震　　源（第4報）

内部球窩に Aperiodic な力が作用する場合

高　木　　聖*

§1. 序

私は先に震源（第1報）(1) において，地震の起り方につき定性的な事を述べておいた。それは地殻内に岩漿溜が存在し，時にこの中の熔岩が爆発して地震を発生すると言うのであつた。その時初動分布の発生機構につき論究したのであるが，それによれば岩漿溜の形を二種類に分類し，第1図A，Bの様な岩脈型式の岩漿溜と，同図Cの様な円壔型式の岩漿溜とにした。これらは次の様な点において相違するものである。即ちこれらの内部×点にて爆発が起つた際，その圧力波は岩漿を伝播して，岩漿溜の側壁に達し，最初第1図Aの場合には p 点のみに力を及ぼし，第1図Bの場合には q, r 二点のみに力を及ぼし，第1図Cの様な岩漿溜では円輪のみに力を及ぼすか，又は第1図Aと同じになるかであり，それぞれ他の部分にはまだ全然力の作用がないと考えられる。こういう力の分布の時に P 波の初動分布はどうなるであろうかというのが問題であつた。

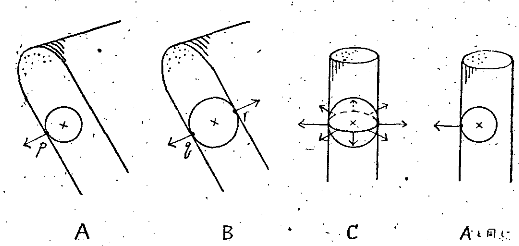

Fig. 1　Mechanism at the Origin of Earthquake

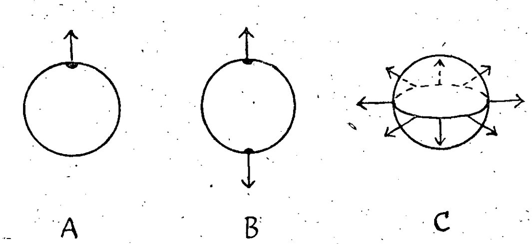

Fig. 2　Mathematical Expression

そこで震源（第2報）(2) においては，第1図のような力の分布を数学的に表現するのに都合のよいように第2図のような球面上の力の分布に置きかへて計算を進めたのであつた。それは第1図Aの様な場合は第2図Aの様に内部球窩の一極のみに力が作用し，他には全然力がないとした。又第1図Bの様な場合には，第2図Bの様に，両極のみに外向の力が作用するとし，第1図Cの様な場合には第2図Cの様に内部球窩の赤道部分のみに帯状に力が作用して，他には全然力が存在しないとしたのである。しかし計算の簡単のために，このような分布の振動力が作用しているとして問題を解いたのであつた。その結果 P 波の初動分布は大体頂角 90° の円錐型になり，しかも第2図 A, B

*中央気象台研修所

(1) 験震時報　第 13 巻（1943）

(2) 験震時報　第 14 巻（1950）

の場合は押円錐型（P 波の初動の押波，引波の分布が内部球窩の中心を頂点とする円錐形により限られ，その内部全部が押波となり，他は引波となるもの，従つて球面上の分布に置きかへてみると，赤道をはさむ帯状の部分が引波となり，両極の部分が押波となるものである）となり，第２図Ｃの場合は引円錐型（P 波の初動の押波，引波の分布が内部球窩の中心を頂点とする円錐形により限られ，その内部が引波となり，他は全部押波となるもの，従つて球面上の分布に置きかへてみると，赤道をはさむ帯状の部分が押波となり，極の部分が引波となるものである）となる傾向を示す事がわかつた。

しかしこれはどこまでも振動力に対する解であつて，地震の様な急激に始まる現象に対しては，果してその様になるかどうかはまだ分らない所である。即ち波動の伝播を考へなければならないからである。それによると全部押波になるのではないかと言う疑問を生ずる。そこで力の作用の仕方を急激な現象にあてはまる様に Aperiodic なものと仮定して，同様の力の分布の時に，どの様になるか数学的実験を試みる事にした。

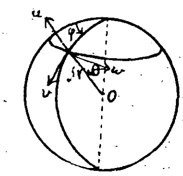

Fig. 3
Coordinate Axis

§ 2.　運動方程式の解

この試みに都合のよい座標の取り方は，第３図の様な球座標によるのが便利である。この様に座標を取れば，弾性体の運動方程式は次の様になる。勿論地殻は弾性体であると仮定する。

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\triangle}{\partial r}-\mu\left\{\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\omega_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\omega_\theta}{\partial\varphi}\right\} & (1)\\ \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\triangle}{\partial\theta}-\mu\left\{\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\omega_r}{\partial\varphi}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\omega_\varphi r)}{\partial r}\right\} & (2)\\ \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\triangle}{\partial\varphi}-\mu\left\{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\omega_\theta r)}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\omega_r}{\partial\theta}\right\} & (3)\end{cases}$$

こゝに ρ は実質部分の質量，λ，μ は弾性常数であり，u，v，w はそれぞれ r，θ，φ 方向の分変位である。又 $\triangle$，ω_r，ω_θ，ω_φ は

$$\triangle\equiv\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(ur^2\sin\theta)}{\partial r}+\frac{\partial(vr\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(wr)}{\partial\varphi}\right] \tag{4}$$

$$\omega_r\equiv\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(wr\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(vr)}{\partial\varphi}\right] \tag{5}$$

$$\omega_\theta\equiv\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\partial(wr\sin\theta)}{\partial r}\right] \tag{6}$$

$$\omega_\varphi\equiv\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(vr)}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \tag{7}$$

なる量を示すものである。これ等の物理的意味は $\triangle$ は体積膨脹率であり，ω_r，$-\omega_\theta$，ω_φ はそれぞれ r，θ，φ 方向を軸とする廻転量の分値である。

(1)－(7) より次の波動型式の方程式を得る。

$$\rho\frac{\partial^2\triangle}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2\triangle}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\triangle}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\triangle}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial\triangle}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\triangle}{\partial\varphi^2}\right) \tag{8}$$

$$\rho\frac{\partial^2\omega_r}{\partial t^2}=\mu\left\{\frac{\partial^2\omega_r}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial\omega_r}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\omega_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\omega_r}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\omega_r}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{9}$$

$$\rho\frac{\partial^2\omega_\theta}{\partial t^2}=\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2(\omega_\theta r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\omega_\theta}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2(\omega_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega_r}{\partial r\partial\theta}\right\} \tag{10}$$

$$\rho\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial t^2}=\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(\omega_\varphi r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\omega_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\right\}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\omega_\theta}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\omega_r}{\partial\varphi\partial r}\right] \tag{11}$$

これらを解くに当つて，$\triangle$，ω_r，ω_θ，ω_φ は変数分離型の解を有するものと考へる。即ち

$$\triangle\equiv\triangle'(r,\ \theta,\ \varphi)T_\triangle(t) \tag{12}$$

と分離出来るとすれば，(8) は

$$\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{1}{T_\triangle(t)}\frac{d^2T_\triangle(t)}{dt^2}=\frac{1}{\triangle'(r,\theta,\varphi)}\nabla^2\triangle'(r,\theta,\varphi) \tag{13}$$

となる。これが成立するためには一般に各項が同一常数に等しくなければならない。こゝに $T_\triangle(t)$ は振動する様な解を求めるのが便利であるから

$$\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{1}{T_\triangle(t)}\frac{d^2T_\triangle(t)}{dt^2}=-h^2 \tag{14}$$

$$\frac{1}{\triangle'(r,\theta,\varphi)}\nabla^2\triangle'(r,\theta,\varphi)=-h^2 \tag{15}$$

とおく。こゝに h は任意の数でさしつかえない。(14) の一般解は

$$T_\triangle(t)=A_\triangle e^{i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht} \tag{16}$$

である。$A_\triangle$，$B_\triangle$ は積分常数である。(15) は又

$$\triangle'(r,\theta,\varphi)\equiv R_\triangle(r)\Theta_\triangle(\theta)\Phi_\triangle(\varphi)$$

と分離出来る解があるものとすれば，

$$\frac{1}{R_\triangle(r)}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{dR_\triangle(r)}{dr}\right\}+h^2r^2+\frac{1}{\Theta_\triangle(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_\triangle(\theta)}{d\theta}\right\}+\frac{1}{\Phi_\triangle(\varphi)\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi_\triangle(\varphi)}{d\varphi^2}=0 \tag{17}$$

となり，これは r の項と θ,φ の項と分離しているので，それぞれ同一の常数に等しくなるはずである。後の計算の便利のよいように次の様に置く。

$$\frac{1}{R_\triangle(r)}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{dR_\triangle(r)}{dr}\right\}+h^2r^2=m(m+1) \tag{18}$$

$$\frac{1}{\Theta_\triangle(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_\triangle(\theta)}{d\theta}\right\}+\frac{1}{\Phi_\triangle(\varphi)\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi_\triangle(\varphi)}{d\varphi^2}=-m(m+1) \tag{19}$$

こゝに m はいかなる実数でもさしつかえない。(18) は

$$\frac{d^2R_\triangle(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_\triangle(r)}{dr}+\left\{h^2-\frac{m(m+1)}{r^2}\right\}R_\triangle(r)=0 \tag{20}$$

と変形される。これは Bessel の式であつて，この一般解は色々の形式のものがあるけれども，ここでは次の形式のものを取る。

$$R_\triangle(r)=r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_\triangle \overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)+D_\triangle \overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\} \tag{21}$$

こゝに $C_\triangle$, $D_\triangle$ は任意常数で H は Hankel の函数である。(19) は

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_\triangle(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_\triangle(\theta)}{d\theta}\right\}+m(m+1)\sin^2\theta+\frac{1}{\Phi_\triangle(\varphi)}\frac{d^2\Phi_\triangle(\varphi)}{d\varphi^2}=0 \tag{22}$$

と変形され，θ と φ が分離しているので，それぞれ同一の常数に等しく，これも計算の都合上次の様に置く。

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_\triangle(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_\triangle(\theta)}{d\theta}\right\}+m(m+1)\sin^2\theta=n^2 \tag{23}$$

$$\frac{1}{\Phi_\triangle(\varphi)}\frac{d^2\Phi_\triangle(\varphi)}{d\varphi^2}=-n^2 \tag{24}$$

こゝに n はいかなる実数でもよい。こうする事によつて体球函数の形式の解を得るのである。(23) において，

$$x\equiv\cos\theta$$

として x に変換すると，

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta_\triangle(x)}{dx^2}-2x\frac{d\Theta_\triangle(x)}{dx}+\left\{m(m+1)-\frac{n^2}{1-x^2}\right\}\Theta_\triangle(x)=0 \tag{25}$$

となり，これは Legendre の式であるから，P, Q を球函数とすれば，一般解は

$$\Theta_\triangle(x)=E_\triangle P_m^n(x)+F_\triangle Q_m^n(x)$$

である。従つて m, n は正整数であるように限定される。これを θ に還元すると

$$\Theta_\triangle(\theta)=E_\triangle P_m^n(\cos\theta)+F_\triangle Q_m^n(\cos\theta) \tag{26}$$

となる。これは (23) の一般解となる。こゝに $E_\triangle$, $F_\triangle$ は任意常数である。次に (24) よりは，

$$\Phi_\triangle(\varphi)=G_\triangle\cos n\varphi+H_\triangle\sin n\varphi \tag{27}$$

として求まる。こゝに $G_\triangle$, $H_\triangle$ は任意常数である。かくして $\triangle(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)$ が求まつたのであるが，これは体積膨脹率であるから，無限大になる解 $Q_m^n(\cos\theta)$ は不用である。又重複する任意常数

を整理して，△ の解は

$$\triangle=\left(A_\triangle e^{i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_\triangle \overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)+D_\triangle \overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\}$$
$$\times P_m^n(\cos\theta)(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi) \tag{28}$$

として求まる。

次に $\omega_r(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)$ を求める。これも同様に

$$\omega_r=\omega_r'(r,\theta,\varphi)T_{\omega r}(t) \tag{29}$$

なる解があるとすれば，(9) は

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{1}{T\omega_r(t)}\frac{d^2T_{\omega r}(t)}{dt^2}=\frac{1}{\omega_r'(r,\theta,\varphi)}\nabla^2\omega_r'(r,\theta,\varphi) \tag{30}$$

となるから，△の場合と同様の理由から $-k^2$ に等しいと置いて，

$$T_{\omega r}(t)=A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt} \tag{31}$$

なる解が得られる。こゝに k はいかなる数でもよい。又 $A_{\omega r}$, $B_{\omega r}$ は任意常数である。又

$$\omega_r'(r,\theta,\varphi)=R_{\omega r}(r)\Theta_{\omega r}(\theta)\Phi_{\omega r}(\varphi)$$

なる解があるものとすれば，その残りの部分は

$$\frac{1}{R_{\omega r}(r)}\frac{d^2R_{\omega r}}{dr}+\frac{1}{R_{\omega r}(r)}\frac{4}{r}\frac{dR_{\omega r}(r)}{dr}+\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{\Theta_{\omega r}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_{\omega r}(\theta)}{d\theta}\right\}$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{1}{\Phi_{\omega r}(\varphi)}\frac{d^2\Phi_{\omega r}(\varphi)}{d\varphi^2}=-k^2$$

となり，これは又

$$\frac{r^2}{R_{\omega r}(r)}\frac{d^2R_{\omega r}(r)}{dr^2}+\frac{4r}{R_{\omega r}(r)}\frac{dR_{\omega r}(r)}{dr}+2+k^2r^2$$
$$+\frac{1}{\sin\theta\Theta_{\omega r}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_{\omega r}(\theta)}{d\theta}\right\}+\frac{1}{\sin^2\theta\Phi_{\omega r}(\varphi)}\frac{d^2\Phi_{\omega r}(\varphi)}{d\varphi^2}=0 \tag{32}$$

となり，次の様に置ける。

$$\frac{r^2}{R_{\omega r}(r)}\frac{d^2R_{\omega r}(r)}{dr^2}+\frac{4r}{R_{\omega r}(r)}\frac{dR_{\omega r}(r)}{dr}+2+k^2r^2=p(p+1) \tag{33}$$

$$\frac{1}{\sin\theta\Theta_{\omega r}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_{\omega r}(\theta)}{d\theta}\right\}+\frac{1}{\sin^2\theta\Phi_{\omega r}(\varphi)}\frac{d^2\Phi_{\omega r}(\varphi)}{d\varphi^2}=-p(p+1) \tag{34}$$

こゝに p はいかなる数にてもさしつかえない。(33) は

$$\frac{d^2R_{\omega r}(r)}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{dR_{\omega r}(r)}{dr}+\left\{k^2-\frac{(p+2)(p-1)}{r^2}\right\}R_{\omega r}(r)=0 \tag{35}$$

となり，これは Bessel 式であるから一般解として

$$R_{\omega r}(r)=r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\omega r}\overset{(1)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)+D_{\omega r}\overset{(2)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right\} \tag{36}$$

を得る。一方 (34) よりは

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_{\omega r}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_{\omega r}(\theta)}{d\theta}\right\}+p(p+1)\sin^2\theta+\frac{1}{\Phi_{\omega r}(\varphi)}\frac{d^2\Phi_{\omega r}(\varphi)}{d\varphi^2}=0$$

を得るので，又

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_{\omega r}(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{d\Theta_{\omega r}(\theta)}{d\theta}\right\}+p(p+1)\sin^2\theta=q^2 \tag{37}$$

$$\frac{1}{\Phi_{\omega r}(\varphi)}\frac{d^2\Phi_{\omega r}(\varphi)}{d\varphi^2}=-q^2 \tag{38}$$

と置ける。こゝに q は任意の実数である。(37) において $x=\cos\theta$ と変換すれば Legendre の式となるので，その一般解として

$$\Theta_{\omega r}(\theta)=E_{\omega r}\overset{q}{P}_{p}(\cos\theta)+F_{\omega r}\overset{q}{Q}_{p}(\cos\theta) \tag{39}$$

を得る。従つて p, q は正整数でなければならない。こゝに $E_{\omega r}$, $F_{\omega r}$ は任意常数である。(38) よりは

$$\Phi_{\omega r}(\varphi)=G_{\omega r}\cos q\varphi+H_{\omega r}\sin q\varphi \tag{40}$$

を得る。$G_{\omega r}$, $H_{\omega r}$ は任意常数である。ω_r は廻転量であるから，無限大になる $\overset{q}{Q}_{p}(\cos\theta)$ の項は不用である。重複する常数を整理して ω_r の解としては

$$\omega_r=\left(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}\right)r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\omega r}\overset{(1)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)+D_{\omega r}\overset{(2)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right\}$$
$$\times\overset{q}{P}_{p}(\cos\theta)(E_{\omega r}\cos q\varphi+F_{\omega r}\sin q\varphi) \tag{41}$$

を得る。

次に (5)—(7) より ω_r, ω_θ, ω_φ の間には次の様な関係が存在する。

$$\frac{\partial(r^2\sin\theta\omega_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\omega_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial\varphi}=0 \tag{42}$$

これを (10) に用いると，

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_\theta\sin\theta)=\mu\nabla^2(\omega_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(\omega_r r^2\sin^2\theta)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\omega_r}{\partial r\partial\theta} \tag{43}$$

となる。この一般解は ω_r の項のない場合の一般解に ω_r の項のある場合の特解を加えておけばよい。

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_\theta\sin\theta)=\mu\nabla^2(\omega_\theta\sin\theta)$$

の一般解は

$$\omega_\theta=\left(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\theta}H^{(1)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)+D_{\omega\theta}H^{(2)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right\}$$
$$\times\frac{P^l_s(\cos\theta)}{\sin\theta}(E_{\omega\theta}\cos l\varphi+F_{\omega\theta}\sin l\varphi) \qquad (44)$$

である。こゝに $A_{\omega\theta}$, $B_{\omega\theta}$, $C_{\omega\theta}$, $D_{\omega\theta}$ は任意常数であり，f はいかなる実数でもさしつかえなく，s, l は正整数である。次に ω_r の項のある場合の特解は

$$\omega_\theta=\frac{1}{p(p+1)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r^2\omega_r)$$

とおけばよい事が分る。よつて ω_θ の解として次のものを得る。但し $p\neq 0$ とする。

$$\omega_\theta=\left(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\theta}H^{(1)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right.$$
$$\left.+D_{\omega\theta}H^{(2)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right\}\frac{P^l_s(\cos\theta)}{\sin\theta}(\cos l\varphi+D_{\omega\theta}\sin l\varphi)$$
$$+\frac{1}{p(p+1)}\left(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega r}H^{(1)}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right.\right.$$
$$\left.\left.+D_{\omega r}H^{(2)}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right\}\right]\frac{dP^q_p(\cos\theta)}{d\theta}(\cos q\varphi+D_{\omega r}\sin q\varphi) \qquad (45)$$

(42) なる関係式から

$$\omega_\varphi=-\frac{1}{l}\left(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\theta}H^{(1)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right.$$
$$\left.+D_{\omega\theta}H^{(2)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right\}\frac{dP^l_s(\cos\theta)}{d\theta}(E_{\omega\theta}\sin l\varphi-F_{\omega\theta}\cos l\varphi)$$
$$-\frac{q}{p(p+1)}\left(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\theta}H^{(1)}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right.\right.$$
$$\left.\left.+D_{\omega\theta}H^{(2)}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right\}\right]\frac{P^q_p(\cos\theta)}{\sin\theta}(E_{\omega r}\sin l\varphi-F_{\omega r}\cos l\varphi) \qquad (46)$$

を得る。但し l, q は零でないとする。

(28), (41), (45), (46) を (1)－(3) に代入して u, v, w を求めると，

$$u=-\frac{1}{h^2}\left(A_\triangle e^{i\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,ht}\right)\frac{d}{dr}\left[r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_\triangle H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right.\right.$$
$$\left.\left.+D_\triangle H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\}\right]P^n_m(\cos\theta)(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)$$
$$+\frac{s(s+1)}{lf^2}\left(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\mu/\rho}\,ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\mu/\rho}\,ft}\right)r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\omega\theta}H^{(1)}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right.$$

$$+D_{\omega\theta}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(fr)\Big\}P_s^l(\cos\theta)(E_{\omega\theta}\sin l\varphi-F_{\omega\theta}\cos l\varphi) \qquad (47)$$

$$
\begin{aligned}
v=&-\frac{1}{h^2}\Big(A_\triangle e^{i\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,ht}\Big)r^{-\frac{3}{2}}\Big\{C_\triangle\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\\
&\qquad+D_\triangle\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\Big\}\frac{dP_m^n(\cos\theta)}{d\theta}(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)\\
&+\frac{1}{lf^2}\Big(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\mu/\rho}\,ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\mu/\rho}\,ft}\Big)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big[r^{\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega\theta}\overset{(1)}{H}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\\
&\qquad+D_{\omega\theta}\overset{(2)}{H}_{s+\frac{1}{2}}(kr)\Big\}\Big]\frac{dP_s^l(\cos\theta)}{d\theta}(E_{\omega\theta}\sin l\varphi-F_{\omega\theta}\cos l\varphi)\\
&-\frac{q}{p(p+1)}\Big(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\mu/\rho}\,kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\mu/\rho}\,kt}\Big)r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega r}\overset{(1)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\\
&\qquad+D_{\omega r}\overset{(2)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\Big\}\frac{P_p^q(\cos\theta)}{\sin\theta}(E_{\omega r}\sin q\varphi-F_{\omega r}\cos q\varphi) \qquad (48)\\
w=&-\frac{1}{h^2}\Big(A_\triangle e^{i\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}\,ht}\Big)r^{-\frac{3}{2}}\Big\{C_\triangle\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(kr)\\
&\qquad+D_\triangle\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\Big\}\frac{P_m^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)\\
&+\frac{1}{f^2}\Big(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\mu/\rho}\,ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\mu/\rho}\,ft}\Big)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big[r^{\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega\theta}\overset{(1)}{H}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\\
&\qquad+D_{\omega\theta}\overset{(2)}{H}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\Big\}\Big]\frac{P_s^l(\cos\theta)}{\sin\theta}(E_{\omega\theta}\cos l\varphi+F_{\omega\theta}\sin l\varphi)\\
&-\frac{1}{p(p+1)}\Big(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\mu/\rho}\,kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\mu/\rho}\,kt}\Big)r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega r}\overset{(1)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\\
&\qquad+D_{\omega r}\overset{(2)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\Big\}\frac{dP_p^q(\cos\theta)}{d\theta}(E_{\omega r}\cos q\varphi+F_{\omega r}\sin q\varphi) \qquad (49)
\end{aligned}
$$

となる。但し p, l, q は零に等しくないとする。

次に $l=0$, $q=0$ の場合を求める。この時は ω_θ, ω_r は (41) (44) そのまゝでよく，従つて共に φ の項を有せず，よつて (43) より ω_φ を求める事は妥当でない。そこで (11) を用いる事にすると，次の様になる。

$$\rho\frac{\partial^2\omega_\varphi}{\partial t^2}=\mu\Big\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\omega_\varphi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\omega_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\Big\} \qquad (50)$$

これも変数が分離出来るものとして同様に解けば

$$\omega_\varphi=\Big(A_{\omega\varphi}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\alpha t}+B_{\omega\varphi}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\alpha t}\Big)r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega\varphi}\overset{(1)}{H}_{\beta+\frac{1}{2}}(\alpha r)+D_{\omega\varphi}\overset{(2)}{H}_{\beta+\frac{1}{2}}(\alpha r)\Big\}\frac{dP_\beta(\cos\theta)}{d\theta} \qquad (51)$$

を得る。これ等を (1)−(3) に入れて u, v, w を求めるのであるが，それ等が (4)−(7) の関係式を満足するためには $A_{\omega\theta}=0$ でなければならない。よつて

$$\left\{\begin{aligned}
u=&-\frac{1}{h^2}\left(A_\triangle e^{i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}\right)\frac{d}{dr}\left[r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_\triangle \overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right.\right.\\
&\left.\left.+D_\triangle \overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\}\right]P^n_m(\cos\theta)(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)\\
&-\frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2}\left(A_{\omega\varphi}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\alpha t}+B_{\omega\varphi}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\alpha t}\right)r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\omega\varphi}\overset{(1)}{H}_{\beta+\frac{1}{2}}(\alpha r)+D_{\omega\varphi}\overset{(2)}{H}_{\beta+\frac{1}{2}}(\alpha r)\right\}P_\beta(\cos\theta) \qquad (52)\\
v=&-\frac{1}{h^2}\left(A_\triangle e^{i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}\right)r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_\triangle \overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right.\\
&\left.+D_\triangle \overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\}\frac{dP^n_m(\cos\theta)}{d\theta}(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)\\
&-\frac{1}{\alpha^2}\left(A_{\omega\varphi}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\alpha t}+B_{\omega\varphi}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\alpha t}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\varphi}\overset{(1)}{H}_{\beta+\frac{1}{2}}(\alpha r)+D_{\omega\varphi}\overset{(2)}{H}_{\beta+\frac{1}{2}}(\alpha r)\right\}\right]\frac{dP_\beta(\cos\theta)}{d\theta} \qquad (53)\\
w=&-\frac{1}{h^2}\left(A_\triangle e^{i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}\right)r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_\triangle \overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right.\\
&\left.+D_\triangle \overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\}\frac{P^n_m(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{d}{d\varphi}(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)\\
&-\frac{1}{p(p+1)}\left(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega r}\overset{(1)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)+D_{\omega r}\overset{(2)}{H}_{p+\frac{1}{2}}(kr)\right\}\frac{dP_p(\cos\theta)}{d\theta} \qquad (54)
\end{aligned}\right.$$

を得る。

次に $p=0$ の場合を求めるに，この時は必然的に $q=0$ でなければならない。従つて序に $l=0$ とすれば，u, v は (52) (53) でよく，w は ω_θ によるので (43) にさかのぼらなければならない。その特解は

$$\omega_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\omega_r)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (55)$$

とおく事によつて得られ，結局

$$\omega_\theta=\left(A_{\omega\theta}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}+B_{\omega\theta}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}ft}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\theta}\overset{(1)}{H}_{s+\frac{1}{2}}(fr)+D_{\omega\theta}\overset{(2)}{H}_{s+\frac{1}{2}}(fr)\right\}\frac{P_s(\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$-\left(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\varphi}H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(kr)+D_{\omega r}H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(kr)\right\}\right]\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{56}$$

となる。これ等より w を求めるのであるが (4)−(7) の関係式を満たすために $A_{\omega_\theta}=0$ でなければならない。よつて

$$w=-\frac{1}{h^2}\left(A_\triangle e^{i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}+B_\triangle e^{-i\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}ht}\right)r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_\triangle H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right.$$

$$\left.+D_\triangle H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(hr)\right\}\frac{P^n_m(\cos\theta)}{\sin\theta}\frac{d}{d\varphi}(E_\triangle\cos n\varphi+F_\triangle\sin n\varphi)$$

$$+\left(A_{\omega r}e^{i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}+B_{\omega r}e^{-i\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}kt}\right)r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega r}H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(kr)+D_{\omega r}H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(kr)\right\}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{57}$$

が得られる。

以上を要約し一般化したものを書き下ろせば，

$$u=\sum_p^\infty-\frac{1}{\xi^2}(A_{\triangle.0.0}e^{ipt}+B_{\triangle.0.0}e^{-ipt})\frac{d}{dr}\left[r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\triangle.0.0}H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\xi r)+D_{\triangle.0.0}H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}\right]P_0(\cos\theta)$$

$$+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\left[-\frac{1}{\xi^2}(A_{\triangle.m.0}e^{ipt}+B_{\triangle.m.0}e^{-ipt})\frac{d}{dr}\left[r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\triangle.m.0}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)+D_{\triangle.m.0}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{m(m+1)}{\eta^2}(A_{\omega\varphi.m.0}e^{ipt}+B_{\omega\varphi.m.0}e^{-ipt})r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\omega\varphi.m.0}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)+D_{\omega\varphi.m.0}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\right\}\right]P_m(\cos\theta)$$

$$+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left[-\frac{1}{\xi^2}(A_{\triangle.m.n}e^{ipt}+B_{\triangle.m.n}e^{-ipt})\frac{d}{dr}\left[r^{-\frac{1}{2}}\left\{C_{\triangle.m.n}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_{\triangle.m.n}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}\right](E_{\triangle.m.n}\cos n\varphi+F_{\triangle.m.n}\sin n\varphi)$$

$$+\frac{m(m+1)}{n\eta^2}(A_{\omega\theta.m.n}e^{ipt}+B_{\omega\theta.m.n}{}^{-ipt})r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\omega\theta.m.n}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\right.$$

$$\left.\left.+D_{\omega\theta.m.n}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\right\}(E_{\omega\theta.m.n}\sin n\varphi-F_{\omega\theta.m.n}\cos n\varphi)\right]P^n_m(\cos\theta) \tag{58}$$

$$v=0$$

$$+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\left[-\frac{1}{\xi^2}(A_{\triangle.m.0}e^{ipt}+B_{\triangle.m.0}e^{-ipt})r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\triangle.m.0}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)+D_{\triangle.m.0}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\eta^2}(A_{\omega\varphi.m.0}e^{ipt}+B_{\omega\varphi.m.0}e^{-ipt})\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r^{\frac{1}{2}}\left\{C_{\omega\varphi.m.0}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)+D_{\omega\varphi.m.0}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\right\}\right]\right]\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left\{\left[-\frac{1}{\xi^2}(A_{\triangle.m.n}e^{ipt}+B_{\triangle.m.n}e^{-ipt})r^{-\frac{3}{2}}\left\{C_{\triangle.m.n}H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right.\right.\right.$$

$$\left.+D_{\triangle.m.n}H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}(E_{\triangle.m.n}\cos n\varphi+F_{\triangle.m.n}\sin n\varphi)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{n\eta^2}(A_{\omega\theta.m.n}e^{ipt}+B_{\omega\theta.m.n}e^{-ipt})\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big[r^{\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega\theta.m.n}\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\\
&\qquad+D_{\omega\theta.m.n}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}\Big](E_{\omega\theta.m.n}\sin n\varphi-F_{\omega\theta.m.n}\cos n\varphi)\Big]\frac{d\overset{n}{P}_m(\cos\theta)}{d\theta}\\
&-\frac{n}{m(m+1)}(A_{\omega r.m.n}e^{ipt}+B_{\omega r.m.n}e^{-ipt})r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega r.m.n}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\\
&\qquad+D_{\omega r.m.n}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}(E_{\omega r.m.n}\sin n\varphi-F_{\omega r.m.n}\cos n\varphi)\frac{\overset{n}{P}_m(\cos\theta)}{\sin\theta}\Big\} \qquad (59)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w=&\sum_p^\infty(A_{\omega r.0.0}e^{ipt}+B_{\omega r.0.0}{}^{-ipt})r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega r.0.0}\overset{(1)}{H}_{\frac{1}{2}}(\eta r)+D_{\omega r.0.0}\overset{(2)}{H}_{\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\
&+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty-\frac{1}{m(m+1)}(A_{\omega r.m.0}e^{ipt}+B_{\omega r.m.0}e^{-ipt})r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega r.m.0}\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\\
&\qquad+D_{\omega r.m.0}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\\
&+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\Big\{\Big[-\frac{1}{\xi^2}(A_{\triangle.m.n}e^{ipt}+B_{\triangle.m.n}e^{-ipt})r^{-\frac{3}{2}}\Big\{C_{\triangle.m.n}\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\\
&\qquad+D_{\triangle.m.n}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\Big\}\frac{d}{d\varphi}(E_{\triangle.m.n}\cos n\varphi+F_{\triangle.m.n}\sin n\varphi)\\
&+\frac{1}{\eta^2}(A_{\omega\theta.m.n}e^{ipt}+B_{\omega\theta.m.n}e^{-ipt})\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big[r^{\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega\theta.m.n}\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\\
&\qquad+D_{\omega\theta.m.n}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}\Big](E_{\omega\theta.m.n}\cos n\varphi+F_{\omega\theta.m.n}\sin n\varphi)\Big]\frac{\overset{n}{P}_m(\cos\theta)}{\sin\theta}\\
&-\frac{1}{m(m+1)}(A_{\omega r.m.n}e^{ipt}+B_{\omega r.m.n}e^{-ipt})r^{-\frac{1}{2}}\Big\{C_{\omega r.m.n}\overset{(1)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\\
&\qquad+D_{\omega r.m.n}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}(E_{\omega r.m.n}\cos n\varphi+F_{\omega r.m.n}\sin n\varphi)\frac{d\overset{n}{P}_m(\cos\theta)}{d\theta}\Big\} \qquad (60)
\end{aligned}
$$

となる。こゝに ξ, η は

$$\xi\equiv h=\frac{p}{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}},\qquad \eta\equiv k=f=a=\frac{p}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} \qquad (61)$$

を示すものである。

かくして変位の一般解が求まつた。

§ 3. 数学による実験

運動方程式の一般解が求まつたから，境界条件を数式に表現する事を考へてみる。内部球窩に於ては r 方向の力のみが作用していると考へてよいから，

$$\begin{cases} \widehat{rr}_{r=a} = \lambda\triangle + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial r} = -F(\theta,\varphi,t) & (62) \\ \widehat{r\theta}_{r=a} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0 & (63) \\ \widehat{r\varphi}_{r=a} = \mu\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{w}{r}\right) = 0 & (64) \end{cases}$$

でよい。こゝに a は内部球窩の半徑であり，$F(\theta,\varphi,t)$ はこれから数学的に表現しようとする内部球窩に作用する力を示す。それは内部球窩上に第2図に示すような分布をしてをり，しかも時間的には第4図のような Aperiodic なものであると考へる。即ち $-\tau$ 時間より急に力が作用し始め，$+\tau$ 時間まで経続して再び急に作用が止むと考へるのである。この様な分布状態は球函数の級数で表現出来るし，時間的な作用の仕方は Fourier 積分によつて表現する事が出来るから，

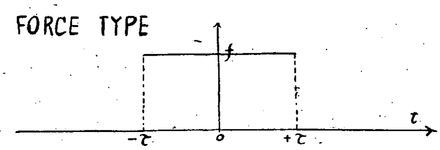

Fig. 4

$$F(\theta,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{A_{0,m}P_m(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{m}(A_{n,m}\cos n\varphi + B_{n,m}\sin n\varphi)P_m^n(\cos\theta)\right\}$$
$$\times\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^{\infty}T(s)e^{ip(t-s)}ds \qquad (65)$$

となる。こゝに

$$\begin{cases} A_{0,m} = \dfrac{2m+1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}F(\sigma,\varphi)P_m(\sigma)d\sigma & (66) \\ A_{n,m} = \dfrac{2m+1}{2\pi}\dfrac{(m-n)!}{(m+n)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}F(\sigma,\varphi)\cos n\varphi\, P_m^n(\sigma)d\sigma & (67) \\ B_{n,m} = \dfrac{2m+1}{2\pi}\dfrac{(m-n)!}{(m+n)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}F(\sigma,\varphi)\sin n\varphi\, P_m^n(\sigma)d\sigma & (68) \end{cases}$$

である。$T(s)$ は第4図の如き Aperiodic を示す函数である。即ち

$$T(s) = \begin{cases} 0 & -\tau > s \\ 1 & -\tau \geqq s \geqq \tau \\ 0 & s \geqq \tau \end{cases} \qquad (69)$$

である。又 $F(\sigma,\varphi)$ は

第2図Aの場合：　$F_A(\sigma,\varphi) = \begin{cases} f_A & 1\geqq\sigma\geqq 1-\varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon>\sigma\geqq -1 \end{cases}$ (70′)

第2図Bの場合：　$F_B(\sigma,\varphi) = \begin{cases} f_B & 1\geqq\sigma\geqq 1-\varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon>\sigma>-(1-\varepsilon) \\ f_B & -(1-\varepsilon)>\sigma\geqq -1 \end{cases}$ (70)

$$\text{第2図Cの場合：}\quad F_C(\sigma,\varphi)=\begin{cases}0 & 1\geqq\sigma>\varepsilon\\ f_C & \varepsilon\geqq\sigma\geqq-\varepsilon\\ 0 & -\varepsilon>\sigma\geqq-1\end{cases}\tag{71}$$

でよい。f_A, f_B, f_C はそれぞれ力の大きさを示す常数である。ε は極く小さい量である。

これ等を考慮に入れて (66), (67), (68) を計算する時は，

$$\begin{cases}A_{0,m}=\dfrac{2m+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}F(\sigma)P_m(\sigma)d\sigma\\ A_{n,m}=0\\ B_{n,m}=0\end{cases}\tag{72}$$

となる。こゝに $F(\sigma)$ は (70′)〜(71) を代表するものとする。更に計算を進めるならば，

$$F(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)}{2}fW_mP_m(\cos\theta)\tag{73}$$

となる。こゝに

$$f=\begin{cases}f_A & \text{A の場合}\\ f_B & \text{B の場合}\\ f_C & \text{C の場合}\end{cases}$$

$$W_m=\begin{cases}W_m^{(A)}=\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^{1}P_m(\sigma)d\sigma\frac{\{1-(1-\varepsilon)^2\}P_m'(1-\varepsilon)}{m(m+1)}\fallingdotseq\sum_{s=1}^{\leqq m/2}(1-1)^s\\ \qquad\times\dfrac{(3m-2)!\,(m-2s)}{s!\,(m-s)!\,(m-2s)!}\,\dfrac{\varepsilon}{2^{m-1}m(m+1)}\fallingdotseq\varepsilon \quad m\text{ の奇偶によらぬ，　A の場合}\\ W_m^{(B)}=\begin{cases}2\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^{1}P_m(\sigma)d\sigma\frac{\{1-(1-\varepsilon)^2\}P_m'(1-\varepsilon)}{m(m+1)}\fallingdotseq\sum_{s=0}^{\leqq m/2}(-1)^s\\ \qquad\times\dfrac{(2m-2s)!\,(m-2s)}{s!\,(m-s)!\,(m-2s)!}\,\dfrac{\varepsilon}{2^{m-1}m(m+1)}=2\varepsilon & m\text{:偶数,}\\ 0 & m\text{:奇数,}\end{cases}\quad\text{B の場合}\\ W_m^{(C)}=\begin{cases}2\displaystyle\int_{0}^{\varepsilon}P_m(\sigma)d\sigma=\frac{(1-\varepsilon^2)P_m'(\varepsilon)}{m(m+1)}\fallingdotseq 2(-1)^{m/2}\\ \qquad\times\dfrac{m!}{2^m(m/2!)^2} & m\text{:偶数,}\\ 0 & m\text{:奇数,}\end{cases}\quad\text{C の場合}\end{cases}\tag{74}$$

を示す。次に時間の部分を計算すると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}T(s)e^{ip(t-s)}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dpe^{ipt}\int_{-\tau}^{\tau}e^{-ips}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{p}(e^{-ip\tau}-e^{ip\tau})e^{ipt}dp \tag{75}$$

となる。よつて,

$$F(\theta,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2\pi}f\varepsilon W_m' P_m(\cos\theta)\frac{e^{ip\tau}-e^{ip\tau}}{p}e^{ipt}dp \tag{76}$$

となる。こゝに

$$W_m'=\begin{cases}\text{A の時} & \dfrac{2m+1}{1} \\ \text{B の時} & \begin{cases}2m+1 & m:\text{偶数}\\ 0 & m:\text{奇数}\end{cases} \\ \text{C の時} & \begin{cases}(-1)^{\frac{m}{2}}(2m+1)\dfrac{m!}{2m\left(\frac{m}{2}!\right)^2} & m:\text{偶数}\\ 0 & m:\text{奇数}\end{cases}\end{cases} \tag{76'}$$

である。

かくして力を数学的に表現する事が出来たから，いよいよ境界条件を満足するような解を求める事にする。内部球窩の表面から始めて波が発生する時は，前進波のみ考へればよい。しかも境界条件が φ に無関係である所から，(58)—(60) において φ に無関係な前進波の項のみ取り出せば,

$$u=\sum_{p}^{\infty}-\frac{A_{\triangle\cdot 0}}{\xi^2}e^{ipt}\frac{d}{dr}\left\{r^{-\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi r)\right\}P_0(\cos\theta)$$
$$+\sum_{p}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{ipt}\left[-\frac{A_{\triangle\cdot m}}{\xi^2}\frac{d}{dr}\left\{r^{-\frac{1}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi r)\right\}-\frac{m(m+1)}{\eta^2}A_{\omega\varphi\cdot m}r^{-\frac{3}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\eta r)\right]P_m(\cos\theta) \tag{77}$$

$$v=0+\sum_{p}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{ipt}\left[-\frac{A_{\triangle\cdot m}}{\xi^2}r^{-\frac{3}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi r)-\frac{A_{\omega\varphi\cdot m}}{\eta^2}r^{-1}\frac{d}{dr}\left\{r^{\frac{1}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi r)\right\}\right]\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} \tag{78}$$

$$w=\sum_{p}^{\infty}A_{\omega r\cdot 0}e^{ipt}r^{-\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\eta r)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$+\sum_{p}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{A_{\omega r\cdot m}}{m(m+1)}e^{ipt}r^{-\frac{1}{2}}H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\eta r)\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} \tag{79}$$

となる。これより歪力を計算すると,

$$\widehat{rr}=\sum_{p}^{\infty}A_{\triangle\cdot 0}\left[(\lambda+2\mu)r^{-\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi r)+\frac{4\mu}{\xi^2}r^{-1}\frac{d}{dr}\left\{r^{-\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\xi r)\right\}\right]P_0(\cos\theta)e^{ipt}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\Bigg[A_{\Delta\cdot m}\Big[(\lambda+2\mu)\,r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)-2\mu\frac{m(m+1)}{\xi^2}r^{-\frac{5}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\\
&\qquad+4\mu\frac{1}{\xi^2}r^{-1}\frac{d}{dr}\Big\{r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\Big\}\Big]P_m(\cos\theta)e^{ipt}\\
&\qquad-2\mu\frac{m(m+1)}{\xi^2}A_{\omega\varphi\cdot m}\frac{d}{dr}\Big\{r^{-\frac{3}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}P_m(\cos\theta)e^{ipt}\Bigg] \qquad (80)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\widehat{r\theta}}{\mu}&=0+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty\Bigg[\frac{A_{\Delta\cdot m}}{\xi^2}\Big\{r^{-\frac{5}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)-r^{-1}\frac{d}{dr}\Big\{r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\Big\}-\frac{d}{dr}\Big\{r^{-\frac{3}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\Big\}\Big\}\\
&\qquad-\frac{A_{\omega\varphi\cdot m}}{\eta^2}\Big[2m(m+1)\,r^{-\frac{5}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)-\eta^2\,r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\\
&\qquad-2r^{-2}\frac{d}{dr}\Big\{r^{\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}\Big]\Bigg]\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}e^{ipt} \qquad (81)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\widehat{r\varphi}}{\mu}&=\sum_p^\infty A_{\omega r\cdot 0}\Big[\frac{d}{dr}\Big\{r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}-r^{-\frac{3}{2}}\overset{(2)}{H}_{\frac{1}{2}}(\eta r)\Big]\frac{\cos\theta}{\sin\theta}e^{ipt}\\
&\quad+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty-\frac{A_{\omega r\cdot m}}{m(m+1)}\Big[\frac{d}{dr}\Big\{r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}-r^{-\frac{3}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Big]\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}e^{ipt} \qquad (82)
\end{aligned}
$$

となる。

境界条件 (64) より，m のいかにかかわらず

$$A_{\omega r\cdot m}=0 \qquad (83)$$

とならなければならない。よつて w なる変位は生じない事になる。次に

$$\frac{dH_n(z)}{dz}=H_{n-1}(z)-\frac{n}{z}H_n(z)$$

なる関係式を用い (68) と (81) より，

$$\frac{A_{\omega\varphi\cdot m}}{A_{\Delta\cdot m}}=-\frac{\eta^2}{\xi^2}\,\frac{2(m+2)\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi a)-2\xi a\overset{(2)}{H}_{m-\frac{1}{2}}(\xi a)}{\{\eta^2a^2-2m(m+2)\}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta a)+2\eta a\overset{(2)}{H}_{m-\frac{1}{2}}(\eta a)},\quad m\geqq 1 \qquad (84)$$

を得る。次に地殻を等方性であるものと考へると $\lambda=\mu$ であるから (80) は

$$
\begin{aligned}
\widehat{rr}&=\mu\Bigg[\sum_p^\infty A_{\Delta\cdot 0}\frac{1}{\xi^2r^2}r^{-\frac{1}{2}}\Big\{(3\xi^2r^2-4)\overset{(2)}{H}_{\frac{1}{2}}(\xi r)+4\xi r\overset{(2)}{H}_{-\frac{1}{2}}(\xi r)\Big\}P_0(\cos\theta)e^{ipt}\\
&\quad+\sum_p^\infty\sum_{m=1}^\infty A_{\Delta\cdot m}\frac{1}{\xi^2r^2}r^{-\frac{1}{2}}\Big[\Big\{3\xi^2r^2-2(m+1)(m+2)\Big\}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)+4\xi r\overset{(2)}{H}_{m-\frac{1}{2}}(\xi r)\\
&\quad+\frac{A_{\omega\varphi\cdot m}}{A_{\Delta\cdot m}}\,\frac{\xi^2}{\eta^2}\Big\{2m(m+1)(m+2)\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)-2m(m+1)\eta r\overset{(2)}{H}_{m-\frac{1}{2}}(\eta r)\Big\}\Big]\\
&\qquad\times P_m(\cos\theta)e^{ipt}\Bigg] \qquad (85)
\end{aligned}
$$

となる。この式の第一項は第二項の m を零とした場合と同じであるから今後特別に記さない事にする。

次に m のいかんにかかわらず Hankel の函数は漸進展開を用いて，

$$H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(z)=H'_{m+\frac{1}{2}}i^{m+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz} \tag{86}$$

$$H^{(2)}_{m-\frac{1}{2}}(z)=H'_{m-\frac{1}{2}}i^{m}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz} \tag{87}$$

である。こゝに $H_n'=U_n-iV_n$ であり

$$U_n=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^K}{(2K)!}\left(n^2-\frac{1^2}{4}\right)\left(n^2-\frac{3^2}{4}\right)\cdots\cdots\cdots\left(n^2-\frac{\overline{4K-1}^2}{4}\right)\frac{1}{(2z)^{2K}} \tag{88}$$

$$V_n=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^K}{(2K+1)!}\left(n^2-\frac{1^2}{4}\right)\left(n^2-\frac{3^2}{4}\right)\cdots\cdots\cdots\left(n^2-\frac{\overline{4K+1}^2}{4}\right)\frac{1}{(2z)^{2K+1}} \tag{89}$$

である。これに (84) を用い (85) を整理すると，

$$\widehat{rr}=\sum_{p}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{\triangle\cdot m}i^m\mu\sqrt{\frac{2}{\pi}}r^{-\frac{1}{2}}e^{-i\xi r}(\xi r)^{-\frac{5}{2}}\frac{M}{N_p}P_m(\cos\theta)e^{ipt} \tag{90}$$

となる。こゝに M, N_p は

$$\begin{aligned}M=&[\{3\xi^2r^2-2(m+1)(m+2)\}iH'_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)+4\xi rH'_{m-\frac{1}{2}}(\xi r)]\\&\times[\{\eta^2r^2-2m(m+2)\}iH'_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)+2\eta rH'_{m-\frac{1}{2}}(\eta r)]\\&-4m(m+1)[(m+2)iH'_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)-\xi rH'_{m-\frac{1}{2}}(\xi r)][(m+2)iH'_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)-\eta rH'_{m-\frac{1}{2}}(\eta r)]\end{aligned} \tag{91}$$

$$N_p=\{\eta^2r^2-2m(m+2)\}iH'_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)+2\eta rH'_{m-\frac{1}{2}}(\eta r) \tag{92}$$

である。そこで境界条件 (62) に於て (76) を用いる時は

$$A_{\triangle\cdot m}=+\frac{(-i)^{m+1}}{\mu}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}a^{\frac{1}{2}}(\xi a)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{N_p}{M}\right)_{r=a}e^{i\xi a}f\varepsilon W'_m\frac{e^{-ip\tau}-e^{ip\tau}}{p} \tag{93}$$

ならば境界条件は満足される。従つて (84) より，

$$A_{\omega\varphi\cdot m}=-\frac{(-i)^{m+1}}{\mu}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}a^{\frac{1}{2}}(\eta a)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{2N_s}{M}\right)_{r=a}e^{i\eta a}f\varepsilon W'_m\frac{e^{-ip\tau}-e^{ip\tau}}{p} \tag{94}$$

を得る。こゝに N_s は

$$N_s=(m+2)iH'_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)-\xi rH'_{m-\frac{1}{2}}(\xi r) \tag{95}$$

である。

(77)～(97) に (83), (93), (94) を代入すると，

$$
\left\{
\begin{aligned}
u=&\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{(-i)^{m+1}}{2\mu}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}f\varepsilon W'_m a^2 P_m(\cos\theta)\Bigg[e^{i\xi a}(\xi a)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_p}{M}\right)_{r=a}\frac{d}{dr}\left\{r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}\\
&-2m(m+1)e^{i\eta a}(\eta a)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_s}{M}\right)_{r=a}r^{-\frac{3}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\Bigg]\frac{e^{-ip\tau}-e^{ip\tau}}{p}e^{ipt}dp \qquad (96)\\
v=&\sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{(-i)^{m+1}}{2\mu}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}f\varepsilon W'_m a^2\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\Bigg[e^{i\xi a}(\xi a)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_p}{M}\right)_{r=a}r^{-\frac{3}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\\
&-2e^{i\eta a}(\eta a)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_s}{M}\right)_{r=a}r^{-1}\frac{d}{dr}\left\{r^{\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\right\}\Bigg]\frac{e^{-ip\tau}-e^{ip\tau}}{p}e^{ipt}dp \qquad (97)\\
w=&0 \qquad (98)
\end{aligned}
\right.
$$

となる。これを積分すれば解を得るのである。

計算の都合上，

$$\xi a=x \qquad (99)$$

とおけば，地球を等方性として

$$\eta a=\sqrt{3}x,\qquad \xi r=\frac{r}{a}x,\qquad \eta r=\sqrt{3}\frac{r}{a}x \qquad (100)$$

となるので，$\dfrac{a}{r}$ の二乗以上の項を省略出来る程遠くで観測する時は，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left\{r^{-\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\xi r)\right\}\sim i^m\sqrt{\frac{2x}{\pi a}}\ \frac{e}{r}^{-i\frac{r}{a}x},\\
&r^{-1}\frac{d}{dr}\left\{r^{\frac{1}{2}}\overset{(2)}{H}_{m+\frac{1}{2}}(\eta r)\right\}\sim i^m\sqrt{\frac{2\sqrt{3}x}{\pi a}}\ \frac{e}{r}^{-i\sqrt{3}\frac{r}{a}x} \qquad (101)
\end{aligned}
$$

を用いてよいから，(96)～(98) は

$$
\left\{
\begin{aligned}
u\doteqdot&-\frac{i}{\mu}\frac{f\varepsilon}{2\pi}\frac{a^2}{r}\sum_{m=0}^{\infty}W_m'P_m(\cos\theta)\\
&\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{N_p}{M}\right)_{r=a}\left[e^{-i\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}-e^{-i\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t-\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}\right]dx \qquad (102)\\
v\doteqdot&\frac{v_p}{v_s}\frac{i}{\mu}\frac{f\varepsilon}{\pi}\frac{a^2}{r}\sum_{m=0}^{\infty}W_m'\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\\
&\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{N_s}{M}\right)_{r=a}\left[e^{-i\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}-e^{-i\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t-\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}\right]dx \qquad (103)\\
w=&0 \qquad (104)
\end{aligned}
\right.
$$

となる。こゝに $v_p=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$，　$v_s=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ であり，M，N_p，N_s は，

$$M=\Big[-3x^2\{3x^2-2(m+2)(2m+1)\}\{U_{m+\frac{1}{2}}(x)U_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)-V_{m+\frac{1}{2}}(x)V_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}$$
$$+4\sqrt{3}x^2\{2-m(m+1)\}\{U_{m-\frac{1}{2}}(x)U_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)-V_{m-\frac{1}{2}}(x)V_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}$$
$$+2\sqrt{3}x\{3x^2+2(m-1)(m+1)(m+2)\}\{U_{m+\frac{1}{2}}(x)V_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)+V_{m+\frac{1}{2}}(x)U_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}$$
$$+4x\{3x^2+(m-1)m(m+2)\}\{U_{m-\frac{1}{2}}(x)V_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)+V_{m-\frac{1}{2}}(x)U_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}\Big]$$
$$+i\Big[3x^2\{3x^2-2(m+2)(2m+1)\}\{U_{m+\frac{1}{2}}(x)V_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)+V_{m+\frac{1}{2}}(x)U_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}$$
$$-4\sqrt{3}x^2\{2-m(m+1)\}\{U_{m-\frac{1}{2}}(x)V_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)+V_{m-\frac{1}{2}}(x)U_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}$$
$$+2\sqrt{3}x\{3x^2+2(m-1)(m+1)(m+2)\}\{U_{m+\frac{1}{2}}(x)U_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)-V_{m+\frac{1}{2}}(x)V_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}$$
$$+4x\{3x^2+(m-1)m(m+2)\}\{U_{m-\frac{1}{2}}(x)U_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)-V_{m-\frac{1}{2}}(x)V_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\}\Big] \quad (105)$$

$$N_p=\Big[\{3x^2-2m(m+2)\}V_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)+2\sqrt{3}xU_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\Big]$$
$$+i\Big[\{3x^2-2m(m+2)\}U_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)-2\sqrt{3}xV_{m-\frac{1}{2}}(\sqrt{3}x)\Big] \quad (106)$$

$$N_s=\Big[(m+2)V_{m+\frac{1}{2}}(x)-xU_{m-\frac{1}{2}}(x)\Big]+i\Big[(m+2)U_{m+\frac{1}{2}}(x)+xV_{m-\frac{1}{2}}(x)\Big] \quad (107)$$

である。

これは Gauss 平面上で容易に積分する事が出来，e の肩にある括弧の中が正であるか負であるかに従つて虚軸の一側又は＋側で積分する様になる。こうすると周辺での積分が零になるので，そのまゝ解が得られる。そうすると $M=0$ ならしめる極点が必要になつて来る。M は $m=0$ の場合の外は -9 を最高次項 x^{2m+2} の係数として持ち，次の高次の項 x^{2m+2-1} の係数は $+i\Big[\frac{3}{8}\sqrt{3}\{(2m+1)^2-1\}+6\sqrt{3}+16.5\Big]$，次の項 x^{2m} の係数は i を含まず，その次の項 x^{2m-1} の係数は i がつく。最後の項は常数項で i がつかない。よつて根と係数との関係から，Mの根は複素根であつて，$\pm a+ib$,（$a\geqq 0, b\geqq 0$）と言う型式のものでなくてはならない。即ちこの型式以外のものが一つでも含まれてはいない事を示す。従つて虚軸の一側で積分する場合は留数はないので，積分は零になり，＋側で積分する場合のみに留数があり，積分は値を持つ。

次に (102)～(104) で分る事は (102) は P 波の速度で伝播する波動であり，(103) は S 波の速度で伝播する波動である事である。そうしてまたこれ等は内部球窩の表面から出たものである事も示す。それ等は e の肩についている部分を見れば明らかな事である。これ等を分離して書く時は，

$$P波\left\{\begin{aligned} u &\fallingdotseq -\frac{i}{2\pi}\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}\sum_{m=0}^{\infty}W_m'P_m(\cos\theta)\\ &\quad\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{N_p}{M}\right)_{r=a}\left[e^{-i\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}-e^{-i\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t-\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}\right]dx\\ v &\fallingdotseq 0\\ w &\fallingdotseq 0\end{aligned}\right. \quad (108)$$

$$
S\text{ 波}\left\{\begin{aligned}
&u \fallingdotseq 0\\
&v \fallingdotseq \frac{i}{\pi}\sqrt{3}\,\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}\sum_{m=0}^{\infty}W_m{}'\,\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{N_s}{M}\right)_{r=a}\left[e^{-i\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}\frac{v_p}{a}x}-e^{-i\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t-\tau)\right\}\frac{v_p}{a}}\right]dx\\
&w=0
\end{aligned}\right. \tag{109}
$$

となる。

従つて (108) に於ては $t<\dfrac{1}{v_p}(r-a)-\tau$ なる場合は，第一項も第二項も共に一側で積分する事になる。その積分路は第5図 i）の様である。この時はまだ内部球窩に全然力が作用していないか，作用していてもまだ P 波が観測点まで到着していない時間である。この積分路の中には一つの極点も含まれていないから積分は零になる。即ち観測点では波動がないことになる。当然の事であるが，非常に面白い事である。次に $\dfrac{1}{v_p}(r-a)-\tau<t<\dfrac{1}{v_p}(r-a)+\tau$ の場合は第一項は e の肩の括弧中が負となり，第二項はそれが正となるので，第5図ii）の様に第一項は虚軸の＋側で，第二項はその一側で積分する事になる。この時は力が内部球窩に作用し始めて，それから P 波が伝播して来る時間以後であつて，まだ力が作用している時間中の事である。この積分は第一項の積分路中には極があるので値を有し，第二項はやはり零である。即ち同じ力がまだ作用している間は一組の波動しか生じない事になる。次に $\dfrac{1}{v_p}(r-a)+\tau<t$ の場合は第一項，第二項共に e の肩の括弧の中が負となるので，第5図iii）の様に両方共虚軸の側で積分する事になる。この時はもう作用が止んでいる時である。しかしどちらも同じ積分値を有し，たゞ符号が変つているだけである。従つて力の作用時間 2τ だけ遅れて前の一組の波動と同じ一組の波動が符号を逆にして現はれる事になる。もし 2τ が相当永い様な現象であるとすれば，これ等の波動は別々に観測する事が出来，逆に 2τ 時間も観測が可能

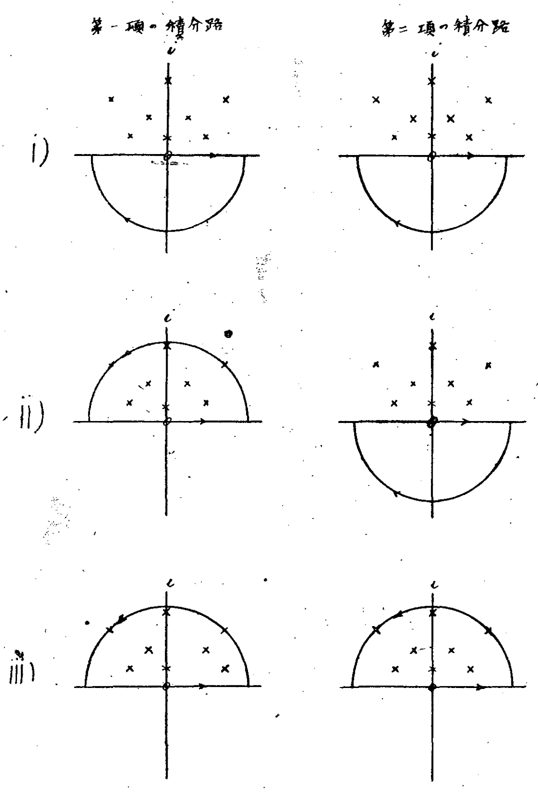

Fig. 5　Integral Circuit

となる。(109) の積分に於ても全然同じであるからこゝでは詳しくは述べない。

次に留数を求めるのであるが，こゝに注意すべき事は，N_p は M より x^2 だけ桁が小さく，N_s は x^3 だけ桁が小さい事である。しかも N_p の最高次の項は虚数の係数を持つ。そのために $\dfrac{N_p}{M}$ を

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{\{x-(a_1+ib_1)\}\{x-(-a_1+ib_1)\}}+\frac{\alpha_2 x+\beta_2}{\{x-(a_2+ib_2)\}\{x-(-a_2+ib_2)\}}+\cdots\cdots$$

の形に分解した時，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots=0$ となり，$\beta_1, \beta_2\cdots\cdots$ は虚数とならなければならない。従つて積分は e を sin, cos に置きかへた時，cos の項の係数の和は $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots$ となり，これは零にならなければならない。即ち変位は零から始まる事になる。N_s についても同様の事が言へる。この例の様に急に力がつけ加わはる場合でも変位は零から始まるのである。この事は波動の伝播現象のみからは今迄分らなかつた事である。

$m=0$ の場合，

$$M=x[\{-9x^3+(12+8\sqrt{3})x\}+i\{(12+6\sqrt{3})x^2-8\sqrt{3}\}]$$

$$N_p=x[2\sqrt{3}+i3x]$$

故に

$$\left(\frac{N_p}{M}\right)_{r=a}=\frac{1}{4x+i(3x^2-4)}$$

となり，この分母を零ならしめる x の値は

$$x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}+i\frac{2}{3}$$

である。これは第6図(0)として示してある。N_s は $m=0$ の場合は $v=0$ であるから求める必要はない。これより剰留数は求められ，

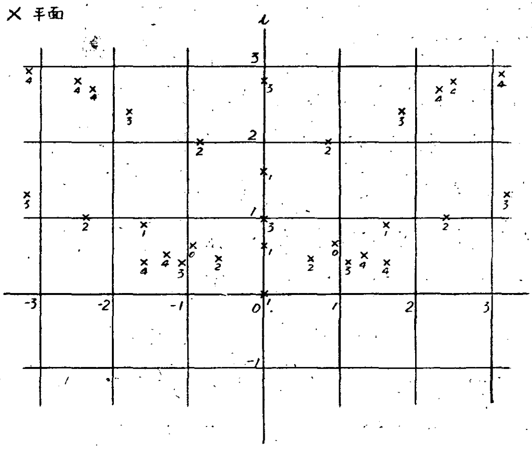

Fig. 6 Poles

P 波 $\quad t<\dfrac{1}{v_p}(r-a)-\tau \quad \begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ w=0 \end{cases}$

$$\frac{1}{v_p}(r-a)-\tau<t<\frac{1}{v_p}(r-a)+\tau$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_0{}'P_0(\cos\theta) \\ \qquad\times\left[-0.3535\,e^{0.6667\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\sin 0.9428\dfrac{v_p}{a}\left\{\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}\right] \\ v=0 \\ w=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{v_p}(r-a)+\tau<t$$

$$\begin{cases} u \fallingdotseq \dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r} W_0' P_0(\cos\theta) \\ \qquad \times\Big[-0.3535\, e^{0.6667\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}} \sin 0.9428\dfrac{v_p}{a}\left\{\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\} \\ \qquad\quad +0.3535\, e^{0.6667\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t-\tau)\right\}} \sin 0.9428\dfrac{v_p}{a}\left\{\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t-\tau)\right\}\Big] \\ v=0, \quad w=0 \end{cases}$$

となり，虚数部分は消失し，実数部分のみの解を得る。この場合は S 波は発生しない。

$m=1$ の場合，

$$M=x[\{-9x^4+(54+13\sqrt{3})x^2-18\sqrt{3}\}+i\{(21+9\sqrt{3})x^3-(54+18\sqrt{3})x\}]$$

$$N_p=\{3\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}\}+i\{3x^3-6x\} \qquad N_s=-x^2+3+i3x$$

となり，$M=0$ の根は

$$x=0, \quad i0.6367, \quad i1.6041, \quad \pm 1.6000+i0.9123$$

である。これ等は第6図(1) として示してある。これより P 波，S 波を求めると，

P 波，　$t<\dfrac{r-a}{v_p}-\tau$;　　$u=0, \quad v=0, \quad w=0$

$$\frac{r-a}{v_p}-\tau<t<\frac{r-a}{v_p}+\tau \ ;$$

$$\begin{cases} u \fallingdotseq \dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r} W_1' P_1(\cos\theta)\Big[0.1111 \\ \qquad -0.0668\, e^{0.6367\frac{v_p}{a}\left\{\frac{r-a}{v_p}-(t+\tau)\right\}} -0.1218\, e^{1.6041\frac{v_p}{a}\left\{\frac{r-a}{v_p}-(t+\tau)\right\}} \\ \qquad +0.0776\, e^{0.9123 \quad /\!/} \cos 1.6000 \quad /\!/ \\ \qquad -0.1038\, e^{0.9123 \quad /\!/} \sin 1.6000 \quad /\!/ \quad \Big] \\ v \fallingdotseq 0, \quad w=0 \end{cases}$$

S 波，　$t<\dfrac{r-a}{v_s}-\tau$;　　$u=0, \quad v=0, \quad w=0$

$$\frac{r-a}{v_s}-\tau<t<\frac{r-a}{v_s}+\tau \ ;$$

$$\begin{cases} u \fallingdotseq 0 \\ v \fallingdotseq 2\sqrt{3}\dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r} W_1' \dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\Big[0.0962 \\ \qquad -0.1023\, e^{0.6367\frac{v_p}{a}\left\{\frac{r-a}{v_s}-(t+\tau)\right\}} +0.0179\, e^{1.6041\frac{v_p}{a}\left\{\frac{r-a}{v_s}-(t+\tau)\right\}} \\ \qquad -0.0118\, e^{0.9123 \quad /\!/} \cos 1.6000 \quad /\!/ \\ \qquad +0.0295\, e^{0.9123 \quad /\!/} \sin 1.6000 \quad /\!/ \quad \Big] \\ w=0 \end{cases}$$

となる。これは永久変位を示すが，$+\tau$ に及んで再びもとにかへる。

$m=2$ の場合，

$$M=\frac{1}{x^2}\left[\{-9x^6+(174+41\sqrt{3})x^4-(441+184\sqrt{3})x^2+184)\right.$$
$$\left.+i\{(39+15\sqrt{3})x^5-(369+113\sqrt{3})x^3+(184+184\sqrt{3}x\}\right]$$

$$N_p=\frac{1}{x^2}[\{5\sqrt{3}x^3-16\sqrt{3}x\}+i\{3x^4-21x^2+16\}]$$

$$N_s=\frac{1}{x^2}[\{-x^3+12x\}+i\{5x^2-12\}]$$

となり，$\left(\frac{N_p}{M}\right)$, $\left(\frac{N_s}{M}\right)$ 共にその分母は

$$\{-9x^6+(174+41\sqrt{3})x^4-(441+184\sqrt{3})x^2+184\}$$
$$+i\{(39+15\sqrt{3})x^5-(369+113\sqrt{3})x^3+(184+184\sqrt{3})x\}$$

となる。この分母を零ならしめる x の値は

$$x=a+ib$$

とおき，分母に代入する時は i を含まぬ項は a を因数とするから，$a=0$ とおき，然る後にこれを満足すべき b の値を求めれば，この b には複素数を許すものとすれば，$x\fallingdotseq ib$ はそのまゝ極点となる。(112) に $x\fallingdotseq ib$ とおけば b の 6 次整方程式となるので，Graeffe の方法で近似根は求まる。その結果は，

$$x=\pm 0.6009+i0.4636,\qquad \pm 2.3905+i1.0742,\qquad \pm 0.8393+i2.1127$$

である。これは西村源六郎博士の求められた根とよく一致する(1)。これ等は第 6 図(2) として示してある。これより剰留数を求め解を出すと，

P 波，　$t<\frac{1}{v_p}(r-a)-\tau\quad\begin{cases}u=0\\ v=0\\ w=0\end{cases}$

$$\frac{1}{v_p}(r-a)-\tau<t<\frac{1}{v_p}(r-a)+\tau$$

$$u\fallingdotseq\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_2{}'P_2(\cos\theta)$$
$$\times\Big[-0.0569\,e^{0.4636\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\sin 0.6009\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}$$
$$+0.0313\,e^{\;〃}\qquad\cos\;〃$$

(1) 西村源六郎: On the Elastic Wave due to Pressure Variation on the Inner Surface of a Spherical Cavity in an Elastic Solid. (地震研究所彙報　第15号　昭. 12. 1937)

$$
\begin{cases}
\quad -0.2242\,e^{2.1127\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\sin 0.8393\dfrac{v_p}{a}\left\{\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\} \\
\quad -0.1166\,e \quad〃 \qquad \cos \quad〃 \\
\quad +0.0041\,e^{1.0742} \quad〃 \qquad \sin 2.3905 \quad〃 \\
\quad +0.0915\,e \quad〃 \qquad \cos \quad〃 \qquad \Big] \\
v \fallingdotseq 0 \\
w=0
\end{cases}
$$

$\dfrac{1}{v_p}(r-a)+\tau<t$ の場合は $m=0$ の場合と同様に $\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)$ の代りに $\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t-\tau)$ と置きかへ，符号を逆にして加へておけばよい。S 波の方は，

S 波，　$t<\dfrac{1}{v_s}(r-a)-\tau$ $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ w=0 \end{cases}$

$\dfrac{1}{v_s}(r-a)-\tau<t<\dfrac{1}{v_s}(r-a)+\tau$

$$
\begin{cases}
u \fallingdotseq 0 \\
v \fallingdotseq -2\sqrt{3}\,\dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_2{}'\,\dfrac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} \\
\qquad \times\Big[0.0668\,e^{0.4636\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\sin 0.6009\dfrac{v_p}{a}\left\{\dfrac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\} \\
\qquad +0.0033\,e \quad〃 \qquad \cos \quad〃 \\
\qquad -0.0163\,e^{2.1127} \quad〃 \qquad \sin 0.8393 \quad〃 \\
\qquad -0.0109\,e \quad〃 \qquad \cos \quad〃 \\
\qquad -0.0085\,e^{1.0742} \quad〃 \qquad \sin 2.3905 \quad〃 \\
\qquad +0.0084\,e \quad〃 \qquad \cos \quad〃 \qquad \Big] \\
w=0
\end{cases}
$$

$\dfrac{1}{v_s}(r-a)+\tau<t$ の場合は前同様に $\dfrac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)$ の代りに $\dfrac{1}{v_s}(r-a)-(t-\tau)$ と置きかへ符号を逆にして加へてをけばよい。こゝに非常に面白い事は P 波，S 波を通じて cos の項は係数が＋－相減じて零になる事である。小々食違いのあるのは根の求め方に Graeffe の方法を用いたので，それから来る誤差である。よつて波形は零から始まる。即ち力は急に作用する形であつても波形は連続的に零から始まる事になる。しかも減衰波である。

$m=3$ の場合，

$$M=\{-9x^8+(444+128\sqrt{3})x^6-(4125+1738\sqrt{3})x^4+(6750+4375\sqrt{3})x^2-2250\sqrt{3}\}$$
$$+i\{(66+24\sqrt{3})x^7-(1629+593\sqrt{3})x^5+(6375+3625\sqrt{3})x^3-(6750+2250\sqrt{3})x\}$$
$$N_p=\{6\sqrt{3}x^5-67\sqrt{3}x^3+50\sqrt{3}x\}+i\{3x^6-51x^4+150x^2\}$$
$$N_s=\{-x^5+33x^3-75x\}+i\{8x^4-75x^2\}$$

である。よつて $m=0$ の根は

$$x=\pm3.2198+i1.2683,\quad \pm1.8100+i2.4019,\quad i2.8390,\quad \pm1.1199+i0.4467,\quad i0.9788$$

となり，これ等は第6図(3) として示してある。これより波動を求めると，

P 波，　$t<\dfrac{r-a}{v_p}-\tau$;　　$u=0,\quad v=0,\quad w=0$

$\dfrac{r-a}{v_p}-\tau<t<\dfrac{r-a}{v_p}+\tau$;

$$\left\{\begin{array}{l}
u\fallingdotseq\dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_3{}'P_3(\cos\theta)\\
\qquad\times\left[0.0161\,e^{1.2683\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\cos 3.2198\dfrac{v_p}{a}\left\{\dfrac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}\right.\\
\qquad\quad+0.0700\,e^{1.2683\ \text{〃}}\ \sin 3.2198\ \text{〃}\\
\qquad\quad+0.2222\,e^{2.4019\ \text{〃}}\ \cos 1.8100\ \text{〃}\\
\qquad\quad-0.1292\,e^{2.4019\ \text{〃}}\ \sin 1.8100\ \text{〃}\\
\qquad\quad-0.2828\,e^{2.8390\ \text{〃}}\\
\qquad\quad+0.0210\,e^{0.4469\ \text{〃}}\ \cos 1.1199\ \text{〃}\\
\qquad\quad+0.0050\,e^{0.4463\ \text{〃}}\ \sin 1.1199\ \text{〃}\\
\qquad\quad\left.-0.0070\,e^{0.9788\ \text{〃}}\right]\\
v\fallingdotseq0\qquad w=0
\end{array}\right.$$

S 波，　$t<\dfrac{r-a}{v_s}-\tau$;　　$u=0\quad v=0\quad w=0$

$\dfrac{r-a}{v_s}-\tau<t<\dfrac{r-a}{v_s}+\tau$;

$$\left\{\begin{array}{l}
u\fallingdotseq0\\
v\fallingdotseq2\sqrt{3}\dfrac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_3{}'\dfrac{dP_3(\cos\theta)}{d\theta}\\
\qquad\times\left[-0.0022\,e^{1.2683\frac{1}{v_p}\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\cos 3.2198\dfrac{1}{v_p}\left\{\dfrac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}\right.\\
\qquad\quad+0.0023\,e^{1.2683\ \text{〃}}\ \sin 3.2198\ \text{〃}\\
\qquad\quad-0.0032\,e^{2.4019\ \text{〃}}\ \cos 1.8100\ \text{〃}
\end{array}\right.$$

$$
\left\{\begin{array}{lll}
\quad +0.0078\,e^{2.4019} & \text{〃} & \sin 1.8100 \quad \text{〃} \\
\quad +0.0063\,e^{2.8390} & \text{〃} & \\
\quad +0.0017\,e^{2.4469} & \text{〃} & \cos 1.1199 \quad \text{〃} \\
\quad -0.0188\,e^{0.4469} & \text{〃} & \sin 1.1199 \quad \text{〃} \\
\quad -0.0186\,e^{0.9788} & \text{〃} & \Big] \\
w=0 & &
\end{array}\right.
$$

となる。

$m=4$ の場合

$$M=\frac{1}{x^6}[\{-9x^{10}+(972+328\sqrt{3})x^8-(22995+10670\sqrt{3})x^6$$
$$+(146190+88515\sqrt{3})x^4-(298515+157500\sqrt{3})x^2+157500\}$$
$$+i\{102+36\sqrt{3})x^9-(5535+2283\sqrt{3})x^7+(67685+36675\sqrt{3})x^5$$
$$-(246015+141015\sqrt{3})x^3+(157500+157500\sqrt{3})x\}]$$

$$N_p=\frac{1}{x^4}[\{12\sqrt{3}x^5-205\sqrt{3}x^3+560\sqrt{3}x\}+i\{3x^6-105x^4+765x^2-560\}]$$

$$N_s=\frac{1}{x^4}[\{-x^5+75x^3-630x\}+i\{12x^2-285x^2+630\}]$$

となるので，$\left(\dfrac{N_p}{M}\right)_{r=a}$, $\left(\dfrac{N_s}{M}\right)_{r=a}$ の分母は

$$\{-9x^{10}+(972+328\sqrt{3})x^8-(22995+10670\sqrt{3})x^6$$
$$+(146190+88515\sqrt{3})x^4-(298515+157500\sqrt{3})x^2+157500\}$$
$$+i\{(102+36\sqrt{3}x^9-(5535+2283\sqrt{3})x^7+(67685+36675\sqrt{3})x^5$$
$$-(246015+141015\sqrt{3})x^3+(157500+157500\sqrt{3})x\}$$

である。よつて極点は

$$x=\pm1.2653+i0.5293,\quad \pm1.6177+i0.4350,\quad \pm2.2789+i2.6968,$$
$$\pm2.5071+i2.8187,\quad \pm3.1652+i2.9414$$

となる。これ等は第6図(4) として示しておいた。これによつて P 波，S 波を求めると，

P 波，　$t<\dfrac{1}{v_p}(r-a)-\tau$;　　$u=0$　　$v=0$　　$w=0$

$$\frac{1}{v_p}(r-a)-\tau<t<\frac{1}{v_p}(r-a)+\tau$$

$$\left\{ u\fallingdotseq\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_4'P_4(\cos\theta)\right.$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\times\left[-0.00006e^{0.5293\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\sin 1.2563\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_p}(r-a)-(t+\tau)\right\}\right.\\
\begin{array}{llll}
\quad +0.0017 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad -0.0011e^{0.4350} & 〃 & \sin 1.6177 & 〃\\
\quad -0.0001 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad -0.0015e^{2.6968} & 〃 & \sin 2.2789 & 〃\\
\quad -0.0075 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad -0.0049e^{2.8187} & 〃 & \sin 2.5091 & 〃\\
\quad +0.0083 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad -0.0074e^{2.9414} & 〃 & \sin 3.1652 & 〃\\
\quad -0.0018 & 〃 & \cos & 〃
\end{array}\\
v\fallingdotseq 0\\
w=0
\end{array}
\right.
$$

$\frac{1}{v_p}(r-a)+\tau<t$ の場合は $m=2$ の場合と同様にすればよい。

S 波，　$t<\frac{1}{v_s}(r-a)-\tau$;　$u=0$,　$v=0$,　$w=0$

$\frac{1}{v_s}(r-a)-\tau<t<\frac{1}{v_s}(v-a)+\tau$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u\fallingdotseq 0\\
v\fallingdotseq -2\sqrt{3}\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}W_4'\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}\\
\qquad\times\left[-0.0006e^{0.5293\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}}\sin 1.2563\frac{v_p}{a}\left\{\frac{1}{v_s}(r-a)-(t+\tau)\right\}\right.\\
\qquad\begin{array}{llll}
\quad -0.0006 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad +0.0009e^{0.4350} & 〃 & \sin 1.6177 & 〃\\
\quad +0.0003 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad +0.0002e^{2.6968} & 〃 & \sin 2.2789 & 〃\\
\quad +0.0002 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad -0.0015e^{2.8187} & 〃 & \sin 2.5071 & 〃\\
\quad +0.0008 & 〃 & \cos & 〃\\
\quad -0.0002e^{2.9414} & 〃 & \sin 3.1652 & 〃\\
\quad -0.0002 & 〃 & \cos & 〃
\end{array}\\
w=0
\end{array}
\right.
$$

$\frac{1}{v_s}(r-a)+\tau<t$ の場合は前同様に処理すればよい。

$m=5$ 以上の場合は誤差が非常に大きくなり，事実上求めても無駄だと思はれる。それに「震源第2報」で明らかなように，$m=5$ 以上は振幅を計算する際，あまり影響がない。よつて $m=6$ 以上は求めてない。

以上の結果から $m=1$ 又は, 2 の場合が各波共振幅が大きい事が分つた。第７図に $n=4$ までの計算の結果を各方位にわたつて図示しておく。

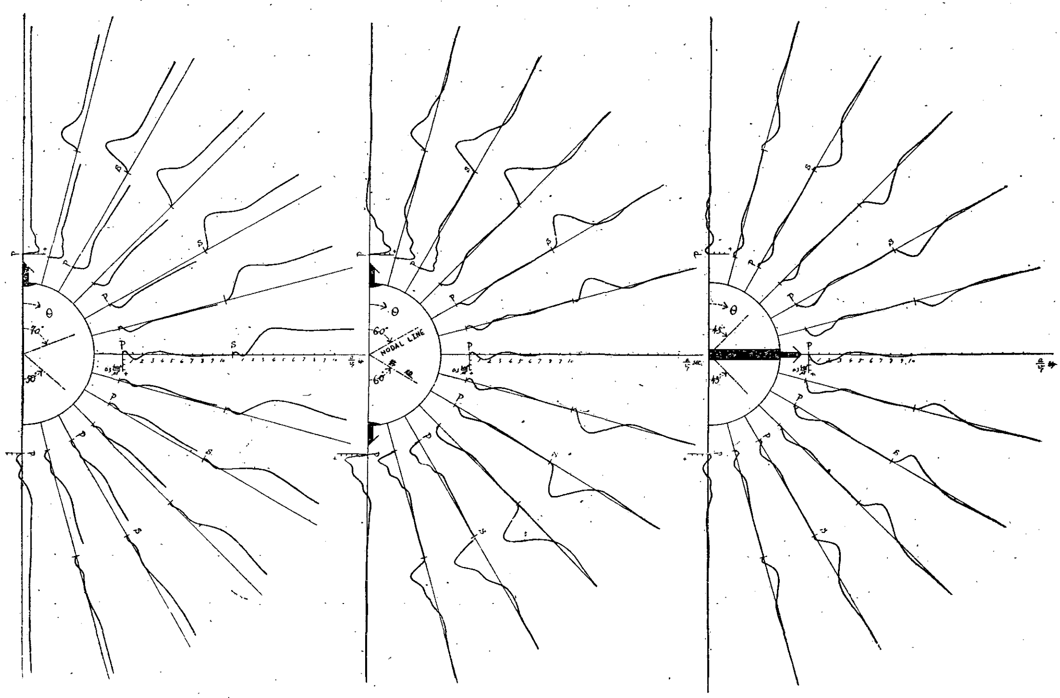

Fig. 7　Seismic Waves from the Explosion Origin

§ 4.　一般的な考察

以上の解式の結果から次の様な事が考へられる。

$M=0$ の根のあり方より，内部から生ずる波動は必ず減衰波である。これは p で積分して始めて現はれる事であり，従来の様な e^{ipt} に比例した力を与へるとしたやり方からは出て来ない事である。

$t<\frac{r-a}{v_p}-\tau$ 又は $t<\frac{r-a}{v_s}-\tau$ で，変位がないと言うことは，波動がまだ発生していないか又は発生していても，まだ観測点に到着していない時であつて，当然の解と言へる。次に

$$\frac{r-a}{v_p}-\tau<t<\frac{r-a}{v_p}+\tau \quad 又は \quad \frac{r-a}{v_s}-\tau<t<\frac{r-a}{v_s}+\tau$$

で変位が生ずるが，これは $-\tau$ 時において震源で発生した波が観測点に到着した事を意味する。しかもこの時は $+\tau$ 時に震源で発生した波がまだ到着していない間のことである。

$$\frac{r-a}{v_p}+\tau<t, \quad 又は \quad \frac{r-a}{v_s}+\tau<t$$

の時は $+\tau$ 時に震源で発生した波も到着している後の事であつて，それは $-\tau$ 時に発生した波に，2τ 時間だけ遅れて符号のみを逆にした同一の波がつけ加はる事を示している。これは $-\tau$ 時又は $+\tau$ 時に生ずる波が全然性質を同じくしている事になる。こゝで τ をかなり大きく取つてみると，$-\tau$ 時に生じた波が分離出来，しかもその波は減衰するので，変位はなくなり静止の状態にかへる事が分る。しかしその状態でもなお震源には力が加はつておる。従つて波動の生ずるのは力の変化がなければならないことになる。しかし第1図Aの場合は元の位置には静止しないで，力と釣合つただけ変位して静止する。これは地質学的な水平力による地形変動を説明すことになろう。それから波動は震源球の表面から同時に発生し，従来考へられていた様に，震源球の表面を力の加はつた所から波動が伝つて波を生ずるのではない事を示す。これは $\frac{a}{r}$ の高次の項を生かしてもやはり同じである。たゞ振幅が違つて来るだけの事である。

振幅の大きさは作用する力と，その力の作用面積と，$\frac{a}{r}$ に正比例し剛性率 μ に逆比例する。従つて，μ，r，f，ε を一定にしておけば，振幅は恰も震源域の半径の二乗に正比例している様に見える。波動の周期は $\frac{a}{v_p}$ に正比例し，減衰率は $\frac{a}{v_p}$ に逆比例している。従つて震源域が大きくなると，ゆつくりした波動となり，しかもなかなか減衰しない。

震源より出る波動の形は震源域の大きさには無関係であつて，たゞその発震機構がAであるかBであるかCであるかによつて違うだけである。従つて地震の数は多くても，波形はいづれもよく似ている事になる。たゞ三種類あるに過ぎない。

押，引の分れる節線の型はいづれも円錐型であつて，A機構では一方の押円錐の頂角は 140° であるが，もう一方の押円錐の頂角は 100° である。B機構では両方共押円錐の頂角は 120° である。C機構では両方共引円錐の頂角は 90° である。これより，A，B機構では押円錐型の初動分布を示し，C機構では引円錐型の初動分布を示す事になる。S 波の初動分布も全く P 波の分布型式と同一である。これが従来と非常に異なる所である。

又震源から出る波動は方位によつてみかけの週期も振幅も異なる。これも今回始めて求まつた結果である。又 P 波と S 波とのみかけの週期上の関係も求まつた。P 波の押の部分では S 波の週期は P 波の週期より大きいが，P 波の引の部分ではその逆となる。

以下に各機構に対する波動の振幅とみかけの半週期を掲げておく，これは第7図と対照し乍ら見ると分り易い。

第1表　波動の表

θ	A型				B型				C型			
	P波		S波		P波		S波		P波		S波	
	振幅	半週期	振幅	半週期	振幅	半週期	振幅	半週期	振幅	半週期	振幅	半週期
	$\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}$	$\frac{a}{v_p}$秒	$\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}$	$\frac{a}{v_p}$秒	$\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}$	$\frac{a}{v_p}$秒	$\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}$	$\frac{a}{v_p}$秒	$\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}$	$\frac{a}{v_p}$秒	$\frac{f\varepsilon a^2}{\mu r}$	$\frac{a}{v_p}$秒
0°	+0.3	4.0	0	0	+0.42	4.0	0	0	−0.04	0.5	0	0
15°	+0.27	4.0	−0.4	5.5	+0.38	3.9	−0.37	5.5	−0.04 第2動大	0.4	−0.02 第2動大	0.3
30°	+0.24	4.0	−0.66	5.5	+0.28	3.9	−0.62	5 5	−0.02…	0.3	−0.01…	0.2
45°	+0.21	4.0	−0.72	5.5	+0.19	3.8	−0.70	5.3	e+0.14–節線–3.2		e+0.35–節線–5.3	
60°	+0.16	3.0	−0.63	5.5	e+0.15–節線–3.3		e−0.61–節線–5.1		+0.17	3.5	+0.31	5.4
	—70° 節線—											
75°	−0.02…	0.2	−0.57	5.5	…−0.03	0.4	…+0.02	0.3	+0.19	3.7	+0.18	5.5
90°	−0.04 第2動大	0.5	…−0.02	0.4	−0.04 第2動大	0.5	0 第2動大	0	+0.20	3.7	0	0
105°	−0.05	1.0	−0.02 第3動大	0.3	−0.03…	0.4	−0.02…	0.3	+0.19	3.7	−0.18	5.5
120°	…−0.06	1.2	−0.01…	0.4	e+0.15–節線–3.3		e+0.61–節線–5.1		+0.17	3.5	−0.31	5.4
	—130° 節線—		—130° 節線—									
135°	+0.01	0.2	+0.02	0.6	+0.19	3.8	+0.70	5.3	e+0.14–節線–3.2		e−0.35–節線–5.3	
150°	+0.05	1.2	+0.03	0.6	+0.28	3.9	+0.62	5.5	…−0.02	0.3	…+0.01	0.2
165°	+0.1	1.4	+0.02	0.6	+0.38	3.9	+0.37	5.5	−0.04 第2動大	0.4	+0.02 第2動大	0.3
180°	+0.14	1.4	0	0	+0.42	4.0	0	0	−0.04	0.5	0	0

以上の表及び第7図より次の事が言へる。

A機構では，頂角 140° の押円錐の部分では，波動が零線を切らないので，みかけの週期を求める事が困難であるが，引波の部分では，P 波も S 波もみかけの週期はずつと小さくなり，振幅も小さい。又頂角 100° の方の押円錐の部分では，P 波のみかけの週期はずつと小さくなり，引波の部分と大体同じである。振幅も同じ位となる。S 波の方はますます振幅も週期も小さくなる。振幅は P 波よりも小さい。S 波の節線は頂角 100° のもの一つである。

B機構では初動分布は対照型となり，P 波の押波の振幅は引波の振幅より一般に大きい。S 波は，P 波の引波の部分では第2動の方が大きく，従つて S 波の節線は観測からは描き難いであろう。それ故従来 P 波の節線と S 波の節線は 45° 傾いておるように思はれたのである。

C機構も対照型であるが，これはB機構と違つて円錐の部分が引となる。この時もやはり P 波の振幅は押波の方が引波より大きい。S 波も又 P 波の引波の部分は第2動の方が大きく，これも観測上間違はれ易いと思はれる。

B機構もC機構も，押波に比し引波の方が週期は小さい。S 波も同様である。S 波の節線は全部

で4本出来る。一つは両極を結ぶ直線であり，も一つは赤道面，他は P 波の節線と同じ円錐である。

以上を通じて，大体 P 波は急激に始まり，S 波は漸時に始まる波形となる。又節線の型式も同じ円錐型とは言へ，石本博士の示されたものは $P_2(\cos\theta)-\frac{1}{4}P_0(\cos\theta)$ であつたが(1)，こゝではB機構では $\frac{1}{8}P_0(\cos\theta)+P_2(\cos\theta)$ であり，C機構では $\frac{1}{8}P_0(\cos\theta)-\frac{1}{2}P_2(\cos\theta)$ の型式となる。A機構では $\frac{1}{16}P_0(\cos\theta)+\frac{1}{4}P_1(\cos\theta)+\frac{1}{2}P_2(\cos\theta)$ の型式となる。又井上博士が強調された S 波の方が P 波の週期より長くなるのは(2)，P 波の押の部分のみで，引波の部分では逆に短くなる。A機構では P 波の押部分でも，頂角 100° の方の押の部分では，S 波の方が週期も振幅も小さい。頂角 140° の方では S 波の方が週期も振幅も大きい。これ等の関係は第3図に一目瞭然である。

又従来震源域よりも大きい波長の波動は生じないように考へられていたが，この解式からは，震源域の2～10倍位の波長の波ばかり生ずる事になつた。振動力を作用した場合は震源域よりも大きい波長の波動は生じないのである。

この結果と実際の地震の観測結果との比較は漸時述べる事にする。

この厄介な計算を喜んでやつて下さつた中央気象台地震課野依一郎氏に厚く感謝します。又中央気象台長和達清夫博士，地震課長井上宇胤博士，本間正作技師，広野卓蔵技師の御懇切なる御教示に対し心から感謝致しております。この論文は戦争のため発表が非常に遅れました。

——1946. 5. 1——

(1) 石本巳四雄：La déformation de la croûte terrestre et la production des ondes sismique eu foyer. 震研彙報 第11号 (昭8, 1933)

(2) 井上 宇胤：Note on the Origins of Earthquakes. (2nd Paper) 震研彙報 第15号 (昭 12 1937)

On the Origin of Earthquake (the fourth paper)

—On the Case of Aperiodic Force (I)—

S. TAKAGI (*Training School for Meteorological Observer*)

The author calculated elastic waves generated from a cavity buried in an infinite elastic body on whose surface forces are applied in manners shown Fig. 4 and Fig. 2 for time and space. This distribution of forces is imagined corresponding to the explosion of magma in magma pockets as shown in Fig. 1. The results are showen in Fig. 7.