

海底変動の進行において生ずる波 (II)

本 間 正 作*

§ 1. ま え が き

本論文才I報⁽¹⁾では海底変動がある方向に定速度で進行しつづける時に海面に生ずる水位の昇降を計算したが、それでは海底変動が無限の距離を走ることになる。実際には変動区域は有限であつて、その一方の端から他の端まで変動が伝わり、その区域の外では変動が起らないであろう。そのような場合をやはり一次元の問題として扱つてみる。

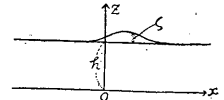
§ 2. 基 本 式

水平に x 軸, 鉛直上方に z 軸をとり, 海底を $z=0$, 平均水面を $z=h$, 水位の上昇量を ζ とする。

速度ポテンシャルを ϕ とし連続の条件から

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

又
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=h}. \quad (2.2)$$



才1図

自由表面の式は

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=h} = 0, \quad (2.3)$$

ここに μ は Rayleigh の仮摩擦係数である。

$$\phi = \{ A e^{k(z-h)} + B e^{-k(z-h)} \} e^{i\alpha x + i\beta(x-ct)} \quad (2.4)$$

と仮定する。ここに c は常数で後に海底変動の進行速度に一致させる。(2.1) により

$$k = \alpha + \beta. \quad (2.5)$$

(2.4) を (2.3) 入れると

$$B = - \frac{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c - kg}{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c + kg} A. \quad (2.6)$$

次に (2.2) と (2.4) から

$$\begin{aligned} \zeta &= - \int \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=h} dt \\ &= \frac{k}{i\beta c} (A - B) e^{i\alpha x + i\beta(x-ct)} \end{aligned}$$

* 松代地震観測所

(1) 筆者, 海底変動の進行によつて生ずる波 (I) 本誌 14 卷 3, 4 号 (昭和 25 年) 65 頁—69 頁

$$= \frac{2k}{i\beta c} \cdot \frac{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c}{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c + kg} A e^{i\alpha x + i\beta x - ct}$$

であるが α も β も任意だから一般化すると

$$\zeta = \frac{2}{i} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\beta c} \cdot \frac{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c}{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c + kg} A(\alpha, \beta) e^{i\alpha x + i\beta x - ct} d\alpha d\beta. \quad (2.7)$$

これに対して

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} k \frac{(\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c) \operatorname{ch}(kh) - kg \operatorname{sh}(kh)}{\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c + kg} A(\alpha, \beta) e^{i\alpha x + i\beta x - ct} d\alpha d\beta. \quad (2.8)$$

$$[\text{海底の変動速度}] = -F(x) f(x-ct) \quad (2.9)$$

とおけば Fourier の定理から

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = F(x) f(x-ct) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \iint_{-\infty}^{\infty} F(m) f(n) e^{i\alpha x - m} + i\beta(x-ct-n) dmdn.$$

これと (2.8) とから $A(\alpha, \beta)$ を求め (2.7) に代入すると

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{4\pi^2 i} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta c + 2i\mu c}{(\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c) \operatorname{ch}(kh) - kg \operatorname{sh}(kh)} e^{i\alpha x + i\beta x - ct} d\alpha d\beta \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} F(m) f(n) e^{-i\alpha m - i\beta n} dmdn. \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.5) により $\alpha = k - \beta$ であるから α の代りに k を積分変数にする。 $\partial(\alpha, \beta) / \partial(k, \beta) = 1$ で、 β をおさえると $\alpha \rightarrow \pm \infty$ が $k \rightarrow \pm \infty$ に対応するから

$$\zeta = \frac{1}{4\pi^2 i} \iint_{-\infty}^{\infty} F(m) f(n) dmdn \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta c + 2i\mu c}{(\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c) \operatorname{ch}(kh) - kg \operatorname{sh}(kh)} e^{ik(x-m) + i\beta(m-n-ct)} dk d\beta. \quad (2.10)$$

先ず β に関する積分を行う。

$$(\beta^2 c^2 + 2i\mu\beta c) \operatorname{ch}(kh) - kg \operatorname{sh}(kh) = 0$$

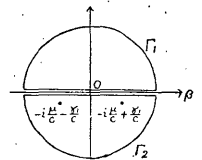
の根は

$$\beta c = -i\mu \pm \gamma_1$$

ただし

$$\gamma_1 = \sqrt{kg \operatorname{tgh}(kh) - \mu^2}$$

にあり、ここは被積分函数の単極であるから才 2 図のような積分路を考え $m-n-ct > 0$ の時は Γ_1 、 $m-n-ct < 0$ の時は Γ_2 なる輪道上で積分する。半円の部分の上では半径を大きくするに従い積分えの寄与は 0 に近づく。 Γ_1 内には不正則点がなく、 Γ_2 内には $-i\mu \pm \gamma_1$ に単極があるのだから留数の定理により



才 2 図

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots d\beta = 0 \quad (m-n-ct > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots d\beta = -2\pi i \left[\text{Res. at} \left(-i \frac{\mu}{c} + \frac{\gamma_1}{c} \right) + \text{Res. at} \left(-i \frac{\mu}{c} - \frac{\gamma_1}{c} \right) \right]$$

$$= -\frac{\pi i}{c} \left\{ \frac{\gamma_1 + i\mu}{\gamma_1 \text{ch}(kh)} e^{i(\gamma_1/c)(m-n-ct) + (\mu/c)(m-n-ct)} \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_1 - i\mu}{\gamma_1 \text{ch}(kh)} e^{-i(\gamma_1/c)(m-n-ct) + (\mu/c)(m-n-ct)} \right\},$$

$$(m-n-ct < 0)$$

となる。以上を (2.10) に代入し $\mu \rightarrow 0$ にした時の γ_1 を γ とおく。すなわち

$$\gamma = \sqrt{kg \text{tgh}(kh)} \quad (2.11)$$

とおくと、

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi c} \iint_{-\infty}^{\infty} F(m)f(n)dm dn \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}(kh)} \{ e^{i(\gamma/c)(m-n-ct)} + e^{-i(\gamma/c)(m-n-ct)} \} e^{ik(x-m)} dk, \\ \quad (m-n-ct < 0) \\ 0, \quad (m-n-ct > 0) \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

となる。これが基本式である。

§ 3. 特殊な場合

(2.12) の積分の順をかえて

$$\zeta = -\frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\text{ch}(kh)} dk \int_{-\infty}^{\infty} F(n) e^{-ik(n+ct)} dn$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F(m) \{ e^{i\{(\gamma/c)-k\}(m-n-ct)} + e^{-i\{(\gamma/c)+k\}(m-n-ct)} \} dm \quad (3.1)$$

とおく。ただし $m-n-ct < 0$ の区間だけ考えている。

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad L > x > -L \\ 0, \quad |x| > L \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

と仮定する。すなわち海底変動の起る区間は長さ $2L$ の範囲に限り、その外域には変動がないとする。もし $n+ct > L$ なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m) \{ \dots \} dm = \int_{-L}^L \{ \dots \} dm = \frac{e^{i\{(\gamma/c)-k\}(L-n-ct)} - e^{-i\{(\gamma/c)-k\}(L+n+ct)}}{i \left(\frac{\gamma}{c} - k \right)}$$

$$+ \frac{e^{i\{(\gamma/c)+k\}(L-n-ct)} - e^{-i\{(\gamma/c)+k\}(L+n+ct)}}{i \left(\frac{\gamma}{c} + k \right)},$$

もし $L > n+ct > -L$ なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m)\{\dots\}dm = \int_{-L}^{n+ct} \{\dots\}dm = \frac{1-e^{-i\{(\gamma/c)-k\}(L+n+ct)}}{i\left(\frac{\gamma}{c}-k\right)} + \frac{e^{i\{(\gamma/c)+k\}(L+n+ct)}-1}{i\left(\frac{\gamma}{c}-k\right)},$$

もし $-L > n+ct$ なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m)\{\dots\}dm = 0.$$

以上を (3.1) に代入して

$$\begin{aligned} \zeta = & -\frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikh}}{\text{ch}(kh)} dk \left[\int_{-L-ct}^{L-ct} f(n)e^{-ik(n+ct)} \left\{ \frac{1-e^{-i\{(\gamma/c)-k\}(L+n+ct)}}{i\left(\frac{\gamma}{c}-k\right)} \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{e^{i\{(\gamma/c)+k\}(L+n+ct)}-1}{i\left(\frac{\gamma}{c}-k\right)} \right\} dn + \int_{L-ct}^{\infty} f(n)e^{-ik(n+ct)} \left\{ \frac{e^{i\{(\gamma/c)-k\}(L-n-ct)}-e^{-i\{(\gamma/c)-k\}(L+n+ct)}}{i\left(\frac{\gamma}{c}-k\right)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{i\{(\gamma/c)+k\}(L+n+ct)}-e^{-i\{(\gamma/c)+k\}(L-n-ct)}}{i\left(\frac{\gamma}{c}+k\right)} \right\} dn \right] \quad (3.3) \end{aligned}$$

次に $f(n)$ は n のほとんどあらゆる値に対して 0 であり、たゞ $n=0$ の附近だけで非常に大きい値をとり、その狭い範囲の積分が

$$\int f(n)dn = cH \quad (3.4)$$

とする。ここで $-H$ は速度 f が瞬間的に生じたために出来た海底の変動量である。そうすると、

もし $-L-ct < 0$ なら

$$\int_{-L-ct}^{L-ct} \dots dn = 0, \quad \int_{L-ct}^{\infty} \dots dn = 0,$$

もし $-L-ct < 0 < L-ct$ なら

$$\int_{-L-ct}^{L-ct} \dots dn = cH e^{-ikct} \left\{ \frac{1-e^{-i\{(\gamma/c)-k\}(L+ct)}}{i(\gamma/c-k)} + \frac{e^{i\{(\gamma/c)+k\}(L+ct)}-1}{i(\gamma/c+k)} \right\},$$

$$\int_{L-ct}^{\infty} \dots dn = 0,$$

もし $L-ct > 0$ なら

$$\int_{-L-ct}^{L-ct} \dots dn = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{L-ct}^{\infty} \dots dn = & cH e^{-ikct} \left\{ \frac{e^{i\{(\gamma/c)-k\}(L-ct)}-e^{-i\{(\gamma/c)-k\}(L+ct)}}{i(\gamma/c-k)} \right. \\ & \left. + \frac{e^{i\{(\gamma/c)+k\}(L+ct)}-e^{-i\{(\gamma/c)+k\}(L-ct)}}{i(\gamma/c+k)} \right\} \end{aligned}$$

となる、

$$u = kL \quad (3.5)$$

とおくと, (2.11) から

$$\frac{\gamma}{c} L = \frac{\sqrt{gh}}{c} \sqrt{\frac{L}{h}} u \operatorname{tgh}\left(\frac{h}{L} u\right) = \varepsilon \sqrt{\frac{L}{h}} u \operatorname{tgh}\left(\frac{h}{L} u\right)$$

となる。ただし

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{gh}}{c} \quad (3.6)$$

海底変動の存在する区域 $2L$ が海の深さ h に比して大変大きいと考えられるなら

$$\frac{h}{L} u \ll 1 \quad \therefore \frac{\gamma}{c} L = \varepsilon u$$

とおいても大過ない。そうしておいて以上の結果を (3.3) に代入すると

$$\zeta = \begin{cases} -\frac{H}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left\{ \frac{e^{i\left(\frac{x-ct}{L} + (\varepsilon-1)\left(1-\frac{ct}{L}\right)\right)u} - e^{i\left(\frac{x-ct}{L} - (\varepsilon-1)\left(1+\frac{ct}{L}\right)\right)u}}{\varepsilon-1} \right. \\ \left. + \frac{e^{i\left(\frac{x-ct}{L} + (\varepsilon+1)\left(1+\frac{ct}{L}\right)\right)u} - e^{i\left(\frac{x-ct}{L} - (\varepsilon+1)\left(1-\frac{ct}{L}\right)\right)u}}{\varepsilon+1} \right\} du, & (L < ct) \\ -\frac{H}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left\{ \frac{e^{i\frac{x-ct}{L}u} - e^{i\left(\frac{x-ct}{L} - (\varepsilon-1)\left(1+\frac{ct}{L}\right)\right)u}}{\varepsilon-1} \right. \\ \left. + \frac{e^{i\left(\frac{x-ct}{L} + (\varepsilon+1)\left(1+\frac{ct}{L}\right)\right)u} - e^{i\frac{x-ct}{L}u}}{\varepsilon+1} \right\} du, & (-L < ct < L) \\ 0, & (ct < -L) \end{cases}$$

しかるに

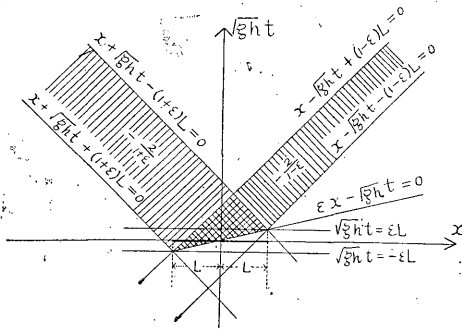
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isu}}{u} du = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin(su)}{u} du = \pi i \operatorname{sgn} s$$

であるから

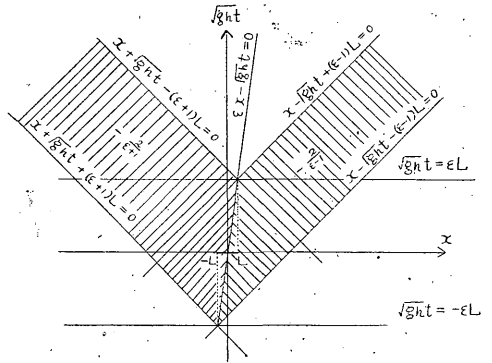
$$\zeta = \begin{cases} \frac{H}{4} \left[\frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x-ct+(\varepsilon-1)(L-ct)\} - \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x-ct-(\varepsilon-1)(L+ct)\} \right. \\ \left. - \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x-ct+(\varepsilon+1)(L+ct)\} + \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x-ct-(\varepsilon+1)(L-ct)\} \right], & (L < ct) \\ \frac{H}{4} \left[\frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}(x-ct) - \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x-ct-(\varepsilon-1)(L+ct)\} \right. \\ \left. + \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{sgn}(x-ct) - \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x-ct+(\varepsilon+1)(L+ct)\} \right], & (-L < ct < L) \\ 0, & (ct < -L) \end{cases}$$

あるいは (3.6) により c を \sqrt{gh} におきかえると

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{4} \left[\frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x - \sqrt{gh}t - (1-\varepsilon)L\} - \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x - \sqrt{gh}t + (1-\varepsilon)L\} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x + \sqrt{gh}t - (1-\varepsilon)L\} - \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x + \sqrt{gh}t + (1+\varepsilon)L\} \right], \\ \hspace{15em} (\varepsilon L < \sqrt{gh}t) \\ \\ \frac{H}{4} \left[\frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{\varepsilon x - \sqrt{gh}t\} - \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x - \sqrt{gh}t + (1-\varepsilon)L\} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{sgn}\{\varepsilon x - \sqrt{gh}t\} - \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{sgn}\{x + \sqrt{gh}t + (1+\varepsilon)L\} \right], \\ \hspace{15em} (-\varepsilon L < \sqrt{gh}t < \varepsilon L) \\ \\ 0 \\ \hspace{15em} (\sqrt{gh}t < -\varepsilon L) \end{array} \right\} \quad (3.7)$$



才 3 図 $\varepsilon = \frac{\sqrt{gh}}{c} < 1$ の時、 $-H$ なる海底変動が $x = -L$ から $x = L$ まで速度 c で走つた時生ずる波の走時と波型、 $x > 0$ の波高は $\frac{H}{4}$ の $-\frac{2}{1-\varepsilon}$ 倍、 $x < 0$ の波高は $-\frac{2}{1+\varepsilon}$ 倍、中央の三角の部分は両方が重なり $-\frac{4}{1-\varepsilon^2}$ 倍となる。



才 4 図 $\varepsilon = \frac{\sqrt{gh}}{c} > 1$ の時、 $-H$ なる海底変動が $x = -L$ より $x = L$ まで速度 c で走つた時生ずる波の走時と波型、 $x > 0$ の波高は $\frac{H}{4}$ の $-\frac{2}{\varepsilon-1}$ 倍、 $x < 0$ の波高は $-\frac{2}{\varepsilon+1}$ 倍となる。

才 3 図は $\varepsilon < 1$ の場合、海底変動が $x = -L$ から L まで走つた時の海面の昇降図で陰で塗つた部分が昇降の存在する区域であり、白い部分は昇降がない。陰のある部分に $-\frac{2}{1-\varepsilon}$ とか $-\frac{2}{1+\varepsilon}$ とか書いてあるのは $\frac{4\varepsilon}{H}$ の値である。 $x > 0$ の側にも $x < 0$ の側にも有限の巾の波が一定速度 \sqrt{gh} で伝わるけれ共 $x > 0$ の方が $x < 0$ の方より振巾が大きく、その比は $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ である。その代り $x > 0$ の方が $x < 0$ より波の巾 (又は振動継続時間) が短くその比は $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ となる。波源附近では両方の波が重なつて $\frac{4\varepsilon}{H} = -\frac{2}{1-\varepsilon} - \frac{2}{1+\varepsilon} = -\frac{H}{1-\varepsilon^2}$ になる区域がある。

才 4 図は $\varepsilon > 1$ の場合の同様な図である。 $x > 0$ と $x < 0$ では振巾比は $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$ 、波の巾の比は $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$

となる。この時は波源附近でも両方の波が重なる区域が出来ない。

海底波動が進行しないで $x = -L$ の所においてのみ起つていると見なすと波の走時曲線は x の方向に進むものでは $x - \sqrt{gh}t + (1 - \varepsilon)L = 0$, $-x$ の方向に進むものでは $x + \sqrt{gh}t + (1 + \varepsilon)L = 0$ になるはずであるから、才 3 図から見ると海底変動の進行する時は、 x の方向の波は $\sqrt{gh}t = 2(1 - \varepsilon)L$ だけ早く到着している。しかし $-x$ の方向の波はそういうことがない。才 4 図の時は x の方向の波も $-x$ の方向の波も海底変動が進行したため走時に影響をうけることがない。

$\varepsilon = 1$ であると x の方向の波の振巾が ∞ となるから、ここに述べた解は成り立たない。実際の場合はおそらく $\varepsilon \ll 1$ であろう⁽²⁾ その時は x の方向にも $-x$ の方向にも大体同じ波が対称的に進むだけである。

以上の研究ではいつも一次元の問題を考えたから大して面白い結果が出ない。海底変動の奥行きが有限である時の横に出る波の研究は次の機会にゆずる。

おわりに気象学会で代読していただいた地震課の岡野敏雄氏及び製図の一部をしていただいた本所員関彰氏に感謝の意を表す。

(1949, VI, 13)

(2) 脚註 (1) の前論文参照