

地表温度の変化が坑内における地殻の傾斜、 伸縮の観測に及ぼす影響

本 間 正 作*・長 宗 留 男*

§1. は し が き

半無限弾性体内の温度分布による表面及び内部の弾性変形については既に多くの計算があり⁽¹⁾、又内部の応力分布についての解析もある⁽²⁾。最近トンネル内で地殻の傾斜及び伸縮の観測が各所で行われるようになったから抗道外の地表温度の日変化や年変化がこれらの量にどのような影響を与えるかを吟味する必要が起つたが、上記の諸計算は条件の違いからそのまま応用するのに都合の悪い点もあるので再びこの問題を取り上げてみた。

§2. 半圓筒形山脈の中心における温度

先ずトンネル外の地温の日変化や年変化に応じて内部の温度がどの位変り得るかを調べて見る。トンネルは才1図のような半径 a の半円筒形の無限に長い山脈を横断しておるものとし、半円の中心に原点をおく極座標 (r, φ) をとる。山脈外の平地の地表は $\varphi = 0$ 及び $\varphi = \pi$ とする。

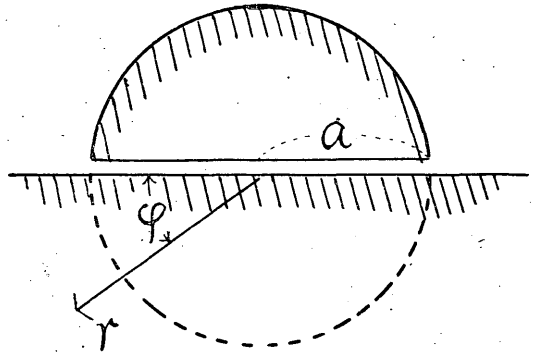


Fig. 1

熱伝導の式は温度を T 、温度拡散率を k とすると

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.1)$$

地表の温度は振幅 A で週期的に変化するものとすれば境界条件は

* 地震観測所

(1) G. Nishimura: The Effect of Temperature Distribution on the Deformation of a Semi-infinite Elastic Body, Bull. Earthq. Res. Inst., 8, (1930) 91-142

G. Nishimura: On the Expressions of the Deformation of a Semi-infinite Elastic Body due to the Temperature Variation, Bull. Earthq. Res. Inst., 10, (1932) 335-351

H. Arakawa: The Effect of Temperature on the Deformation of Infinite or Semi-infinite Elastic Body (I), Geophys. Magazin, 4, (1931) 297-306, (II) 5, (1932) 139-146

門脇関郎: 温度変化に伴う半無限弾性体の変形, 驗震時報, 11, (1941) 416-428

(2) T. Matsuzawa: Temperaturverlauf an der Bodenoberfläche und der Spannungszustand in der Erdkruste (I), Bull. Earthq. Res. Inst., 20, (1942) 20-29; (II) ibid, 265-272.

$$T_{r=a} = \begin{cases} Ae^{i\psi t}, & (2\pi > \varphi > \pi) \\ Ae^{-b \sin \varphi + i(\psi t - b \sin \varphi)}, & (\pi > \varphi > 0) \end{cases}$$

となる。但し $b = \sqrt{\frac{p}{2k}} a$, ($\pi > \varphi > 0$) の部分の条件は山脈がないと考えた場合の半無限固体の表面で T が週期的に変る場合の内部の温度の $r=a$ における値である⁽³⁾。この境界条件で解を求めるのは容易でないが、 T は地中に少し入ると急に減るから、 φ の大きい部分の精度は大じて科題にならない。従つて唯今の程度の近似算では $\sin \varphi \doteq \varphi$ とおいて

$$T_{r=a} = \begin{cases} Ae^{i\psi t}, & (2\pi > \varphi > \pi) \\ Ae^{-b\varphi + i(\psi t - b\varphi)}, & \left(\frac{\pi}{2} > \varphi > 0 \right) \\ Ae^{-b(\pi - \varphi) + i[\psi t - b(\pi - \varphi)]}, & \left(\pi > \varphi > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

但し
$$b = \sqrt{\frac{p}{2k}} a \quad (2.3)$$

とおいても間に合う。 $T_{\infty} e^{i\psi t}$ とおくと (2.1), (2.2) は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{i\psi}{k} T = 0, \quad (2.3)$$

$$T_{r=a} = \begin{cases} A, & (2\pi > \varphi > \pi) \\ Ae^{-b\varphi - ib\varphi}, & \left(\frac{\pi}{2} > \varphi > 0 \right) \\ Ae^{-b(\pi - \varphi) - ib(\pi - \varphi)}, & \left(\pi > \varphi > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (2.4)$$

となる。(2.4) の右辺を Fourier 級数で表わすと

$$\begin{aligned} T_{r=a} = & -\frac{A}{2\pi} \left(\frac{L-iL}{b} + \pi \right) \\ & + \frac{A}{\pi} L \sum_{s=0}^{\infty} (L+2) \cdot \frac{(-)^s (2S+1) \{ (2S+1)^2 - 2ib^2 \}}{(2S+1)^4 + 4b^4} \cos (2S+1) \theta \\ & + \frac{A}{\pi} L \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \cos \frac{S\pi}{2} \right) - (L+1) \left(\cos \frac{S\pi}{2} - (-)^s \right) \right\} \frac{b \{ S^2 + 2b^2 + i(S^2 - 2b^2) \}}{S^4 + 4b^4} \cos S\theta \\ & - \frac{A}{\pi} L \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ (L+2) \frac{(-)^s (2S+1) b [(2S+1)^2 + 2b^2 - i \{ (2S+1)^2 - 2b^2 \}]}{(2S+1)^4 + 4b^4} + \frac{2}{2S+1} \right\} \sin (2S+1) \theta \\ & + \frac{A}{\pi} L \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \cos \frac{S\pi}{2} \right) - (L+1) \left(\cos \frac{S\pi}{2} - (-)^{s+1} \right) \right\} \frac{S^2 - 2ib^2}{S^4 + 4b^4} \sin S\theta \quad (2.5) \end{aligned}$$

となる。但し

(3) 小平吉男: 物理数学, II 卷 (1941) p. 266 など参照

$$L = e^{-\frac{b(1+i)\pi}{2}} - 1, \quad (2.6)$$

この条件で特に $r=0$, 即ちトンネルの中心の T を求め, その実数部分をとると, 途中の計算は省略して

$$T_{r=0} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1 - e^{-\frac{b\pi}{2}} \left(\cos \frac{b\pi}{2} - \sin \frac{b\pi}{2} \right) + \pi}{b} \right\} \frac{\ker(\sqrt{2b}) \cos pt + \operatorname{bei}(\sqrt{2b}) \sin pt}{\{\ker \sqrt{2b}\}^2 + \{\operatorname{bei}(\sqrt{2b})\}^2} \quad (2.7)$$

となるが, 一般に b は極めて大きいから

$$T = \frac{A}{2} \sqrt{\sqrt{2}\pi b} e^{-b} \cos(pt - \beta), \quad (2.8)$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-1 - \operatorname{tg}\left(b + \frac{\pi}{2}\right)}{1 - (\sqrt{2}+1) \operatorname{tg}\left(b + \frac{\pi}{4}\right)} \quad (2.9)$$

とおいてもよい。

今 $a=50$ 米, $k=5 \times 10^{-3}$, として, 地表温度の日変化の影響を調べると $b=395$ となるから

$$T = \frac{\sqrt{\sqrt{2}\pi}}{2} \sqrt{395} A e^{-395} \cos(pt - 1.66\pi)$$

となる。 $e^{-395} = 3.5 \times 10^{-171}$ であるから, A がいかに大きくとも温度振巾は問題にならない位小さい。又年変化を考えても同様であつて, むしろトンネル内に外気が僅かながら侵入する効果の方が遙かに大きい。

§3. 抗外に生じた熱的歪の傳播

前節のように抗内の地温の変化の直接の影響は全く問題とならないが, 地表の温度変化によつて生じた地殻の弾性歪が抗内に波及するかも知れない心配があるから, 次にこの点を吟味してみる。

地表にそつてトンネルの方向に x 軸, 鉛直下方に z 軸をとり, これらの方向への弾性的変位を (u, w) として 2 次元的熱弾性平衡を考えよう。熱伝導の式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (3.1)$$

弾性平衡の式は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda+2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \alpha \frac{\partial T}{\partial t}, \\ (\lambda+2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

となる。ここで λ, μ は Lamé の弾性率で, c を体積膨張係数とする時

$$\alpha = \frac{2}{3}(\lambda + \mu) C \quad (3.3)$$

である。

地表の温度分布が

$$T_{z=0} = A e^{i l x} \cos(lx) \quad (3.4)$$

であれば、(3.1)の解は

$$T = A e^{-\sigma z + i l x} \cos(lx) \quad (3.5)$$

となる。ここで

$$\sigma = \sqrt{l^2 + i \frac{p}{k}}, \quad R(\sigma) > 0 \quad (3.6)$$

これを(3.2)に入れて特解 (u_1, w_1) を求めると

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\alpha l A}{(\lambda + 2\mu)(\sigma^2 - l^2)} e^{-\sigma z + i l x} \sin(lx), \\ w_1 &= -\frac{\alpha \sigma A}{(\lambda + 2\mu)(\sigma^2 - l^2)} e^{-\sigma z + i l x} \cos(lx) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

となり、これに対し(3.2)の補解は

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= (B + E z)^{-l z + i l x} \sin(lx), \\ w_2 &= \left(B + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{E}{l} + E z \right) e^{-l z + i l x} \cos(lx) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となる。 B, E は積分常数である。一般解は

$$u = u_1 + u_2, \quad w = w_1 + w_2 \quad (3.9)$$

地表の境界条件

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma z=0} &= \left[\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha T \right]_{z=0} = 0, \\ \widehat{\sigma z=0} &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

に代入すると

$$B = \frac{\alpha A}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\sigma}{\sigma^2 - l^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\sigma + l} \right), \quad E = \frac{-\alpha A}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{l}{\sigma + l} \quad (3.10)$$

と決る。必要な歪成分の $z=0$ における値は

$$\theta = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{z=0}, \quad \varepsilon_1 = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{z=0}, \quad \varepsilon_2 = \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (3.11)$$

である。 θ は地盤傾斜、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は夫々水平及鉛直方向の伸縮である。これらの値を(3.9), (3.10)から計算すると

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\sigma+l} CA \sin(lx), \\ \varepsilon_1 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\sigma+l} CA \cos(lx), \\ \varepsilon_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(\lambda+\mu)\sigma+\mu l}{(\lambda+2\mu)(\sigma+l)} CA \cos(lx) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

を得る。

次に地表の温度分布を

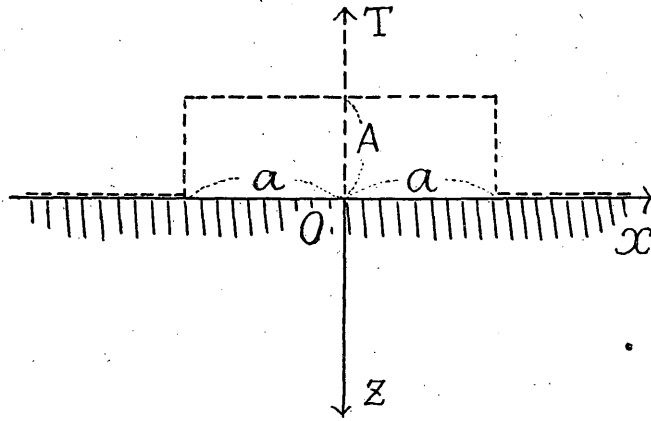


Fig. 2

$$T_{z=0} = \begin{cases} Ae^{i\nu t}, & (a \geq x \geq -a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \quad (3.13)$$

とおくと、Fourier の定理により

$$T_{z=0} = \frac{A}{\pi} \int_0^\infty dl e \int_{-a}^a \cos\{l(x-\xi)\} d\xi e^{i\nu t}$$

であるから

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2C}{3\pi} A \int_0^\infty \frac{l}{\sigma+l} dl \int_{-a}^a \sin\{l(x-\xi)\} d\xi e^{i\nu t}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{2C}{3\pi} A \int_0^\infty \frac{l}{\sigma+l} dl \int_{-a}^a \cos\{l(x-\xi)\} d\xi e^{i\nu t}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{2C}{3\pi} A \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)\sigma+\mu l}{(\lambda+2\mu)(\sigma+l)} dl \int_{-a}^a \cos\{l(x-\xi)\} d\xi e^{i\nu t}, \end{aligned}$$

あるいわ

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{2C}{3\pi} A \{H(a-x) - H(a+x)\} e^{i\nu t}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{2C}{3\pi} A \{K(a-x) + K(a+x)\} e^{i\nu t}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{2C}{3\pi} A \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left\{ \begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix} \right\} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \{K(a-x) + K(a+x)\} \right] e^{i\nu t} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

ここに $\left\{ \begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix} \right\}$ は $\left\{ \begin{matrix} a > x (> 0) \\ a < x \end{matrix} \right\}$ に対応し、

$$H(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(lx)}{l + \sqrt{l^2 + i \frac{p}{k}}} dl,$$

$$K(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(lx)}{l + \sqrt{l^2 + i \frac{p}{k}}} dl,$$

又は

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos\left(x \sqrt{\frac{p}{k}} \zeta\right)}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + i}} d\zeta, \\ K(x) &= \int_0^\infty \frac{\sin\left(x \sqrt{\frac{p}{k}} \zeta\right)}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + i}} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

吾々の必要とするのは (3.13) ではなく

$$T_{z=0} = \begin{cases} 0 & (a \geq x \geq -a) \\ Ae^{i\nu t} & (|x| > a) \end{cases} \quad (3.16)$$

に対する解である。先ず地表全体が $T = Ae^{i\nu t}$ と温度変化したとする。これは (3.14) で $a \gg x$ とする事により求まる。この時には $(a \pm x) \sqrt{\frac{p}{k}} \gg 1$ となるから Riemann-Lebesgue の定理⁽⁴⁾により

$$H(a \pm x) \rightarrow 0, \quad K(a \pm x) \rightarrow 0$$

となるから明らかに

$$\theta = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{2CA}{3} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e^{i\nu t}$$

である。次に $a \geq x \geq -a$ の区間の地表温度だけが $-Ae^{i\nu t}$ と変化したとする。これは (3.13) の場合に相当するから

(4) Whittaker and Watson, Modern Analysis p. 172.

$$\theta = -\frac{2C}{3\pi} A \{H(a-x) - H(a+x)\} e^{i\mu t},$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{2C}{3\pi} A \{K(a-x) + K(a+x)\} e^{i\mu t},$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{2C}{3\pi} A \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \begin{Bmatrix} \pi \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \{K(a-x) + K(a+x)\} \right] e^{i\mu t}$$

となる。両者を加えると (3.16) に対する解が得られるわけで、それは

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\frac{2C}{3\pi} A \{H(a-x) - H(a+x)\} e^{i\mu t}, \\ \varepsilon_1 &= -\frac{2C}{3\pi} A \{K(a-x) + K(a+x)\} e^{i\mu t}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{2C}{3\pi} A \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \{K(a-x) + K(a+x)\} \right] e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

但し $\begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix}$ は $\begin{cases} a > x (> 0) \\ a < x \end{cases}$ に対応する。

(3.15) の積分は $x\sqrt{\frac{p}{k}}$ が十分大きい場合には佐藤泰夫氏が最近発表された方法⁽⁵⁾による漸近展開で求めることが出来る。その結果

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= -\frac{i}{x^2 \left(\frac{p}{k}\right)}, \\ K(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1-i}{x\sqrt{\frac{p}{k}}} + \frac{1+i}{\left(x\sqrt{\frac{p}{k}}\right)^3} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

となる⁽⁶⁾。これを (3.17) にあてはめると $\left| (a \pm x) \sqrt{\frac{p}{k}} \right| \gg 1$ の範囲に対して

$$\left\{ \begin{aligned} \theta &= -\frac{8}{3} \cdot \frac{Ck}{p} A \frac{ax}{(a^2 - x^2)} e^{i\left(\mu t - \frac{\pi}{2}\right)} \\ \varepsilon_1 &= -\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} C \sqrt{\frac{k}{p}} A \frac{a}{a^2 - x^2} \exp i \left[\mu t - t g^{-1} \left\{ 1 - 2 \frac{k}{p} \frac{a^2 + 3x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right\} \right], \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} 0 \\ \frac{2CA}{3} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \end{cases} e^{i\mu t} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_1, & \begin{cases} a > x (> 0) \\ a > x \end{cases} \end{aligned} \right.$$

(5) Y. Satô; Mathematical Study of the Propagation of Waves upon Stratified Medium (1), Bull. Earthq. Res. Inst., 26 (1948) 1~4

(6) $H(x)$ の方は高次項の係数が全部 0 となつたから exact な結果であるが、直接的積分法はまだ得られなかつた。

又は

$$y = \frac{x}{a} \quad (3.19)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\frac{8}{3} \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{a^2} CA \frac{y}{(1-y^2)^2} e^{i\left(pt - \frac{\pi}{2}\right)} \\ \varepsilon_1 &= -\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{k}{p}} \frac{1}{a} CA \cdot \frac{1}{1-y^2} \exp i \left[pt - \text{tg}^{-1} \left\{ 1 - 2 \frac{k}{p} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1+3y^2}{(1-y^2)^2} \right\} \right] \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} 0 \\ \frac{2CA}{3} \cdot \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \end{cases} e^{i\mu t} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \varepsilon_1, \quad \begin{cases} 1 > y > 0 \\ y > 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.20)$$

となる。

$$k = 7.66 \times 10^{-3}, \quad C = 2.5 \times 10^{-5}, \quad a = 200 \text{ m} = 2 \times 10^4, \quad \lambda = \mu$$

とおき⁽⁷⁾,

$$A = 5^\circ \text{C} \quad (\text{日変化}), \quad 13^\circ \quad (\text{年変化})$$

と仮定すると、各数値は次表のようになる。

	$\frac{8}{3} \cdot \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{a^2} CA$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{k}{p}} \frac{1}{a} CA$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{k}{p}} \cdot \frac{1}{a} CA$	$\frac{2CA}{3} \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$
日変化	8.8×10^{-13}	1.9×10^{-9}	6.4×10^{-10}	1.1×10^{-4}
年変化	8.3×10^{-10}	9.6×10^{-6}	3.2×10^{-6}	2.9×10^{-4}

最後の欄は抗外だけに関係するものであるから抗内の分については ε_1 の年変化全振巾だけが 10^{-7} を越える程度で、他はすべて現在の観測精度よりはるかに小さい事が分る。

観測場所の位置に関する係数は才3図のようになる。⁽⁸⁾

(7) 岩石の熱伝導率を 4×10^{-3} 、比熱を 0.18、密度を 2.9 とおく k の値がこのようになる。 $a=200\text{m}$ は松代の地震観測所にあてはめた値である。

(8) $\sqrt{\frac{p}{k}}$ は日変化について約 1.0、年変化について約 $\frac{1}{20}$ になるから $|a \pm x|$ の値が日変化については 10cm 年変化については 2m 位まで (3.20) の結果が安全に使える勘定になる。

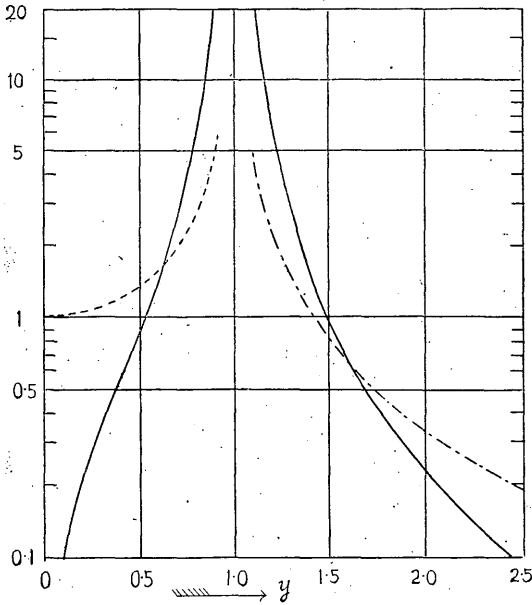


Fig. 3

Full line: $\frac{y}{(1-y^2)}$

Broken line: $\frac{1}{1-y^2}$

Chaiu line: $\frac{1}{y^2-1}$

§ 4. 結 論

半円筒形の山にうがつた抗道外部の地表温度の日変化や年変化による、内部の地温の変化は伝導による分は全く考えられない。外部の熱的歪は若干内部まで及んで来るが長さ 200 米位の抗道内では水平伸縮の年変化に 10^{-7} 位の影響があるだけで他は観測の妨げとなる程度に至らない。観測からはむしろ外気の侵入による内部の地温自体の微小な変化が鉛直方向の伸縮に及ぼす影響が重要で、この項は (3.14) により $\varepsilon_2 = \frac{2CA}{3} \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e^{i\omega t}$ となる。この値は $\lambda = \mu$ として温度が 0.1 °C 変つても $2.2 \times 10^{-5} e^{i\omega t}$ となる。

以上の計算には歪に与える山脈の影響は考えなかつた。又三次元的問題は扱わなかつたが大體の目安を見るには差つかえあるまい。(1950, VI, 22)