地表面における S 波の反射の一例

本　間　正　作*

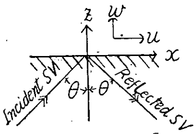
§1. 題　　意

地震波の地表面における反射については古くから多くの人により論ぜられ，松沢先生[1]の数値的計算もあるから，ほとんど総て解決しているように思われるが，ここでは SV 波が大きい入射角で入射した時の全反射の現象について補足をいたしたい。この場合の反射 P 波は表面振動の形となり，SV 波だけが反射され，その振巾は入射波のものに等しいが位相に差が生ずることが分つている。所でこれらの計算は大てい無限に続く正弦波が入射した時であるから，実際のように衝撃的の SV 波が入射した時はどういうことになるか調べてみる。

§2. 基本の式

すでに分つていることであるが説明の都合上全反射の場合の式を導いておく。

地表上に x 軸をとり，z 軸を鉛直上方にとり $z<0$ を地中とする。SV 波の波線は xz 面内にあり入射角（鉛直線と波線の角）を θ とする。波は変位ポテンシアルから導れ，S 成分の ψ, p 成分のを ϕ とすると変位の x, z 成分 u, w は



オ 1 図

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad w=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\tag{1}$$

となる。そして

$$\left.\begin{aligned}
\psi_0&=\frac{1}{p}e^{ip(t-\alpha x-\beta z-\varepsilon)}, && (\text{入射 } SV)\\
\psi_1&=\frac{A}{p}e^{ip(t-\alpha x+\beta z-\varepsilon)}, && (\text{反射 } SV)\\
\phi&=\frac{B}{p}e^{ip(t-\alpha x-\varepsilon)+pkz} && (P\text{ 成分})
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

とおける。たゞし A, B, p, ε は常数で，P 波，S 波の速度を V, $\mathfrak{V}$ とする時

$$\alpha=\frac{\sin\theta}{V},\qquad \beta=\frac{\cos\theta}{\mathfrak{V}},\qquad k=\frac{1}{\mathfrak{V}}\sqrt{\sin^2\theta-\left(\frac{\mathfrak{V}}{V}\right)^2}\tag{3}$$

で $p>0$ なら k の根号は正とする[2]。そして

$$\sin\theta>\mathfrak{V}/V\tag{4}$$

---

* 松代地震観測所

(1) 松澤武雄「平面波の表面反射の一例」地震 4 巻 3 號（昭和 7 年）125—139.

(2) 以下いつでも $p>0$ とする。$p<0$ の時は以下の計算が少し變る。

の場合を考える。$z=0$ で $Z_z=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ 及び $X_z=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$ が 0 である条件から A, B が決り，

$$A=\frac{-(\alpha^2-\beta^2)^2-4i\alpha^2\beta k}{(\alpha^2-\beta^2)^2-4i\alpha^2\beta k},\qquad B=-\frac{4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)^2-4i\alpha^2\beta k} \tag{5}$$

これらを (2) に代入し，それから (1) により u, w を求め，全部虚数部分をとると

$$\left.\begin{matrix}u_0\\w_0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}-\beta\\\alpha\end{matrix}\right\}\cos p(t-\alpha x-\beta z-\varepsilon), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}u^1\\w_1\end{matrix}\right\}&=\left.\begin{matrix}\beta\\\alpha\end{matrix}\right\}\cos\{p(t-\alpha x+\beta z-\varepsilon)\sigma\},\\&=\left.\begin{matrix}-\beta\\-\alpha\end{matrix}\right\}\left\{\frac{(\alpha^2-\beta^2)^4-16\alpha^4\beta^2k^2}{\varDelta}\cos p(t-\alpha x+\beta z-\varepsilon)\right.\\&\qquad\left.-\frac{8\alpha^2\beta k(\alpha^2-\beta^2)^2}{\varDelta}\sin p(t-\alpha x+\beta z-\varepsilon)\right\},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}u_2&=\frac{4\alpha^2\beta(\alpha^2-\beta^2)}{\sqrt{\varDelta}}e^{pkz}\cos\{p(t-\alpha x-\varepsilon)+\sigma'\},\\&=\left\{\frac{4\alpha^2\beta(\alpha^2-\beta^2)^3}{\varDelta}\cos p(t-\alpha x-\varepsilon)\right.\\&\qquad\left.-\frac{16\alpha^4\beta^2k(\alpha^2-\beta^2)}{\varDelta}\sin p(t-\alpha x-\varepsilon)\right\}e^{pkz},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}w_2&=-\frac{4\alpha\beta k(\alpha^2-\beta^2)}{\sqrt{\varDelta}}e^{pkz}\sin\{p(t-\alpha x-\varepsilon)+\sigma'),\\&=-\left\{\frac{16\alpha^3\beta^2k^2(\alpha^2-\beta^2)}{\varDelta}\cos p(t-\alpha x-\varepsilon)\right.\\&\qquad\left.+\frac{4\alpha\beta k(\alpha^2-\beta^2)^3}{\varDelta}\sin p(t-\alpha x-\varepsilon)\right\}e^{pkz}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}U&=\frac{2\beta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)^3}{\varDelta}\cos p(t-\alpha x-\varepsilon)\\&\qquad-\frac{8\alpha^2\beta^2k(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\varDelta}\sin p(t-\alpha x-\varepsilon),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}W&=\frac{16\,\alpha^3\beta^2k^2(\alpha^2+\beta^2)}{\varDelta}\cos p(t-\alpha x-\varepsilon)\\&\qquad+\frac{4\alpha\beta k(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta^2)^2}{\varDelta}\sin p(t-\alpha x-\varepsilon),\end{aligned} \tag{11}$$

ここで

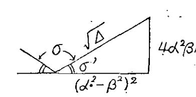
$$\varDelta=(\alpha^2-\beta^2)^4+16\alpha^4\beta^2k^2$$

σ, σ' は才2図に示す正の角でその値は才1表に示してある。U, W は地表の一点の運動の成分で

第1表　SV 波の全反射の時の反射 SV 波及び P 成分の位相のおくれ並びに反射 SV 波中入射波と同型の部分の振巾 ($\cos\sigma$)

θ	σ	σ'	$\cos\sigma$	θ	σ	σ'	$\cos\sigma$
35° 16′	173° 05′	3° 28′	−0.991 7	55 00	14 54	82 33	0.967 0
30	114 18	32 51	−0.411 7	60 00	28 58	75 31	0.875 0
46	89 38	45 11	0.006 173	65 00	46 08	66 56	0.692 9
36 00	75 32	52 14	0.250 0	68 00	57 56	61 02	0.530 7
30	55 24	62 18	0.567 8	70 00	66 28	56 46	0.399 3
37 00	42 16	68 52	0.739 9	72 00	75 32	52 14	0.250 0
30	32 54	73 33	0.839 8	74 00	85 08	47 26	0.084 81
38 00	25 48	77 06	0.900 2	76 00	95 18	42 21	−0.092 59
30	20 19	79 50	0.937 8	80 00	117 20	31 20	−0.459 4
39 00	15 58	82 01	0.961 4	85 00	147 28	16 16	−0.843 1
40 00	9 38	85 11	0.985 9	90 00	180 00	0 00	1.000 0
43 00	1 08	89 26	0.999 8				
45 00	0 00	90 00	1.000 0				
47 00	0 51	89 34	0.999 9				
50 00	4 33	87 44	0.996 9				

ある。(7), (8), (9) の右辺の第一の形は位相差で示した解である。



第 2 図

衝撃性の入射波の時には，これらの各式の右辺に $\frac{1}{\pi}f(\varepsilon)$ を乗じた上で p と ε で Fourier の積分を行えばよいから

$$\left.\begin{matrix} u_0 \\ w_0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -\beta \\ \alpha \end{matrix}\right\} f(t-\alpha x-\beta z),$$

$$\left.\begin{matrix} u_1 \\ w_1 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -\beta \\ -\alpha \end{matrix}\right\} \left\{ \frac{(\alpha^2-\beta^2)^4-16\alpha^4\beta^2k^2}{\varDelta} f(t-\alpha x+\beta z) \right.$$

$$\left. -\frac{8\alpha^2\beta k(\alpha^2-\beta^2)^2}{\pi\varDelta}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon)\sin p(t-\alpha x+\beta z-\varepsilon)\,d\varepsilon \right\}, \tag{13}$$

$$u_2 = \frac{4\alpha^2\beta(\alpha^2-\beta^2)^3}{\pi\varDelta}\int_0^\infty e^{pkz}dp\int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon)\cos p(t-\alpha x-\varepsilon)d\varepsilon$$

$$-\frac{16\alpha^4\beta^2k(\alpha^2-\beta^2)}{\pi\varDelta}\int_0^\infty e^{pkz}dp\int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon)\sin p(t-\alpha x-\varepsilon)d\varepsilon, \tag{14}$$

$$w_2 = \frac{-16\alpha^3\beta^2k^2(\alpha^2-\beta^2)}{\pi\varDelta}\int_0^\infty e^{pkz}dp\int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon)\cos p(t-\alpha x-\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$-\frac{4\alpha\beta k(\alpha^2-\beta^2)^3}{\pi\varDelta}\int_0^\infty e^{pkz}dp\int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon)\sin p(t-\alpha x-\varepsilon)d\varepsilon, \tag{15}$$

$$U = \frac{2\beta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)^3}{\varDelta}f(t-\alpha x)$$

$$-\frac{8\alpha^2\beta^2k(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\pi\varDelta}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^\infty f(\varepsilon)\sin p(t-\alpha x-\varepsilon)d\varepsilon, \tag{16}$$

$$W = \frac{16\alpha^3\beta^2k^2(\alpha^2+\beta^2)}{\varDelta}f(t-\alpha x)$$

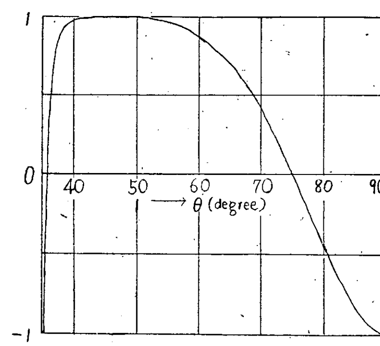
$$+\frac{4\alpha\beta k(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)^2}{\pi\Delta}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^{\infty}f(\varepsilon)\sin p(t-\alpha x-\varepsilon)d\varepsilon. \tag{17}$$

§3. 説　明

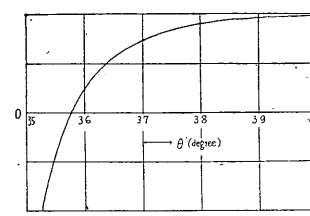
無限に連続した SV 波が入射した時の反射 SV 波は単に位相が σ ずれるだけであるが，この σ が波長に関係なく入射角だけの函数であることによつて，一般波形の SV 波が入射した時の現象では全く違つた結果が生れる。

反射 SV 波はその一部分だけが入射波と同じ波形を持つ。その部分の振巾は入射波の振巾の $\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)^4-16\alpha^4\beta^2k^2}{\Delta}\times\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\cos\sigma$ 倍になる。この値は才1表及び才3図と才4図に示してある。この値が正なら波の進行方向に対して振動の向きが入射波と反射波で反対になつているわけである。

地表の運動についても入射波をある一点で見た時の振動と同じ時間的経過を持つ部分と，しからざる部分とがある。後者の振動の時間的経過は，入射波と異型の反射 SV 波をある一地点で見ている時の時間的経過と同じになる。



才　3　図



才　4　図

入射波と異型の反射 SV 波及び地表振動とそれから P 成分（これは深さと共に減衰する）は一般に入射波が到着する以前から発生している。

これらの事は一例を以て示せば最も分りやすい。m を正の値として，入射波を

$$f(t-\alpha x-\beta z)=\begin{cases}1, & 1\geqq m(t-\alpha x-\beta z)\geqq -1,\\ 0, & |m(t-\alpha x-\beta z)|>1,\end{cases} \tag{18}$$

で与える。そうすると簡単な計算により

$$\int_0^\infty e^{-ps}dp\int_{-\infty}^{\infty}f(\varepsilon)\cos p(\tau-\varepsilon)d\varepsilon=\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\tau+1}{ms}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\tau-1}{ms} \tag{19}$$

$$\int_0^\infty e^{-ps}dp\int_{-\infty}^{\infty}f(\varepsilon)\sin p(\tau-\varepsilon)d\varepsilon=\log\sqrt{\frac{(ms)^2+(m\tau+1)^2}{(ms)^2+(m\tau-1)^2}} \tag{20}$$

となることが分る。たゞし tg^{-1} は $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間の値をとる。$s=0$ 又は $-kz$, $\tau=t-\alpha x+\beta z$ 又は $t-\alpha x$ にすると (13)〜(17) の右辺の各積分が求まる。

特に $z=0$ したがつて $s=0$ の時には

$$\mathrm{gt}^{-1}\frac{m\tau+1}{ms}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\tau-1}{ms}=\begin{cases}0 & m\tau>1\\ \pi & 1>m\tau>-1\\ 0 & -1>m\tau\end{cases}$$

であるから P 成分の前半部も入射波と同じ振動形式になる。しかし τ の値にかゝわらずこの値が 0 になる区間は $s\neq 0$ の時には存在しない。

この成分がどのように地中に拡がつているかは次のようにして分る。

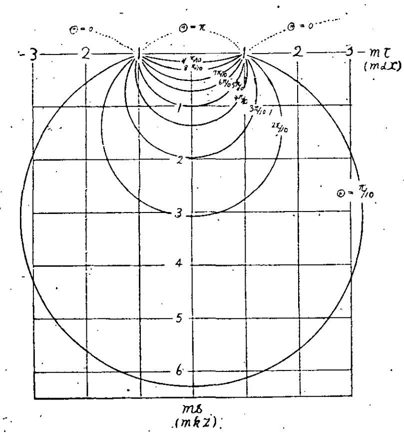
$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\tau+1}{ms}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{m\tau-1}{ms}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2ms}{(ms)^2+(mt)^2-1}=\Theta$$

とおくと

$$(ms-\mathrm{ctg}\,\Theta)^2+(m\tau)^2=1+\mathrm{ctg}^2\,\Theta$$

Θ の色々の値に対して ms と $m\tau$ は才5図のような円周上の点として与えられる。たとえば $t=0$ における地中の等振巾面は mkz と $-m\alpha x$ がこの円群上の点にあるわけである。それゆえ振巾の小さい運動なら $t=0$ の時すでに遠方まで及んでいる事になる。t が変るとこの等振巾面は速度 $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\mathfrak{V}}{\sin\theta}$ で右の方に動いてゆく。

$s=0$ の時でも $\log\sqrt{\dfrac{(ms)^2+(m\tau+1)^2}{(ms)^2+(m\tau-1)^2}}$ の方は τ に関せず 0 になる区間はない。(19) も (20) も $ms\to\infty$ または $|m\tau\pm 1|\to\infty$ では非常に小さい値になり，主要な値は ms が小さく $m\tau\pm 1$ が余り大きくない所にある。すなわち深い所では振巾が小さく，入射波と同形の反射 SV 波の進行している部分から遠くはなれると異形の反射 SV 波は弱くなるが存在する。地表の運動も丁度入射波が入射した時最も優越するがその前後においても微小な運動が存在する。



才 5 図

もちろん実際の場合波面が無限に広い平面波の形で SV 波が入射するわけではないから上の計算がそのまゝあてはまるものではないけれども，波線の屈折により，やゝこれに近い状態が起りうると考えられる。そして最も重要な点は全反射された SV 波又は地表運動と入射 SV 波の波形の間の関係が波形そのものにより左右されるために大変複雑であることと，反射波及び地表運動があたかも分散をうけたように主要部の前後に波動又は振動をともなうことである。

そしてこの種のことは地表における反射の場合許りでなく相異る媒質間の屈折の際にも起るはずであるが，その方は中々複雑になるに違いないからこのたびは省略した。終りに計算の一部を手伝つていたゞいた関彰氏にお礼いたします。

(1949. V. 28)