg\{C_1\left[k\,h_0^{(1)}(kr)-\frac{1}{r}h_1^{(1)}\right]\sin\theta\\
&\quad+\frac{3}{2}C_2\left[kh_1^{(1)}(kr)-\frac{2}{r}h_2^{(1)}(kr)\right]\sin\theta\Bigg\}e^{-ipt}
\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

として得られる．

$hr\gg 1$ では，これらは，

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=-\frac{iha^3}{r}\left[\overline{B}_0-\overline{B}_1\cos\theta-\frac{\overline{B}_2}{4}(3\cos 2\theta+1)\right]e^{i(hr-pt)}\\
v_1&=0
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

$$\left.\begin{aligned}
u_2&=0\\
v_2&=-\frac{ika^3}{r}\left[\overline{C}_1\sin\theta+\frac{2}{3}\overline{C}^2\sin 2\theta\right]e^{i(kr-pt)}
\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

となる．ここに，

$$\left.\begin{aligned}
\overline{B}_0&=\frac{B_0}{i\xi^3}=\frac{\left[(\lambda-\lambda')+\dfrac{2}{3}(\mu-\mu')\right]}{[4\mu-(3\lambda'+2\mu')]}A,\\
\overline{B}_1&=\frac{B_0}{\xi^3}=4A\frac{[b]_1}{[bc]_1},\\
\overline{C}_1&=N^4\overline{B}_1,
\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{B}_2&=\frac{B_2}{i\xi^3}=\frac{4}{3}A\frac{[b]_2}{[bc]_2},\\ \overline{C}_2&=\frac{N^5}{2}\overline{B}^2\end{aligned}\right\}$$

である．また，$[b]_1$，$[bc]_1$，$[b]_2$，$[bc]_2$ は (3.23)，(3.24)，(3.25)，(3.26) で与えられる．

(3.29)，(3.30) は入射波を与える

$$u_x=-\frac{i}{h}Ae^{i(hx-pt)} \tag{2.1}$$

と比較して，さらに P 波の波長 λ_P と h，S 波の波長 λ_S と k との関係

$$h=\frac{2\pi}{\lambda_P},\qquad k=\frac{2\pi}{\lambda_S}\left(=\frac{2\pi N}{\lambda_P}\right) \tag{3.32}$$

を考慮に入れると，散乱波の振幅は入射波の波長の二乗に逆比例するという光(7)または音波(8)における Rayleigh 散乱と同様の結果が得られたことがわかる．ただし，光における Rayleigh 散乱においては散乱光の強度分布は，入射波の進行方向に対しても，その逆方向に対してもまったく同様のものとなるが(9)，弾性波における散乱は (3.29)，(3.30) から知られるように，そのような強度分布をしない．光の場合にもその波長に比べて障害球の半径を十分小さいという仮定をおかない，いわゆる Mie 散乱(10)(11) においては，散乱光の強度分布は入射光の進行方向とその逆とで異なったものを与える．

弾性波の散乱においては，障害球の半径を入射波の波長に比べて充分小なるものとしても，障害球の前と後とで散乱波の強度は異なることになる．

また，(3.29)，(3.30)，(3.31) から明らかなように，P 波が入射するときでも，散乱 S 波の振幅は散乱 P 波の振幅より大である．具体的な数値計算の結果，および散乱のために入射波がどのように弱められるかなどの問題については，引き続き第二報にて論ずる．

終始御指導をいただいた松沢武雄先生，金属材料中における超音波の減衰との類似について御教示くださった浅田敏助教授に感謝をささげる．

文献

(1) K. Sezawa : Bull. Earthq. Res. Inst., **10** (1932), 19.
(2) K. Sezawa & K. Kanai : Bull. Earthq. Res. Inst. **17** (1939), 9.
(3) 広根徳太郎・神垣知夫：電子工業 **3** (1954), No. 4, 6.
(4) Lord Rayleigh : Theory of Sound, II, 272.
(5) T. Matuzawa : Bull. Earthq. Res. Inst., **13** (1935), 39.
(6) (5) と同じ．
(7) Lord Rayleigh : Phil. Mag., **41** (1871), 107 and 274; **47** (1899), 375.
(8) (4) と同じ．
(9) 山本義一：気象輻射学, 13.
(10) G. Mie : Ann. Phys., **25** (1908), 377.
(11) H. Blumer : Z. Physik, **32** (1925), 119, **38** (1926), 304, **39** (1926), 195.