強震計上下動成分について*

市　川　政　治**

Sur Non-lineaires Oscillations de Séismographe Vertical (Pour grand tremblement de terre)

M. Ichikawa

(*Section de Sismologie, C. M. O.*)

L'auteur calcula des coefficients de terme de second et troisième ordre de θ à l'equation de mouvement de séismographe vertical de C. M. O. (type d'Ewing, non magnification et période propre 5sec ca.), et leurs influènces sur la mouvement du seismographe.

Les resultats que l'auteur trouva indiquent que l'influènce de terme de second ordre est comparativement petite et terme de troisieme ordre tout à fait négligible.

§1. 緒言

Ewing のつり方によると比較的容易に長い周期が得られるので，上下動地震計にはこの種のつり方が広く用いられている．この場合，地震計の固有周期に対して許されるふれの角 θ には限度があり，その限度を越すと θ の高次の項がきいて来るため，振動は上下非対称となることはよく知られている．現在，われわれの用いている強震計上下動成分も，この型のものであるが，その検定のとき，上下非対称の振動を経験する．そこで，この地震計について，高次の項がどの程度のものか当り，その結果を用い，種々の面からその影響を検討してみた．

§2. 運動方程式

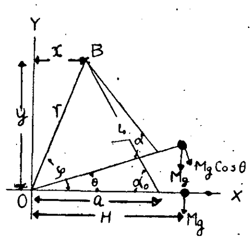

Fig. 1. Shéma d'un séismographe vertical

あらゆる型のつり方に通ずる運動方程式(1)として

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{a}{l_0}\left\{\frac{ay^2}{l_0}\left(\beta-\frac{P_0}{l_0}\right)+P_0x\right\}\theta+\frac{3}{2}\frac{a^2y}{l_0^2}\left(x-\frac{ay^2}{l_0^2}\right)\left(\beta-\frac{P_0}{l_0}\right)\theta^2+\cdots\cdots \qquad (1)$$
$$=A\theta+B\theta^2$$

が求められている．

さらに，筆者の計算によると θ^3 の係数は

* Received Oct. 1, 1954

** 中央気象台地震課

(1) 萩原：振動測定，135～139

$$C=\frac{a^2}{2l_0^2}\left(\beta-\frac{P_0}{l_0}\right)\left\{y^2\left(\frac{4}{3}+6\frac{ax}{l_0^2}-\frac{5a^2y^2}{l_0^4}\right)-x^2\right\}+\frac{axP_0}{6l_0} \tag{2}$$

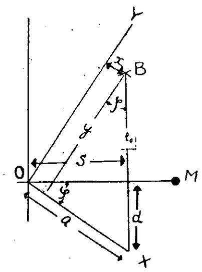

Fig. 2. Shéma d'un séismographe vertical

となる.

こゝで, I : 振子の慣性能率, θ : 振子のふれの角, l_0 : $\theta=O$ のときのバネの長さ, β : バネを単位長だけ伸ばすに要する力

P_0 : $\theta=0$ のときのバネの張力.

Ewing の型の場合には, Fig. 2 から明らかのように, x, y には

$$ay/l_0 = s, \quad d/a = (a-x)/l_0 \tag{3}$$

なる関係があるから, (1) 式, (2) 式はそれぞれ

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\left\{\beta s^2-P_0a\left(1-\frac{d}{l_0}\right)\right\}\theta-\frac{3}{2}sd\left(1-\frac{d}{l_0}\right)\left(\beta-\frac{P_0}{l_0}\right)\theta^2 .$$

および

$$C=\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{P_0}{l_0}\right)\left\{s^2\left(\frac{4}{3}+\frac{a^2-dl_0-5s^2}{l_0^2}\right)-\frac{(a^2-dl_0)^2}{l_0^2}\right\}+\frac{P_0(a^2-dl_0)}{6l_0}$$ となる.

ところで, われわれが強震計上下動成分の検定のときに当面する上下非対称の振動は, 前述のように θ の値が大きくなると, 主として θ^2 項が θ の項に対して無視できなくなるためにおこる. 次に, 中央気象台地震計室で使用していた52年型強震計上下動成分について $\theta, \theta^2, \theta^3$ の係数を計算しよう.

§ 3. 固有周期 To と s, To と $\theta, \theta^2, \theta^3$ の各係数との関係, その他

まず, この地震計のバネの常数 β をきめよう.

これは $$\beta=\frac{\mu d^4}{64NR^3} \tag{4}$$

こゝで, μ : バネの剛性率, N : 巻数

d : 針金の直径, R : バネの半径

52年型の場合は

$$d=0.3\text{cm}, \quad R=2.15\text{cm}, \quad N=9, \quad \mu=8.1\times10^{11} \quad \text{C. G. S.}$$

であるから, β は

$$\beta=1.15\times10^6 \text{ C. G. S.}$$

となる.

β は他の方法でもきめることができる. すなわち, θ^2 以上の項を無視するとき, この振子の固有周期 T_0 は

$$T_0 = 2\pi\,(I/MgH)^{\frac{1}{2}}.\Gamma$$

こゝで, $\Gamma=\left\{ky/\left[(1-k)\frac{ay^2}{l_0^2}+kx\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$, $P_0=\beta k\,l_0$, M : 振子の質量 H : 重心距離, g : 重力の加速度

上式中の $2\pi\sqrt{I/MgH}$ はこの地震計の実体振子としての周期で，地震計固有のものである．もしこの値がわかっていれば，この地震計の固有周期と，そのときの地震計の各ディメンジョンから k，したがって，β を決めることができる．地震課酒井技官の測定によると，中央気象台地震計室で使用していた52年型に対しては，

$$2\pi\sqrt{I/MgH}=1.0\text{sec},\quad M=4.17\text{kg},\quad H=22.7\text{cm},$$

となる．また，筆者の測定によると，$T_0=4.8$sec に対応する各ディメンジョンは

$$d=4.7\text{cm},\quad a=8.4\text{cm},\quad y=20.6\text{cm},\quad x=-5.5\text{cm}$$

であるから，これらの値を前の式に入れて β を求めると，

$\beta=1.12\times10^5$ C.G.S. となり，(4) 式から求めた値と大略一致する．

次に，この値を用いて，T_0 と s，および s をパラメーターとして T_0 と θ, θ^2, θ^3 の各係数との関係を(1)式および(2)式から計算すると，Fig. 3, 4 に示すような関係が得られる (Fig. 4 には B/Aとして示しておいた)．

上に求めた結果を用い，2sec から 7sec までの各周期に対し，$(B/A\times\theta)$ の値が 0.1, 0.05, 0.01 となるような θ を求め，この角を振幅に直して図示すると，Fig. 5 のようになる．これによると，たとえば，周期 5secの場合は 0.1 としても，これに対応する振幅は 4mm に過ぎない．すなわち，θ^2 の項を無視するためには，ふれの角をあまり大きくすることは許されないことがわかる．のちに示すように，θ^2 の項を入れた運動方程式の解からもこのことがうかがえる．

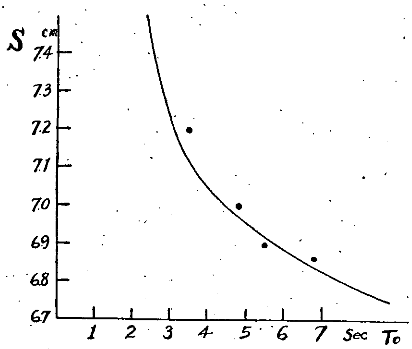

Fig. 3　$T_0\sim s$

●：Valeur expérimentale.

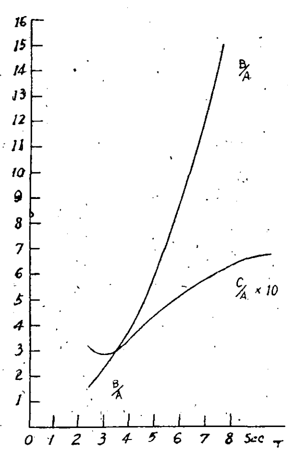

Fig. 4.　Relations entre périodes propres et B/A, C/A

A ; coefficient de terme de premier ordre;

B ;　〃　〃　second　〃

C :　〃　〃　troisiéme　〃

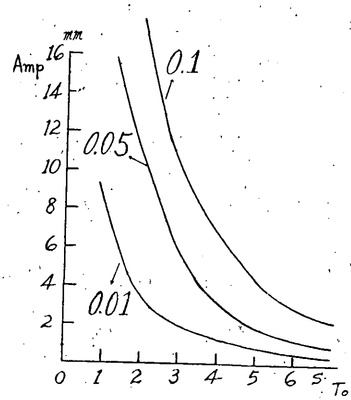

Fig. 5.　$T_0\sim Amp.$

§ 4.　$\theta''+2\varepsilon\theta'+n^2\theta+\alpha\theta^2=A\sin pt$ の解

上の計算から，52 年型の上下動成分の場合 θ^2 の項はわれわれの必要とする振幅に対して無視でき

ないことがわかった．そこで，θ^2 の項のはいった運動方程式をとき，この結果を用いていろいろと当ってみよう．(1)式には摩擦の項も外力の項もはいっていなかったが，こゝではこれを考慮する．

そこで，運動方程式は　(5)

$$\theta''+2\varepsilon\theta'+n^2\theta+\alpha\theta^2=\mathrm{A}\ \sin pt$$

と書ける．上式はいわゆる非線型微分方程式で，正確には解けないから

$$\theta=\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots$$

(こゝで，θ_1 は θ の第 1 近似解，$\theta_2,\cdots\cdots$ はそれよりもオーダーの高い値であるとする)とおき，これを(5)式に入れて，オーダーの等しい項をまとめると

$$\theta_1''+2\varepsilon\theta_1'+n^2\theta_1=\mathrm{A}\ \sin pt \qquad (6)$$

$$\theta_2''+2\varepsilon\theta_2'+n^2\theta_2+\alpha\theta_1^2=0 \qquad (7)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これらの方程式をつぎつぎに解き，それらの和をもって θ の近似解とする．

ところで，(6)式の一般解は $n>\varepsilon$ のときはよく知られているように

$$\theta_1=e^{-\varepsilon t}\ (C_1\ \cos\sigma t+C_2\ \sin\sigma t)\ +M\ \sin\ (pt-p\tau) \qquad (8)$$

たゞし，　$C_1,\ C_2$ ：任意常数

$$M=\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}},\quad \mathrm{tg}p\tau=\frac{2\varepsilon p}{n^2-p^2},\quad \sigma^2=n^2-p^2.$$

さて，(8)式を(7)式に代入し，この一般解を求めると，

$$\theta_2=e^{-\varepsilon t}\ (D_1\ \cos\ \sigma t+D_2\ \sin\ \sigma t)-\alpha\Big[\frac{e^{-\varepsilon t}}{2n^2}(C_1^2+C_2^2)+\frac{e^{-\varepsilon t}}{4\sigma}\Big\{\frac{1}{n^2+8\sigma^2}\ (\varepsilon\sin 2\sigma t+3\sigma$$

$$\times\cos\ 2\sigma t)-\frac{1}{n^2}\ (\varepsilon\ \sin\ 2\sigma t+\sigma\cos 2\sigma t)\Big\}\ (C_1^2-C_2^2)+\frac{e^{-2\varepsilon t}}{2\sigma}\ \Big\{\frac{1}{n^2+8\sigma^2}\ (3\sigma\ \sin 2\sigma t-\varepsilon$$

$$\times\cos\ 2\sigma t)+\frac{1}{n^2}\ (-\sigma\sin 2\sigma t+\varepsilon\cos 2\sigma t)\Big\}\ C_1C_2+\frac{Me^{-\varepsilon t}}{2\sigma}\ \Big\{\Big(\frac{1}{2\sigma+p}-\frac{1}{p}\Big)\sin(\sigma t+pt-p\tau)$$

$$+\Big(\frac{1}{2\sigma-p}+\frac{1}{p}\Big)\sin\ (\sigma t-pt+p\tau)\Big\}\ C_1+\frac{M}{2\sigma}\ e^{-\varepsilon t}\Big\{-\Big(\frac{1}{2\sigma+p}-\frac{1}{p}\Big)\cos\ (\sigma t+pt-pt)+$$

$$\Big(\frac{1}{2\sigma-p}+\frac{1}{p}\Big)\ \sin\ (\sigma t-pt+p\tau)\Big\}\ \mathrm{C}_2-\frac{M^2}{4\sigma}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2+(2p+\sigma)^2}\Big\{(2p+\sigma)\ \cos(2pt-2p\tau)-\varepsilon$$

$$\times\sin(2pt-2p\tau)\Big\}+\frac{1}{\varepsilon^2+(2p-\sigma)^2}\Big\{\varepsilon\ \sin(2pt-2p\tau)-(2p-\sigma)\cos(2pt-2p\tau)\Big\}\Big)+\frac{M^2}{2n^4}\Big]\cdots\cdots(9)$$

こゝで，　$D_1,\ D_2$ ：任意常数

となる．以下同様にして，$\theta_3,\ \theta_4\cdots\cdots$ を求めることができるが，この問題に関するかぎりは，θ の近似解として $\theta_1+\theta_2$ くらいまでで充分と思われるから，θ の解として

$$\theta=\theta_1+\theta_2=(8)+(9)$$

を採用する．

上の θ_2 の解のうち，$\dfrac{M^2}{2n^2}$ は，時間には無関係で，地震計の固有周期，減衰比および地動の周期によって決まる常数であって，上下非対称振動の第一の原因である零線のずれを示す項である．また，M は振動倍率係数であるから，地震計が共振状態にあるときは，二次の高調波も加わってその非対称さは大きくなる恐れがある．この点からも減衰比は8近傍におさえておく必要がある．

§5. 強制振動の際の非対称

上に求めた解を用い，To=5sec，v=7.8 の強震計上下成分に，振幅 2.5cm，周期 5sec の正弦型の振動が加わったときの地震計の振動状況を示したものが Fig. 6 である．図中，(a) が自乗の項を無視したときの振動で，いまの場合はこれに二次の高調波 (b) と，零線のずれ $\alpha\dfrac{M^2}{2n^2}$ が加わって，地震計の振動は結局 (c) のようになる．その非対称さは相当大きいが，(c) の全振幅は (a) のそれとほとんど変らない（これは (b) の振幅が小さいためと，これに (a) が適当に加減されたためである）．したがって，われわれの観測の範囲では地動が比較的規則正しい振動ならば（表面波のように）その振動記象の全振幅そのものの値は大してかわらないから，従来のように全振幅を2で割って求めるという操作の下に地動の振幅を求めるならば，二次の項の影響はほとんど消えることになる．

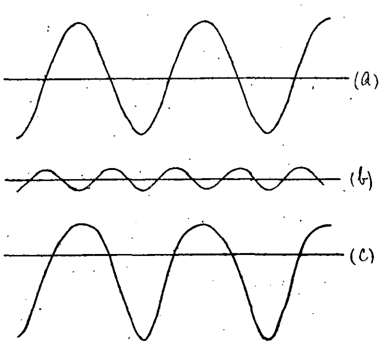

Fig. 6. Quand on applique une force sinusoïdale $f=a\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t\right)$ à ce systeme, oscillations du systeme deviendront comme(c)
(a) = oscillations premiéres,
(b) = oscillations secondaires,
(c) = (a) + (b) + constant,

§6. 自由振動の際の非対称

自由振動の場合は，空気の抵抗が関係するだけで，ε の値は非常に小さいから，(8)，(9)はそれぞれ

$$\theta_1=e^{-\varepsilon t}\,(C_1\cos\sigma t+C_2\sin\sigma t) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\theta_2=&e^{-\varepsilon t}\,(D_1\cos\sigma t+D_2\sin\sigma t)\\&-\alpha\Big[\frac{e^{-2\varepsilon t}}{2n^2}(C_1{}^2+C_2{}^2)+\Big\{\frac{3}{4(n^2+8\sigma^2)}-\frac{1}{4n^2}\Big\}e^{-2\varepsilon t}\cos 2\sigma t\,(C_1{}^2-C_2{}^2)\\&+\frac{e^{-2\varepsilon t}}{2}\Big(\frac{3}{n^2+8\sigma^2}-\frac{1}{n^2}\Big)C_1\,C_2\sin 2\sigma t\Big]\end{aligned} \tag{11}$$

となる．いま，地震計に一定の振幅を与えて自由振動をさせるとすると，初期条件は

$$t=0\;:\;\theta=\mathrm{A},\;\theta'=0$$

となる．ところで，θ，θ' は $\theta=\theta_1+\theta_2$，$\theta'=\theta'_1+\theta'_2$ であるから，上の条件は

$$t=0\;:\;\theta_1=\mathrm{A},\;\theta_1'=0$$
$$\theta_2=0,\;\;\theta_2'=0$$

と分けて考えられる．これから (10)，(11) のC_1, C_2, D_1, D_2, を決めると，

$$C_1=\mathrm{A},\ C_2=0,\ D_1=\frac{\alpha C_1^2}{2n^2}+\frac{\alpha C_1^2}{4}\left(\frac{3}{n^2+8\sigma^2}-\frac{1}{n^2}\right),\ D_2=0$$

となり，この場合の振動の式は

$$\theta=\left\{\mathrm{A}+\frac{\alpha\mathrm{A}^2}{2n^2}+\frac{\alpha\mathrm{A}^2}{4}\left(\frac{1}{n^2+8\sigma^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right\}\cos\sigma t\ e^{-\varepsilon t}+\frac{\alpha\mathrm{A}^2}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^2+8\sigma^2}\right)$$
$$\times\cos 2\sigma t\ e^{-2\varepsilon t}-\frac{\alpha\mathrm{A}^2}{2n^2}e^{-\varepsilon t}$$

となる．いま，$T_0=5\mathrm{sec}$, $\varepsilon=0.008$, 初めの振幅 2cm のときの自由振動の減衰状態を計算した結果が Fig. 7 で，Fig. 8 は $T_0=5.1\mathrm{sec}$ のときの中央気象台で使用中の地震計の自由振動である(Fig. 7

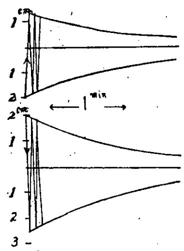

Fig. 7.　Oscillations libres calculées
$T_0=5s$,　$v'=1.01$,
amplitude initiale$=2$cm

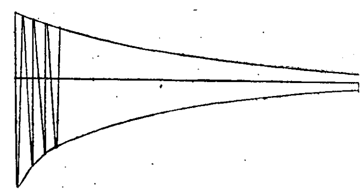

Fig. 8.　Oscillations libres actuelles
$T_0=5.1s$,　$v'=1.01$
amplitude initiale$=2$cm

は実際の自由振動と比較するため一分を 3cm としてある)．　この計算値，実験結果は非常によくあっている．計算の結果によると，振幅が 5mm くらい以下でなければ，上下対称にならない．これは §3 の結果とほゞ一致する．

§7. 減衰比を求める場合に生ずる非対称

減衰比を求める際に，上から振らせて決めた場合と，下から振らせて決めた場合とで，その値が極端にちがうことが多い．これも二次の項の影響によるのかどうかあたってみた．この場合，ある初速を与えて変位させるとすると，初期条件は　前と同様

$$t=0\ :\ \theta_1=0,\ \ \theta_1'=V_1,\ \ \theta_2=0,\ \ \theta_2'=0$$

となる．これから C_1, C_2, D_1, D_2 を決めると，

$$C_1=0,\quad C_2=\frac{V_1}{\sigma},\ D_1=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+8\sigma^2}\right)\alpha C_2^2,\quad D_2=-\alpha\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+8\sigma^2}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{4\sigma}\right)C_2^2$$

となり，θ は

$$\theta=\frac{-\alpha}{2n^2}\ \frac{V_1^2}{\sigma^2}e^{-2\varepsilon t}+\frac{\alpha}{4\sigma}\left\{\varepsilon\left(\frac{1}{n^2+8\sigma^2}-\frac{1}{n^2}\right)\sin 2\sigma t+\sigma\left(\frac{3}{n^2+8\sigma^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\cos 2\sigma t\right\}\frac{V_1^2}{\sigma^2}e^{-2\varepsilon t}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+8\sigma^2}\right)\frac{\alpha V_1^2}{\sigma^2}\cos\sigma t\ e^{-\varepsilon t}-\alpha\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right.$$

$$-\frac{1}{n^2+8\sigma^2}\Big)\Big(\frac{1}{4\sigma}\Big)\frac{V_1{}^2}{\sigma^2}\sin\sigma t\, e^{-\varepsilon t}+\frac{V_1}{\sigma}\sin\sigma t\, e^{-\varepsilon t}$$

となる．上式中，$V_1/\sigma\ \sin\sigma t\, e^{-\varepsilon t}$ 以外の項が自乗の項によるもので，これがこの場合の上下非対称の原因である．Fig. 9 は $T_0=5$sec, $v=8$ としたときの計算結果で，この図から v をきめると，(a) の場合は $v=6.9$, (b) の場合は $v=9.3$ となり，本来の値 $v=8$ と，それぞれ ±15% くらい違い，両者の平均が真の値 $v=8$ に近い値となる．

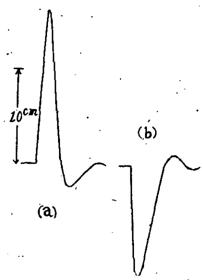

Fig. 9. Oscillations amortissantes calculées. Quand le terme secondaire est négligible, il faut devenir même valeur en deux cas (a) et (b)

実際には，v の違いはさらに大きく，一方からの値はある正常な値であるに反し，他から求めた場合は過減衰というようなこともある．この場合には，v の正しい値は非常に大きな値なのではないだろうか．

§ 8. 結　論

以上，52年型強震計上下動成分についての計算結果を総合すると，

(i) 自乗の項の係数は θ の項のそれに比して相当大きな値であるから，この影響を消すためには，ふれの角をごく小さな値に制限しなければならない．

(ii) しかし，地動が単純な場合には，その振幅が大きいときは記象は著しく上下非対称となるが，振幅そのものはあまり変化を受けないから，複振幅から振幅を求めるようにするならば二次の項の影響はほとんど消える．

(iii) 摩擦係数を求める際は，二次の項の影響をさけるため，$T_0=5$sec くらいならば振幅はたかだか 1cm くらいのところから読み始めるべきである．

(iv) 減衰比は上から求めた値と，下から求めた値の平均をとれば二次の項の影響は大体とれる．

最後に，いろいろ御批はんいただいた井上地震課長ならびに宇佐美氏にお礼申しあげます．