

# SH波による崖の振動の一例

宇佐美 龍夫\*

崖は自由端であるから振巾が特に大きくなるということは、よくいはれているけれども崖の振動を一般的に解くことはむずかしい。しかし、直角な崖にSH波が入射する時には容易に解がえられる。以下計算の一例を示す。

§ 1. 第1図のような座標系をとり、物質は  $x \geq 0, z \geq 0$  の部分を占めているとする。また、SH波を考えるから、紙面に垂直な方向の振動だけが存在するとする。ここに、time factor が  $e^{i\omega t}$  であるような平面SH波が入射すると、 $x=0$  および  $z=0$  なる表面上の振巾はいたるところ、入射波の振巾の4倍になつてしまう。これではおもしろくないから、第1図のようにA点にある線状の波源から発散する波を考える。また、波源Aの  $x=0$  および  $z=0$  なる面に対する写像を順次にB, C, Dとする。第1図の  $a, b$  等は波源および写像の座標である。さて、H. Nakano によれば  $x, z$  が正の実数であるとき

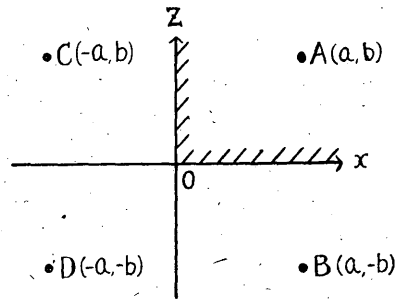


Fig. 1.

$$H_{(2), 0}(hr) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha z} e^{i\xi x}}{\alpha} d\xi$$

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 - h^2}, \quad h^2 = \rho p^2 / \mu, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

である。我々は原点の近く、つまり  $x < a, z < b$  の範囲を考える。この範囲に適用しうる、波源 A, B, C, D から出る SH 波の振巾は次のように書くことができる。

$$v_A = e^{i\omega t} H_{(2), 0}(hr) = e^{i\omega t} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha(z-b) - i\xi(x-a)}}{\alpha} d\xi, \quad r = \sqrt{(z-b)^2 + (x-a)^2}$$

$$v_B = e^{i\omega t} H_{(2), 0}(hr') = e^{i\omega t} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(z+b) - i\xi(x-a)}}{\alpha} d\xi, \quad r' = \sqrt{(z+b)^2 + (x-a)^2}$$

$$v_C = e^{i\omega t} H_{(2), 0}(hr'') = e^{i\omega t} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha(z-b) + i\xi(x+a)}}{\alpha} d\xi, \quad r'' = \sqrt{(z-b)^2 + (x+a)^2}$$

\* 中央気象台地震課

$$v_D = e^{i\nu t} H_{(2),0}(hr''') = e^{i\nu t} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(z+b)+i\xi(x+a)}}{\alpha} d\xi, \quad r''' = \sqrt{(z+b)^2 + (x+a)^2}$$

さて、

$$v = v_A + v_B + v_C + v_D = e^{i\nu t} \frac{4i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha b + i\xi a} \cos \xi x \cosh \alpha z}{\alpha} d\xi$$

とおくと、この  $v$  は  $\alpha = \sqrt{\xi^2 - h^2}$  だから運動方程式

$$\mu \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

を満足し、かつ境界条件

$$z = 0 : \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$x = 0 : \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

を満足するから、所用の解であることがわかる。

§ 2.  $v$  を計算するのに  $hr \gg 1$  として  $H_{(2),0}(hr)$  の近似式を使ふ。つまり、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{\pi}{4}i} \left\{ \frac{e^{-ihr}}{\sqrt{hr}} + \frac{e^{-ihr'}}{\sqrt{hr'}} + \frac{e^{-ihr''}}{\sqrt{hr''}} + \frac{e^{-ihr'''} }{\sqrt{hr'''}} \right\} e^{i\nu t} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{\pi}{4}i} A e^{i\theta + i\nu t} \end{aligned}$$

$$A^2 = \left( \sum \frac{\cosh r}{\sqrt{hr}} \right)^2 + \left( - \sum \frac{\sinh r}{\sqrt{hr}} \right)^2, \quad \tan \theta = - \sum \frac{\sinh r}{\sqrt{hr}} \sqrt{\sum \frac{\cosh r}{\sqrt{hr}}}$$

$\Sigma$  は波源と、その写像についての和を表わす。こゝで  $z=0$  における振巾を考えると ( $x=0$  面上でも同様なことがいえる)

$$A^2 = 4 \left( \frac{\cos hr}{\sqrt{hr}} + \frac{\cos hr''}{\sqrt{hr''}} \right)^2 + 4 \left( \frac{\sin hr}{\sqrt{hr}} + \frac{\sin hr''}{\sqrt{hr''}} \right)^2$$

$$\therefore \frac{h}{4} A^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} + \frac{2\cos(r-r'')h}{\sqrt{rr''}}$$

$$\therefore 2 \left( \frac{1}{\sqrt{hr}} + \frac{1}{\sqrt{hr''}} \right) \geq A \geq 2 \left( \frac{1}{\sqrt{hr}} - \frac{1}{\sqrt{hr''}} \right) \quad x > 0$$

で、振巾  $A$  は  $z=0$  面上で原点から離れるにつれて、 $2 \left( \frac{1}{\sqrt{hr}} + \frac{1}{\sqrt{hr''}} \right)$  と  $2 \left( \frac{1}{\sqrt{hr}} - \frac{1}{\sqrt{hr''}} \right)$  とに囲まれた範囲を振動しながら減少してゆき、無限遠で零になるけれども、極大値は急に減少することはない(第2図)。時によると増加することさへある。したがって  $2 \left( \frac{1}{\sqrt{hr}} + \frac{1}{\sqrt{hr''}} \right)$  の曲線を

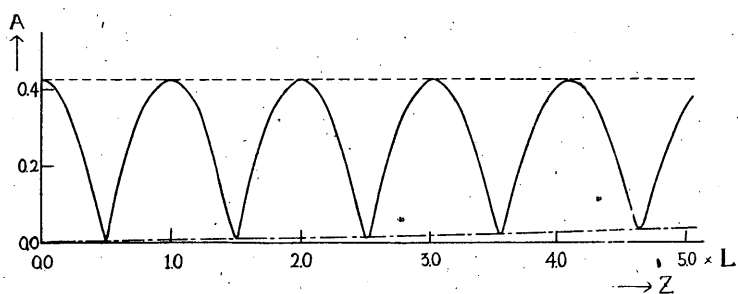


Fig. 2.(1)  $m=7, n=12, \text{ at } x=0$

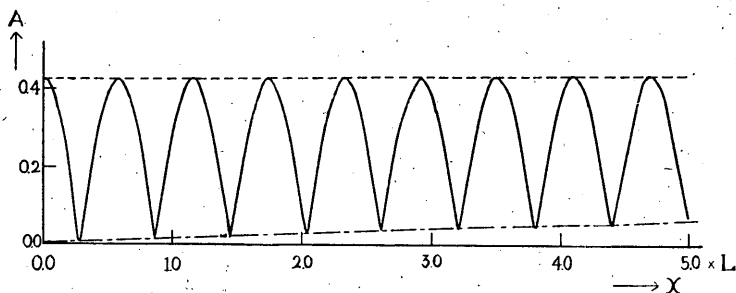


Fig. 2.(2)  $m=7, n=12, \text{ at } z=0$

Graphs of  $A$  on the surface as function of distance from the point  $x=0, z=0$ .

Dotted line:  $2\left(\frac{1}{\sqrt{hr}} + \frac{1}{\sqrt{hr''}}\right)$  curves represent upper limit of  $A$ .

Chain line:  $2\left(\frac{1}{\sqrt{hr}} - \frac{1}{\sqrt{hr''}}\right)$  curves represent lower limit of  $A$ .

みると崖の端は自由端だから、振巾が大きくなるとはいへない。これは SH 波の振動方向が第 1 図の紙面に垂直であることを考えればもつともである。しかし、

原点で  $\cos(r-r')h = 1$  となるから、こゝで振巾  $A$  の曲線は上限曲線  $2\left(\frac{1}{\sqrt{hr}} + \frac{1}{\sqrt{hr''}}\right)$  に接して極大値をとるが

原点から離れると急に減少して初めの極小値に達し、下限曲線  $2\left(\frac{1}{\sqrt{hr}} - \frac{1}{\sqrt{hr''}}\right)$  に接する。

したがつてこゝまでの間で考えると、いわゆる、“自由端”が成立するが、その後振巾は再び増減をくり返すことになる。第 2 図は計算の 1 例で、 $b=Lm, a=Ln$  とおき  $m=7, n=12$  の場合である。 $L$  は  $2\pi/h$  に等しく波長を示す

以上は波源で  $e^{i\omega t}$  に比例する振動のあつた場合であるが、初めに任意の変位が与へられた場合に拡張できる。

$v_A$  として  $H_{(2),0}(hr) \cos pt$  をとつてもよいから、こゝでは簡単のためこの実数部分

$$\cos pt \cdot J_0(hr)$$

をとることとする。又  $p=hV, V=\sqrt{\mu/\rho}$  である。

したがつて

$$v_A = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2} h \cdot \lambda \cdot J_0(hr) J_0(h\lambda) \cos Vht \, dh \cdot d\lambda$$

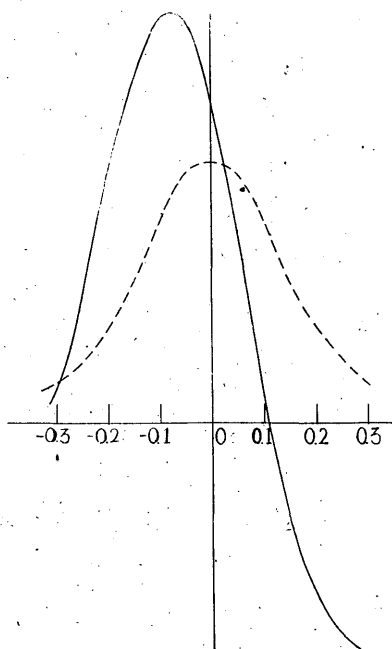


Fig. 3

Displacement at  $x=z=0$  due to initial displacement  $e^{-a^2r^2}$   
 Dotted curve shows  $e^{-a^2r^2}$  when  $a=5$ .  
 Ordinate: arbitrary  
 Abscissa:  $t - \sqrt{(a^2 + b^2)}/V$  for full line,  
 $r$  in unit  $L$  for dotted line.

とおくことができる。これは  $t=0$  の時  $v_A = e^{-a^2r^2}$  なる変位が与へられた場合に相当する。

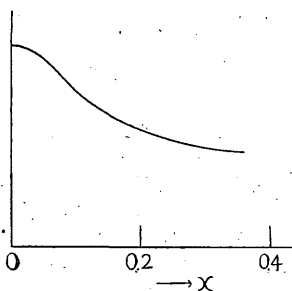
したがつて

$$v_A = \frac{1}{2a^2} \int_0^\infty h e^{-\frac{h^2}{4a^2}} J_0(hr) \cos Vht \cdot dh$$

$hr \gg 1$ , 且つ発散する波だけをとるとすれば

$$v_A = \frac{1}{4a^2 \sqrt{\pi r}} \int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{4a^2}} [\cos h(r-Vt) + \sin h(r-Vt)] dh$$

こゝで  $\cos$  及  $\sin$  を展開し、且つ



Curve of max. amplitude on the surface  $z=0$  due to initial displacement  $e^{-a^2r^2}$  expressed as a function of  $x$ .

Fig. 4

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{4a^2}} h^{n+\frac{1}{2}} dh = (2a)^{n+\frac{1}{2}} a \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{4}\right)$$

を使へば

$$v_A = \frac{1}{2\sqrt{2a\pi r}} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left[ 1 - \frac{(r-Vt)^2}{2!} (2a)^2 \frac{3}{4} + \frac{(r-Vt)^4}{4!} (2a)^4 \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{(r-Vt)^6}{6!} (2a)^6 \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} + \dots \right] + \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \left[ (r-Vt)(2a) \frac{1}{4} - \frac{(r-Vt)^3}{3!} (2a)^3 \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(r-Vt)^5}{5!} (2a)^5 \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} \dots \right] \right\}$$

同様に  $v_B, v_C, v_D$  が求まる。それらの和が求めるものである。第3図は座標の原点における  $\Sigma v$  の形である。

数値計算に當つては長さの単位を波長  $L$  にとり  $a=5, V=1$  とした。第4図は  $z=0$  なる面上の各点の最大振幅が  $x$  に対して変化する有様で、これによると振幅の減少はおそい。大雑把にいへ

ば、初めの変化の山が鋭いほど、原点の近くで A, B からくる波と C, D からくる波の二つに分離してしまうから、そこまでの間では最大振幅は急にへり原点の約  $\frac{1}{2}$  になるが、その後の変化はゆつくりしている。

もつと詳しいことは P 又は SV 波の場合を考へなくてはならない。

Reference

H. Nakano. Jap. Journ. of Astr. & Geophys. 2 (1925) p. 12

---

**An Example of Vibration of Cliff caused by SH-wave**

T. USAMI

(*Seismological Section, Cent. Met. Obs.*)

The vibration of a cliff due to a cylindrical SH-wave is studied and some numerical examples are given graphically. From these figures, we can see that the amplitude of vibration of a cliff, at least in the case of SH-wave, does not become large at its end in spite of our expectation, which phenomena seems rather natural when we consider the relation between the direction of displacement and surface.