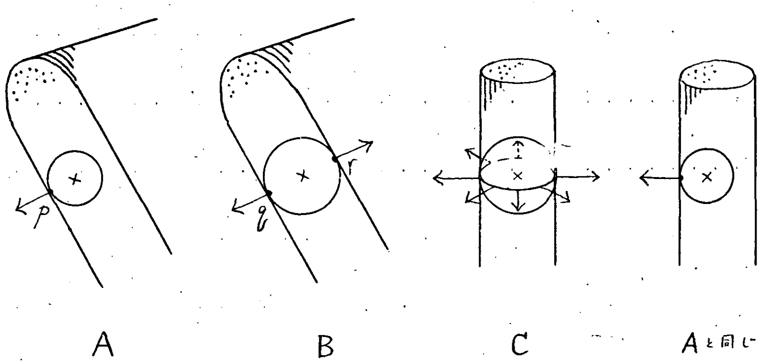
震　源（第三報）

（内部球窩に靜壓力の作用する場合）

高　木　聖*

§1. 序

私は先に震源才一報（驗震時報才 13 巻，昭 18）に於て，地震の起り方に就いて，定性的なことを述べたに過ぎなかつた。それは地殼内に岩漿溜が存在し，時にこの中の岩漿が爆發して地震を發生すると言うのであつた。この岩漿溜の存在を認めたと言うのも，現在までに觀測せられてをるP波初動の地理的分布を説明するためであつた。それではそのようなP波初動の地理的分布がどのようにして生ずるかと言えば，才1図に示すように岩漿溜の側壁の形を大まかに A，B，C 三種類に



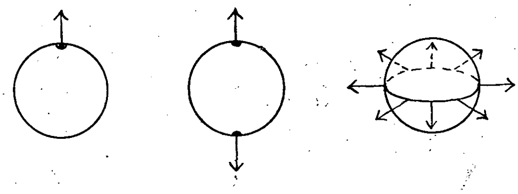
才　1　図

分類し，その中の岩漿が 0 點にて爆發すると，それより伝播する圧力球面波は最初 A ならば p 点のみに力を及ぼし，B ならば q，r 二点のみに力を及ぼし，C ならば円輪のみに力を及ぼす事になるから，力の作用しない部分は引込んで，A，B ならば押円錐型初動分布（円錘形の内部が全部押し波となり，他の部分は引き波となる）を生じ，C ならば引円錘型初動分布（円錘形の内部が全部引き波となり，他の部分は押し波となる）を生ずると説明した。しかしこれはどこまでも定性的な言い方であつて，果してその様な力の分布の時に円錘型の初動分布になるかどうかは分らない所であつた。そこで震源才二報（驗震時報才 14 巻，昭 25，これは後に補足する予定）に於ては，果してそのようになるかどうか数学的実驗を試みたのであつた。それは才1図のような力の分布を球面上に置きかえて，近似的に才2図のような分布であると考え，しかもこの分布の力が振動してをる場合を解いたのである。これによつて押し波と引き波との区分の幾分の目安はついた。

所がこゝにまだ問題が残つてをる。それは振動力の時にはその様になつても，地震のように急に

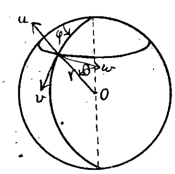
* 中央気象台研修所

力が作用するような場合には波動の伝播を考えなければならないから，初動に於てはそのようにならないであろうと言う事である。そこでこれも数学的実験にて確めるべく，力の時間的作用の仕方を Aperiodic なものと仮定して計算を試みた。その結果は次回に発表する積りであるが，留数の計算となり，どこまで計算してよいか理論的には明かでないのである。そこでやはり初動分布の目安として，もし力が静的に加わつてをると仮定して，内部球窩がやはり円錘型になるかどうかを調べてみる事にした。もし静圧力による場合も円錘型となるとすれば，初動分布が円錘型となつても大して不思議はないと思われるからである。



A　　　B　　　C

才　2　図



才 3 図

§2. 平衡方程式の解

地殻を弾性体と考えると，その平衡方程式は，才3図のような球座標を用いれば，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r}-\mu\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\bar{\omega}_{\varphi}\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\bar{\omega}_{\theta}}{\partial\varphi}\right\}=0 && (1)\\
&(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}-\mu\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\bar{\omega}_{\gamma}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{\omega}_{\varphi})}{\partial r}\right\}=0 && (2)\\
&(\lambda+2\mu)\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}-\mu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{\omega}_{\theta})}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\omega}_{r}}{\partial\theta}\right\}=0 && (3)
\end{aligned}
\right.
$$

である。こゝに λ, μ は弾性常数であり，u, v, w を r, θ, φ 方向の分変位とすれば，

$$\Delta=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(ur^2\sin\theta)}{\partial r}+\frac{\partial(vr\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(wr)}{\partial\varphi}\right] \qquad (4)$$

$$\bar{\omega}=\frac{1}{e^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(wr\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(vr)}{\partial\varphi}\right] \qquad (5)$$

$$\bar{\omega}_{\theta}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\partial(wr\sin\theta)}{\partial r}\right] \qquad (6)$$

$$\bar{\omega}_{\varphi}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(vr)}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \qquad (7)$$

なる関係を有するものである。

$\frac{\partial}{\partial r}\{(1)r^2\sin\theta\}+\frac{\partial}{\partial\theta}\{(2)r\sin\theta\}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\{(3)r\}$ なる演算により，

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Delta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\Delta}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (8)$$

なる $\varDelta$ のみの式を得る。これより $\varDelta$ を求める。今 $\varDelta$ を変数分離型の解があるものと考え，

$$\varDelta=R_{\Delta}(r)\Theta_{\Delta}(\theta)\Phi_{\Delta}(\varphi)$$

とおく。こゝに $R_{\Delta}(r)$, $\Theta_{\Delta}(\theta)$, $\Phi_{\Delta}(\varphi)$ はそれぞれ，r, θ, φ のみの函数である事を示す。かくする時は (8) より，

$$\frac{1}{R_{\Delta}}\frac{d}{dr}\left(r_2\frac{dR_{\Delta}}{dr}\right)+\frac{1}{\sin\theta\Theta_{\Delta}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\Delta}}{dr}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta\Phi_{\Delta}}\frac{d^2\Phi_{\Delta}}{d\varphi^2}=0 \qquad (9)$$

を得る。オ一項のみ r を含み，他は r を含まぬから，それぞれ常数に等しいと置ける。この時後の計算の便利のために

$$\frac{1}{R_{\Delta}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{\Delta}}{dr}\right)=m(m+1) \qquad (10)$$

$$\frac{1}{\sin\theta\Theta_{\Delta}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\Delta}}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta\Phi_{\Delta}}\frac{d^2\Phi_{\Delta}}{d\varphi^2}=-m(m+1) \qquad (11)$$

と置く，(10) より

$$R_{\Delta}=A_{\Delta}r^m+B_{\Delta}x^{-(m+1)} \qquad (12)$$

なる解を得る。こゝに A_{Δ}, B_{Δ} は常数である。(11) よりは両辺に $\sin^2\theta$ を掛ける事により，

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_{\Delta}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\Delta}}{d\theta}\right)+m(m+1)\sin^2\theta+\frac{1}{\Phi_{\Delta}}\frac{d^2\Phi_{\Delta}}{d\varphi^2}=0$$

となるので，これも同様に次のように置ける。

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_{\Delta}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\Delta}}{d\theta}\right)+m(m+1)\sin^2\theta=n^2 \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\Phi_{\Delta}}\frac{\partial^2\Phi_{\Delta}}{\partial\varphi^2}=-n^2. \qquad (14)$$

先ず (13) より Θ_{Δ} を求めるに，$x\equiv\cos\theta$ と置きかえる事によつて，

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta_{\Delta}}{dx^2}-2x\frac{d\Theta_{\Delta}}{dx}+\left\{m(m+1)-\frac{n^2}{1-x^2}\right\}\Theta_{\Delta}=0 \qquad (15)$$

となり，これは Legendre の式であるから解として，

$$\Theta_{\Delta}=C_{\Delta}P_m{}^n(x)+D_{\Delta}Q_m{}^n(x)$$

を得る。これは又 x を $\cos\theta$ と還元する事により，

$$\Theta_{\Delta}=C_{\Delta}P_m{}^n(\cos\theta)+D_{\Delta}Q_m{}^n(\cos\theta)$$

となる。こゝに C_{Δ}, D_{Δ} は常数であり，$P_m{}^n$, $Q_m{}^n$ は球函数である。しかし $|\cos\theta|\leqq1$ であるので $Q_m{}^n(\cos\theta)$ は無限大となり，物理的に考えてこの解は採用しない方がよい。よつて，

$$\Theta_{\Delta}=C_{\Delta}P_m{}^n(\cos\theta) \qquad (16)$$

のみを取る事にする。(14) よりは

$$\Phi_{\Delta}=E_{\Delta}\cos n\varphi+F_{\Delta}\sin n\varphi \qquad (17)$$

が得られる事は明らかである。よつて Δ の解として，

$$\Delta=\{A_{\Delta}r^{m}+B_{\Delta}r^{-(m+1)}\}C_{\Delta}P_{m}^{n}(\cos\theta)(E_{\Delta}\cos n\varphi+F_{\Delta}\sin n\varphi)$$

を得る。こゝに常数の重複を避け，

$$\Delta=\{A_{\Delta}r^{m}+B_{\Delta}r^{-(m+1)}\}P_{m}^{n}(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_{\Delta}\sin n\varphi)\tag{18}$$

を以つて Δ の解とする。

次に $\bar{\omega}_r$ を求める。$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\{(3)r\sin\theta\}-\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\{(2)r\}$ より

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\bar{\omega}_r r^2)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\bar{\omega}_r}{\partial\varphi^2}=0\tag{19}$$

なる $\bar{\omega}_r$ のみの式を得る。これも変数分離型の解があるものとし，

$$\bar{\omega}_r=R_{\bar{\omega}_r}(r)\Theta_{\bar{\omega}_r}(\theta)\Phi_{\bar{\omega}_r}(\varphi)$$

と置けば (19) は

$$\frac{1}{R_{\bar{\omega}_r}}\frac{d^2}{dr^2}(R_{\bar{\omega}_r}r^2)+\frac{1}{\sin\theta\,\Theta_{\bar{\omega}_r}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\bar{\omega}_r}}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta\,\Phi_{\bar{\omega}_r}}\frac{d^2\Phi_{\bar{\omega}_r}}{d\varphi^2}=0\tag{20}$$

となる。これも Δ の時と同様に，

$$\frac{1}{R_{\bar{\omega}_r}}\frac{d^2}{dr^2}(r^2R_{\bar{\omega}_r})=p(p+1)\tag{21}$$

$$\frac{1}{\sin\theta\,\Theta_{\bar{\omega}_r}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\bar{\omega}_r}}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta\Phi_{\bar{\omega}_r}}\frac{d^2\Phi_{\Delta}}{d\varphi^2}=-p(p+1)\tag{22}$$

とおき，(21) より

$$R_{\bar{\omega}_r}=A_{\bar{\omega}_r}{}^{p}r^{-1}+B_{\bar{\omega}_r}r^{-(p+2)}\tag{23}$$

なる解を得，(22) よりは

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_{\bar{\omega}_r}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\bar{\omega}_r}}{d\theta}\right)+p(p+1)\sin^2\theta+\frac{1}{\Phi_{\bar{\omega}_r}}\frac{d^2\Phi_{\bar{\omega}_r}}{d\varphi^2}=0$$

となるから，

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_{\bar{\omega}_r}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{\bar{\omega}_r}}{d\theta}\right)+p(p+1)\sin^2\theta=q^2\tag{24}$$

$$\frac{1}{\Phi_{\bar{\omega}_r}}\frac{d^2\Phi_{\bar{\omega}_r}}{d\varphi^2}=-q^2\tag{25}$$

とおき，(24) より

$$\Theta_{\bar{\omega}_r}=C_{\bar{\omega}_r}P_{p}^{q}(\cos\theta)+D_{\bar{\omega}_r}Q_{p}^{q}(\cos\theta)\tag{26}$$

(25) より

$$\Phi_{\bar{\omega}_r}=E_{\bar{\omega}_r}\cos q\varphi+F_{\bar{\omega}_r}\sin q\varphi\tag{27}$$

を得る。しかしこれも $\bar{\omega}_r$ は物理的に考えて r 方向の 廻転量を 示すものであるから，無限大にな

る解を省略して，

$$\bar{\omega}_r=\{A_{\bar{\omega}_r}r^{p-1}+B_{\bar{\omega}_r}r^{-(p+2)}\}P_p{}^q(\cos\theta)(\cos q\varphi+C_{\bar{\omega}_r}\sin q\varphi) \tag{28}$$

を得る。こゝに $A_{\bar{\omega}_r}$, $B_{\bar{\omega}_r}$, $C_{\bar{\omega}_r}$ は常数である。

かくして $\varDelta$ と $\bar{\omega}_r$ とが求まつたから，(3) より

$$\frac{\partial(\bar{\omega}_\theta r)}{\partial r}=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varDelta}{\partial\varphi}+\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial\theta}$$

$$=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\{A_\Delta r^m+B_\Delta r^{-(m+1)}\}\frac{P_m{}^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_\Delta n\cos n\varphi)$$

$$+\{A_{\bar{\omega}_r}r^{p-1}+B_{\bar{\omega}_r}r^{-(p+2)}\}\frac{dP_p{}^q(\cos\theta)}{d\theta}(\cos q\varphi+C_{\bar{\omega}_r}\sin q\varphi)$$

となる。この右辺は変数分離型になつておるから，$\bar{\omega}_\theta$ も変数分離型の解であるに相違ない。よつて積分し，

$$\bar{\omega}_\theta=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\left\{\frac{A_\Delta}{m+1}r^m-\frac{B_\Delta}{m}r^{-(m+1)}\right\}\frac{P_m{}^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_\Delta n\cos n\varphi)$$

$$+\left\{\frac{A_{\bar{\omega}_r}}{p}r^{p-1}-\frac{B_{\bar{\omega}_r}}{p+1}r^{-(p+2)}\right\}\frac{dP_p{}^q(\cos\theta)}{d\theta}(\cos q\varphi+C_{\bar{\omega}_r}\sin q\varphi) \tag{29}$$

となる。こゝに m, p は零でないとする。

(2) より同様にして，

$$\bar{\omega}_\varphi=-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\left\{\frac{A_\Delta}{m+1}r^m-\frac{B_\Delta}{m}r^{-(m+1)}\right\}\frac{dP_m{}^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi)$$

$$+\left\{\frac{A_{\bar{\omega}_r}}{p}r^{p-1}-\frac{B_{\bar{\omega}_r}}{p+1}r^{-(p+2)}\right\}\frac{P_p{}^q(\cos\theta)}{\sin\theta}(-q\sin q\varphi+C_{\bar{\omega}_r}q\cos q\varphi) \tag{30}$$

を得る。

かくして $\varDelta$, $\bar{\omega}_r$, $\bar{\omega}_\theta$, $\bar{\omega}_\varphi$ が求まつたから，次に変位 u, v, w を求める。(4) より

$$\frac{\partial(r^2\sin\theta\varDelta)}{\partial r}=\frac{\partial^2(ur^2\sin\theta)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2(vr\sin\theta)}{\partial r\partial\theta}+\frac{\partial^2(wr)}{\partial r\partial\varphi} \tag{31}$$

であり，(7) より

$$\frac{\partial^2(vr\sin\theta)}{\partial r\partial\theta}=\frac{\partial(\bar{\omega}_\varphi r\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

(6) より

$$\frac{\partial^2(wr)}{\partial r\partial\varphi}=-\frac{\partial(\bar{\omega}_\theta r)}{\partial\varphi}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

であるので，これ等を (31) に代入し，

$$\frac{\partial^2(ur^2)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial(\varDelta r^2)}{\partial r}+\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\bar{\omega}_\theta r)}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\bar{\omega}_\varphi r\sin\theta)}{\partial\theta}\right\} \tag{32}$$

となる。しかるに（1）より

$$\frac{\partial(\bar{\omega}_\theta r)}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\bar{\omega}_\varphi r\sin\theta)}{\partial\theta}=-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}r^2\sin\theta\frac{\partial\Delta}{\partial r}$$

であるから，（32）は

$$\frac{\partial^2(ur^2)}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial(\Delta r^2)}{\partial r}-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}r^2\frac{\partial\Delta}{\partial r}$$

$$=\left[\left\{(m+2)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}m\right\}A_\Delta r^{m+1}-\left\{(m-1)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)\right\}B_\Delta r^{-m}\right]$$

$$\times P_m{}^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi) \tag{33}$$

となる。この一般解は右辺零の場合の一般解に右辺のある場合の特解を加えておけばよい。右辺零の場合の一般解は

$$u=\{A_u r^{\alpha-1}+B_u r^{-(\alpha+2)}\}P_\alpha{}^\beta(\cos\theta)(\cos\beta\varphi+C_u\sin\beta\varphi) \tag{34}$$

であり，（33）の特解は

$$u=\left\{\frac{(m+2)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}A_\Delta r^{m+2}+\frac{(m-1)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}B_\Delta r^{-m}\right\}$$

$$\times P_m{}^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi) \tag{35}$$

でよい。結局 u の一般解は

$$u=\{A_u r^{\alpha-1}+B_u r^{-(\alpha+2)}\}P_\alpha{}^\beta(\cos\theta)\cos\beta\varphi+C_u\sin\beta\varphi)$$

$$+\left\{\frac{(m+2)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}A_\Delta r^{m+1}+\frac{(m-1)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}B_\Delta r^{-m}\right\}$$

$$\times P_m{}^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi) \tag{36}$$

となる。

かくして u が求まつたから（7）より v を求めると，

$$\frac{\partial(ur)}{\partial r}=r\bar{\omega}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$=\{A_u r^{\alpha-1}+B_u r^{-(\alpha+2)}\}\frac{dP_\alpha{}^\beta(\cos\theta)}{d\theta}(\cos\beta\varphi+C_u\sin\beta\varphi)$$

$$+\left[\left\{\frac{(m+2)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right\}A_\Delta r^{m+1}+\left\{\frac{(m-1)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right\}B_\Delta r^{-m}\right]\frac{dP_m{}^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi)$$

$$+\left\{\frac{A_{\bar{\omega}_r}}{p}r^p-\frac{B_{\bar{\omega}_r}}{p+1}r^{-(p+1)}\right\}\frac{P_p{}^q(\cos\theta)}{\sin\theta}(-q\sin q\varphi+C\bar{\omega}_r q\cos q\varphi)$$

である。これは変数分離型になつてをるから積分してよい。

即ち，

$$v=\left\{\frac{A_u}{\alpha}r^{\alpha-1}-\frac{B_u}{\alpha+1}r^{-(\alpha+2)}\right\}\frac{dP_\alpha{}^\beta(\cos\theta)}{d\theta}(\cos\beta\varphi+C_u\sin\beta\varphi)$$

$$+\left[\left\{\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right\}\frac{A_\Delta}{m+2}r^{m+1}-\left\{\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right\}\frac{B_\Delta}{m-1}r^{-m}\right]\frac{dP_m{}^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi)+\frac{A_{\varpi_r}}{p(p+1)}r^p$$

$$+\frac{B_{\varpi_r}}{p(p+1)}r^{-(p+1)}\Big\}\frac{P_p{}^q(\cos\theta)}{\sin\theta}(-q\sin q\varphi+C_{\varpi_r}q\cos q\varphi) \qquad (37)$$

となる。こゝに $m\neq1$ とする。

$m=1$ の時

$$\frac{\partial(vr)}{\partial r}=\left\{(A_u+B_ur^{-3})\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+[\ 〃\ A_\Delta r^2+D]\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}\right.$$

となり，積分して

$$vr=\left(A_ur-\frac{B_u}{2}r^{-2}\right)\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+\left[\ 〃\ A_\Delta+D_\Delta\right]\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$\therefore\quad v=\left(A_u-\frac{B_u}{2}r^{-3}\right)\frac{dP_1(\cos\theta)}{dv}+\left[\ 〃\ A_\Delta\frac{r^2}{3}+D_\Delta r^{-1}\right]\frac{dP_1(\cos\theta)}{dv} \qquad (37')$$

D_Δ は (1), (2), (3), (4)‥‥ を満足するために $D_\Delta=-\dfrac{\lambda+3\mu}{2\mu}B_\Delta$ なるを要す。

(6) より同様にして w が求まる。それは

$$w=\left\{\frac{A_u}{\alpha}r^{\alpha-1}-\frac{B_u}{\alpha+1}r^{-(\alpha+2)}\right\}\frac{P_\alpha{}^\beta(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\beta\sin\beta\varphi+C_u\beta\cos\beta\varphi)$$

$$+\left[\left\{\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right\}\frac{A_\Delta}{m+2}r^{m+1}-\left\{\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right\}\frac{B_\Delta}{m-1}r^{-m}\right]\frac{P_m{}^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_\Delta n\cos n\varphi)$$

$$-\left\{\frac{A_{\varpi_r}}{p(p+1)}r^p+\frac{B_{\varpi_r}}{p(p+1)}r^{-(p+1)}\right\}\frac{dP_p{}^q(\cos\theta)}{d\theta}(\cos q\varphi+C_{\varpi_r}\sin q\varphi) \qquad (38)$$

である。これ等の解は原式 (1)～(7) を満足する。

かくして変位の解が求まつたのであるが，重合の原理に従つて更に一般化する時は，

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{A_u r^{m-1}+B_u r^{-(m+2)}\}P_m^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_u\sin n\varphi)$$

$$+\left\{\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}A_\Delta r^{m+1}+\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}B_\Delta r^{-m}\right\}$$

$$\times P_m^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi) \tag{39}$$

$$v=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{A_u}{m}r^{m-1}-\frac{B_u}{m+1}r^{-(m+2)}\right\}\frac{dP_m^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_u\sin n\varphi)$$

$$+\left[\left\{\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right\}\frac{A_\Delta}{m+1}r^{m+1}-\left\{\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right\}\frac{B_\Delta}{m-1}r^{-m}\right]\frac{dP_m^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi)+\left\{\frac{A_{\bar\omega_r}}{m(m+1)}r^m\right.$$

$$\left.+\frac{B_{\bar\omega_r}}{m(m+1)}r^{-(m+1)}\right\}\frac{P_m^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_{\bar\omega_r}n\cos n\varphi) \tag{40}$$

$$w=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{A_u}{m}r^{m-1}-\frac{B_u}{m+1}r^{(m+2)}\right\}\frac{P_m^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_u n\cos n\varphi)$$

$$+\left[\left\{\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right\}\frac{A_\Delta}{m+2}r^{m+1}-\left\{\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right\}\frac{B_\Delta}{m-1}r^{-m}\right]\frac{P_m^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_\Delta n\,\mathrm{con}\,n\varphi)-\left\{\frac{A_{\bar\omega_r}}{m(m+1)}r^m\right.$$

$$\left.+\frac{B_{\bar\omega_r}}{m(m+1)}r^{-(m+1)}\right\}\frac{dP_m^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_{\bar\omega_r}\sin n\varphi) \tag{41}$$

となる。これ等の解式は $m\geqq 2$ なる場合のみに適用出来るのであるから，それ以外の時は別に考える必要がある。

§3. 数学的実験

平衡方程式の解が求まつたから，いよいよ数学的実験に取りかゝる事にする。才2図のような球面上の力の分布を数学的に表現するには，球函数の級数に展開するのが便利であるから $F(\theta,\ \varphi)$ を球面上の力の分布を示す函数とするならば，

$$F(\theta,\ \varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\{A_{0,m}P_m(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{m}(A_{n,m}\cos n\varphi+B_{n,m}\sin n\varphi)P_m^n(\cos\theta)\} \tag{42}$$

として表現出来る。こゝに常数は

$$\Bigg(\quad A_{0,m}=\frac{2m+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}F(\mu,\ \varphi)P_m(\mu)d\mu \tag{43}$$

$$\begin{cases} A_{n,m}=\dfrac{2m+1}{2\pi}\dfrac{(m-n)!}{(m+n)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}F(\mu,\ \varphi)\cos n\varphi P_m{}^n(\mu)d\mu & (44) \\ B_{n,m}=\dfrac{2m+1}{2\pi}\dfrac{(m-n)!}{(m+n)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}F(\mu,\ \varphi)\sin n\varphi P_m{}^n(\mu)d\mu & (45) \end{cases}$$

である。$F(\mu,\ \varphi)$ は才2図 A の場合は

才2図 B の場合は

A の場合　$$F_A(\mu,\ \varphi)=\begin{cases} f^{(A)} & 1\geqq\mu\geqq1-\varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon>\mu\geqq-1 \end{cases} \qquad (46')$$

B の場合　$$F_B(\mu,\ \varphi)=\begin{cases} f^{(B)} & 1\geqq\mu\geqq1-\varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon>\mu>-(1-\varepsilon) \\ f^{(B)} & -(1-\varepsilon)\geqq\mu\geqq1 \end{cases} \qquad (46)$$

でよく，才2図 C の場合は

C の場合　$$F_C(\mu,\ \varphi)=\begin{cases} 0 & 1\geqq\mu>\varepsilon \\ f^{(C)} & \varepsilon\geqq\mu\geqq-\varepsilon \\ 0 & -\varepsilon>\mu\geqq-1 \end{cases} \qquad (47)$$

でよい。こゝに $f^{(A)}$, $f^{(B)}$, $f^{(C)}$ はそれぞれ力の大きさを示す常数であり，ε は極く小さい量と考える。これによつて (43), (44), (45) を計算すると，

$$\begin{cases} A_{0,m}=\dfrac{2m+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}F(\mu)P_m(\mu)\,d\mu & (48) \\ A_{n,m}=0 & (49) \\ B_{n,m}=0 & (50) \end{cases}$$

となる。こゝに $F(\mu)$ は (46) 又は (47) を代表するものとする。更に計算を進めるならば,

$$F(\theta,\ \varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)}{2}fW_mP_m(\cos\theta) \qquad (51)$$

となる。こゝに

$$f=\begin{cases} f^{(A)} & \text{A の場合} \\ f^{(B)} & \text{B の場合} \\ f^{(C)} & \text{C の場合} \end{cases} \qquad (52)$$

$$W_m{}^{(A)}=\int_{1-\varepsilon}^{1}P_m(\mu)d\mu=\frac{\{1-(1-\varepsilon)^2\}P_m{}'(1-\varepsilon)}{m(m+1)}\doteqdot\sum_{s=1}^{\leqq m/2}(-1)^s$$

$$\times\frac{(2m-2s)!(m-2s)}{s!(m-s)!(m-2s)!}\frac{\varepsilon}{2^{m-1}m(m+1)}\doteqdot\varepsilon \quad m\text{の奇偶によらぬ　A の場合}$$

$$
W_m=\begin{cases} W_m^{(B)}=\begin{cases} 2\int_{1-\varepsilon}^{1}P_m(\mu)\,d\mu=\dfrac{\{1-(1-\varepsilon)^2\}P_m'(1-\varepsilon)}{m(m+1)}\doteqdot\sum\limits_{s=0}^{\leqq m/2}(-1)^s \\ \quad\times\dfrac{(2m-2s)!\,(m-2s)}{s!\,(m-s)!\,(m-2s)!}\,\dfrac{\varepsilon}{2^{m-1}m(m+1)}=2\varepsilon & m:\text{偶数}, \\ 0 & m:\text{奇数}, \end{cases} & \text{B の場合} \\ W_m^{(C)}=\begin{cases} 2\int_{0}^{\varepsilon}P_m(\mu)\,d\mu=\dfrac{(1-\varepsilon^2)P_m'(\varepsilon)}{m(m+1)}\doteqdot 2(-1)^{m/2} \\ \quad\times\dfrac{2!}{2^m(m/2!)^2}\varepsilon & m:\text{偶数}, \\ 0 & m:\text{奇数}, \end{cases} & \text{C の場合} \end{cases} \tag{53}
$$

である。これによつて球面上の力の分布を球函数級数に展開する事が出来た。

内部球窩の半径を a とし，その表面に於ての境界件条は，作用する力は半径方向の力と考えてよいから，

$$
\begin{cases}
\widehat{rr}_{r=a}=\lambda\Delta+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}=-F(\theta,\ \varphi) & (54) \\
\widehat{r\theta}_{r=a}=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{v}{r}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 & (55) \\
\widehat{r\varphi}_{r=a}=\mu\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial w}{\partial r}-\dfrac{w}{r}\right)=0 & (56)
\end{cases}
$$

となり，無限の遠方に於て自由表面であると考えるならば，その境界条件は

$$
\begin{cases}
\widehat{rr}_{r\to\infty}=0 & (57) \\
\widehat{r\theta}_{r\to\infty}=0 & (58) \\
\widehat{r\varphi}_{r\to\infty}=0 & (59)
\end{cases}
$$

となる。これ等を満足するように $u,\ v,\ w$ の常数を決定すればよい。

次に張合函数を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\widehat{rr}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}&2\mu\{(m-1)A_u r^{m-2}-(m+2)B_u r^{-(m+3)}\}P_m^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_u\sin n\varphi) \\
&+\left[\left\{\lambda+\mu\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2m+3}(m+1)\right\}A_\Delta r^m+\left\{\lambda-\mu\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2m-1}m\right\}\right. \\
&\left.\times B_\Delta r^{-(m+1)}\right]P_m^n(\cos\theta)(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi)
\end{aligned} \tag{60}
$$

$$
\widehat{r\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mu\left(2\left\{\frac{m-1}{m}A_u r^{m-2}+\frac{m+2}{m+1}B_u r^{-(m+3)}\right\}\frac{dP_m^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_u\sin n\varphi)\right.
$$

$$+\left[\left\{\left(\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right)\frac{m}{m+2}+\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}\right\}A_\Delta r^m\right.$$

$$+\left\{\left(\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}+\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right)\frac{m+1}{m-1}+\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right\}$$

$$\left.\times B_\Delta r^{-(m+1)}\right]\frac{dP_m{}^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_\Delta\sin n\varphi)+\left\{\frac{m-1}{m(m+1)}A_{\bar{\omega}_r}r^{m-1}\right.$$

$$\left.-\frac{m+2}{m(m+1)}B_{\bar{\omega}_r}r^{-(m+2)}\right\}\frac{P_m{}^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_{\bar{\omega}_r}n\cos n\varphi)\Bigg) \tag{61}$$

$$\widehat{r\varphi}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mu\Bigg(2\left\{\frac{m-1}{m}A_u r^{m-2}+\frac{m+2}{m+1}B_u r^{-(m+3)}\right\}\frac{P_m{}^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_u n\cos n\varphi)$$

$$+\left[\left\{\left(\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right)\frac{m}{m+2}+\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}\right\}A_\Delta r_m\right.$$

$$+\left\{\left(\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}+\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right)\frac{m+1}{m-1}+\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right\}$$

$$\left.\times B_\Delta r^{-(m+1)}\right]\frac{P_m{}^n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-n\sin n\varphi+C_\Delta n\,\mathrm{coc}\,n\varphi)+\frac{m-1}{m(m+1)}A_{\bar{\omega}_r}r^{m-1}$$

$$\left.-\frac{m+2}{m(m+1)}B_{\bar{\omega}_r}r^{-(m+2)}\right\}\frac{dP_m{}^n(\cos\theta)}{d\theta}(\cos n\varphi+C_{\bar{\omega}_r}\sin n\varphi)\Bigg) \tag{62}$$

となる。

所が境堺条件は φ に無関係であるので,

$$n=0 \tag{63}$$

としてよい。次に当分の間 $m\geqq 2$ なる場合を考える事にし,

$$\widehat{rr}_{r\to\infty}=\sum_{m=2}^{\infty}\left[2\mu(m-1)A_u r^{m-2}+\left\{\lambda+\mu\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2m+3}(m+1)\right\}A_\Delta r^m\right]P_m(\cos\theta)\to 0 \tag{64}$$

$$\widehat{r\theta}_{r\to\infty}=\sum_{m=2}^{\infty}\mu\left[2\frac{m-1}{m}A_u r^{m-2}+\left\{\left(\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}-\frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m+1}\right)\frac{m}{m+2}+\frac{(m+2)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}m}{2(2m+3)}\right\}\right.$$

$$\left.\times A_\Delta r^m\right]\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\to 0 \tag{65}$$

$$\widehat{r\varphi}_{r\to\infty}=\sum_{m=2}^{\infty}\mu\frac{m-1}{m(m+1)}A_{\bar{\omega}_r}r^{m-1}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\to 0 \tag{66}$$

とならなければならないから，(66) より

$$A_{\varpi_r} = 0 \tag{67}$$

(65), (64) より

$$A_\Delta = 0 \tag{68}$$

$$A_u = 0 \tag{69}$$

となる。次に $r=a$ に於ては

$$\widehat{rr}_{r=a} = \sum_{m=2}^{\infty}\left[-2\mu(m+2)B_u r^{-(m+3)} + \left\{\lambda - \mu\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2m-1}m\right\}B_\Delta r^{-(m+1)}\right]P_m(\cos\theta)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(2m+1)}{2}fW_m P_m(\cos\theta) \tag{70}$$

$$\widehat{r\theta}_{r=a} = \sum_{m=2}^{\infty}\mu\left[\frac{m+2}{m+1}B_u r^{-(m+3)} + \left\{\left(\frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)} + \frac{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}{m}\right)\frac{m+1}{m-1}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(m-1)-\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}(m+1)}{2(2m-1)}\right\}B_\Delta r^{-(m+1)}\right]\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} = 0 \tag{71}$$

$$\widehat{r\varphi}_{r=a} = \sum_{m=2}^{\infty} -\mu\frac{m+2}{m(m+1)}B_{\varpi_r} r^{-(m+2)}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} = 0 \tag{72}$$

となるので, (72) より

$$B_{\varpi_r} = 0 \tag{73}$$

(71) より

$$B_u = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda(m^2-1)+\mu(m^2-2)}{m(2m-1)}\frac{m+1}{2(m+2)}a^2 B_\Delta \tag{74}$$

であるから, (70) は

$$\widehat{rr}_{r=a} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}{2(2m-1)}a^{-(m+1)}B_\Delta P_m(\cos\theta)$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} -(2m+1)fW_m P_m(\cos\theta)$$

となる。よつて

$$B_\Delta = -\frac{m(2m-1)(2m+1)}{2\{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)\}}a^{m+1}fW_m \tag{75}$$

從つて (74) より

$$B_u = -\frac{1}{\mu}\frac{\lambda(m^2-1)+\mu(m^2-2)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\cdot\frac{(2m+1)(m+1)}{4(m+2)}a^{m+3}fW_m \tag{76}$$

が得られる。

故に求むる変位は $m \geqq 2$ の場合,

$$\begin{cases} u=\sum_{m=2}^{\infty}-\dfrac{af}{2\mu}\left\{\dfrac{\lambda(m^2-1)+\mu(m^2-2)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\dfrac{m+1}{m+2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{m+2}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\lambda(m+1)+\mu(m+3)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}m\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right\}\dfrac{(2m+1)}{2}W_mP_m(\cos\theta) & (77) \\ v=\sum_{m=2}^{\infty}\dfrac{af}{2\mu}\left\{\dfrac{\lambda(m^2-1)+\mu(m^2-2)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\dfrac{1}{m+2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{m+2}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\lambda(m-2)+\mu(m-4)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right\}\dfrac{(2m+1)}{2}W_m\dfrac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} & (78) \\ w=0 & (79) \end{cases}$$

となる。

$m=1$ なる時は計算の結果，(80)～(82) の式の $m=1$ とした場合と結果的には同じになる。

$m=0$ なる場合は

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \\ v=0 \\ w=0 \end{cases}$$

となるから，結局 $m=0$, $m=1$ に於ても $m\geqq 2$ の場合の形式がそのまゝあてはまる事が分つた。故に

$$\begin{cases} u=\sum_{m=0}^{\infty}-\dfrac{af}{2\mu}\left\{\dfrac{\lambda(m^2-1)+\mu(m^2-2)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\dfrac{m+1}{m+2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{m+2}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\lambda(m+1)+\mu(m+3)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}m\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right\}\dfrac{(2m+1)}{2}W_mP_m(\cos\theta) & (80) \\ v=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{af}{2\mu}\left\{\dfrac{\lambda(m^2-1)+\mu(m^2-2)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\dfrac{1}{m+2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{m+2}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\lambda(m-2)+\mu(m-4)}{\lambda(2m^2+1)+2\mu(m^2+m+1)}\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right\}\dfrac{(2m+1)}{2}W_m\dfrac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} & (81) \\ w=0 & (82) \end{cases}$$

としてよい。

§4. 吟　　味

地殻を等方性と考えるならば $\lambda=\mu$ としてよいから，

$$\begin{cases} u=\sum_{m=0}^{\infty}-\dfrac{af}{2\mu}\left\{\dfrac{(2m^2-3)(m+3)}{(4m^2+2m+3)(m+2)}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{m+2}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{2m(m+2)}{4m^2+2m+3}\left(\dfrac{a}{r}\right)^m\right\}\dfrac{(2m+1)}{2}W_mP_m(\cos\theta) & (83) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned} v&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{af}{2\mu}\left\{\frac{2m^2-3}{(4m^2+2m+3)(m+2)}\left(\frac{a}{r}\right)^{m+2}\right. \\ &\qquad\left.-\frac{2(m-3)}{4m^2+2m+3}\left(\frac{a}{r}\right)^{m}\right\}\frac{(m+1)}{2}W_m\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} &&(84)\\ w&=0 &&(85)\end{aligned}\right.$$

となる。内間球窩の所ではどうなるか調べてみる。$r=a$ であるから，

$$\left\{\begin{aligned} u&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{af}{2\mu}\frac{(2m+3)(3m+1)}{(4m^2+2m+3)(m+2)}\frac{(2m+1)}{2}W_mP_m(\cos\theta) &&(86)\\ v&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{af}{2\mu}\frac{2m+9}{(4m^2+2m+3)(m+2)}\frac{(2m+1)}{2}W_m\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta} &&(87)\\ w&=0 &&(88)\end{aligned}\right.$$

となる。これは u については内部球窩に作用する力を球函数に展開した時の係数が $1/m$ の度合で小さくなる様な級数であり，v については $1/m^2$ の度合で小さくなる様な 級数である事を示している。從つて收斂する。又 (83)～(85) より分る事は内部球窩を少しでも離れた所は $r>a$ であるから，$(a/r)^m$ の程度で無限小になるので，明らかに円錘型の変位になる事を示している。内部球窩に於ては $r\to a$ の場合であるからやはり円錘型になるであろうと想像される。

そこで実際の数値を入れてみると，どのような傾向を示すか調べてみる。m に実際の数値を入れてみると次の様になる。

i）A 型の場合

$$\left\{\begin{aligned} u&=\frac{af\mathcal{E}}{4\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_0(\cos\theta)+\left\{2\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{2}{9}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right\}P_1(\cos\theta)+\left\{\frac{80}{23}\left(\frac{a}{r}\right)^2-\frac{75}{92}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\right.\\ &\quad\times P_2(\cos\theta)+\left\{\frac{42}{13}\left(\frac{a}{r}\right)^3-\frac{28}{45}\left(\frac{a}{r}\right)^5\right\}P_3(\cos\theta)+\left\{\frac{144}{25}\left(\frac{a}{r}\right)^4-\frac{29}{10}\left(\frac{a}{r}\right)^6\right\}P_4(\cos\theta)\\ &\quad+\left\{\frac{370}{113}\left(\frac{a}{r}\right)^5-\frac{3102}{791}\left(\frac{a}{r}\right)^7\right\}P_5(\cos\theta)+\left\{\frac{416}{53}\left(\frac{a}{r}\right)^6-\frac{2093}{424}\left(\frac{a}{r}\right)^8\right\}P_6(\cos\theta)\\ &\quad+\left\{\frac{1890}{213}\left(\frac{a}{r}\right)^7-\frac{3800}{639}\left(\frac{a}{r}\right)^9\right\}P_7(\cos\theta)+\left\{\frac{544}{55}\left(\frac{a}{r}\right)^8-\frac{153}{22}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}\right\}P_8(\cos\theta)\\ &\quad\left.+\left\{\frac{1254}{115}\left(\frac{a}{r}\right)^9-\frac{2014}{253}\left(\frac{a}{r}\right)^{11}\right\}P_9(\cos\theta)+\left\{\frac{1680}{141}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}-\frac{15169}{1692}\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right\}P_{10}(\cos\theta)+\cdots\right]\\ &&&(89)\\ v&=\frac{af\mathcal{E}}{4\mu}\left[\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right\}\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{\frac{10}{23}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{25}{92}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}\right.\\ &\quad+\left\{\frac{7}{15}\left(\frac{a}{r}\right)^5\right\}\frac{dP_3(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\frac{6}{25}\left(\frac{a}{r}\right)^4+\frac{87}{150}\left(\frac{a}{r}\right)^6\right\}\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}\end{aligned}\right.$$

$$+\left\{-\frac{44}{113}\left(\frac{a}{r}\right)^5+\frac{517}{791}\left(\frac{a}{r}\right)^7\right\}\frac{dP_5(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\frac{26}{53}\left(\frac{a}{r}\right)^6+\frac{299}{424}\left(\frac{a}{r}\right)^8\right\}\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$+\left\{-\frac{120}{213}\left(\frac{a}{r}\right)^7+\frac{475}{639}\left(\frac{a}{r}\right)^9\right\}\frac{dP_7(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\frac{34}{55}\left(\frac{a}{r}\right)^8+\frac{17}{22}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}\right\}\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$+\left\{-\frac{76}{115}\left(\frac{a}{r}\right)^9+\frac{1007}{1265}\left(\frac{a}{r}\right)^{11}\right\}\frac{dP_9(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\frac{98}{141}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}+\frac{1379}{1692}\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right\}$$

$$\times\frac{dP_{10}(\cos\theta)}{d\theta}+\cdots\Bigg] \tag{90}$$

$$w=0 \tag{91}$$

$r=2a$ の時,

$$u=\frac{af\varepsilon}{4\mu}[0.1250\,P_0(\cos\theta)+1.0278\,P_1(\cos\theta)+0.8186\,P_2(\cos\theta)+0.3844\,P_3(\cos\theta)$$

$$+0.3147\,P_4(\cos\theta)+0.1823\,P_5(\cos\theta)+0.1034\,P_6(\cos\theta)+0.0577\,P_7(\cos\theta)$$

$$+0.0318\,P_8(\cos\theta)+0.0174\,P_9(\cos\theta)+0.0094\,P_{10}(\cos\theta)+\cdots] \tag{92}$$

$$v=\frac{af\varepsilon}{4\mu}\Bigg[0.6528\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+0.1235\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}+0.0146\frac{dP_3(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$-0.0059\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}-0.0071\frac{dP_5(\cos\theta)}{d\theta}-0.0049\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$-0.0029\frac{dP_7(\cos\theta)}{d\theta}-0.0018\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta}-0.0009\frac{dP_9(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$-0.0005\frac{dP_{10}(\cos\theta)}{d\theta}-\cdots\Bigg] \tag{93}$$

$$w=0 \tag{94}$$

$r=5a$ の時

$$u=\frac{af\varepsilon}{2\mu}[0.0200\,P_0(\cos\theta)+0.4018\,P_1(\cos\theta)+0.1378\,P_2(\cos\theta)+0.0256\,P_3(\cos\theta)$$

$$+0.0090\,P_4(\cos\theta)+0.0021\,P_5(\cos\theta)+0.0005\,P_6(\cos\theta)+0.0001\,P_7(\cos\theta)$$

$$+0.0000_2\,P_8(\cos\theta)+0.0000_{05}\,P_9(\cos\theta)+\cdots] \tag{95}$$

$$v=\frac{af\varepsilon}{4\mu}\Bigg[0.2659\frac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+0.0178\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}+0.0001\frac{dP_3(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$-0.0004\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}-0.0001\frac{dP_5(\cos\theta)}{d\theta}-0.0000_3\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$-0.0000_{07}\frac{dP_7(\cos\theta)}{d\theta}-0.0000_{01}\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta}-\cdots\Bigg] \tag{96}$$

$$w=0 \tag{97}$$

$r=10a$ の時

$$\begin{cases} u=\dfrac{af\varepsilon}{4\mu}[0.0050\,P_0(\cos\theta)+0.2002\,P_1(\cos\theta)+0.0347\,P_2(\cos\theta)+0.0032\,P_3(\cos\theta) \\ \qquad +0.0005\,P_4(\cos\theta)+0.0000_7\,P_5(\cos\theta)+\cdots\cdot] \qquad (98) \\ v=\dfrac{af\varepsilon}{4\mu}\left[0.1332\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+0.0044\dfrac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}+0.0000_{05}\dfrac{dP_3(\cos\theta)}{d\theta}\right. \\ \qquad \left.-0.0000_2\dfrac{dP_4(\cos\theta)}{dP}-0.0000_{04}\dfrac{dP_5(\cos\theta)}{d\theta}-\cdots\cdot\right] \qquad (99) \\ w=0 \qquad (100) \end{cases}$$

かうじて r が大きくなればなる程急速に減衰し，

$r\gg a$ の時

$$\begin{cases} u=\dfrac{af\varepsilon}{4\mu}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2P_0(\cos\theta)+2\left(\dfrac{a}{r}\right)P_1(\cos\theta)+\dfrac{80}{23}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2P_2(\cos\theta)\right. \qquad (101) \\ v=\dfrac{af\varepsilon}{4\mu}\left[\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{a}{r}\right)\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta}+\dfrac{10}{23}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\dfrac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}\right] \qquad (102) \\ w=0 \qquad (103) \end{cases}$$

となる。これ等の関係を図示したものがオ4図 A である。

ii）B 型の場合

$$\begin{cases} u=\dfrac{af\varepsilon}{2\mu}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2P_0(\cos\theta)+\left\{\dfrac{80}{23}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2-\dfrac{75}{92}\left(\dfrac{a}{r}\right)^4\right\}P_2(\cos\theta)+\left\{\dfrac{144}{25}\left(\dfrac{a}{r}\right)^4-\dfrac{29}{10}\left(\dfrac{a}{r}\right)^6\right\}\right. \\ \qquad \times P_4(\cos\theta)+\left\{\dfrac{416}{53}\left(\dfrac{a}{r}\right)^6-\dfrac{2093}{424}\left(\dfrac{a}{r}\right)^8\right\}P_6(\cos\theta)+\left\{\dfrac{544}{55}\left(\dfrac{a}{r}\right)^8-\dfrac{153}{22}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{10}\right\} \\ \qquad \left.\times P_8(\cos\theta)+\left\{\dfrac{1680}{141}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{11}-\dfrac{15169}{1692}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{12}\right\}P_{10}(\cos\theta)+\cdots\cdot\right] \qquad (104) \\ v=\dfrac{af\varepsilon}{2\mu}\left[\left\{\dfrac{10}{23}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2+\dfrac{25}{92}\left(\dfrac{a}{r}\right)^4\right\}\dfrac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\dfrac{6}{25}\left(\dfrac{a}{r}\right)^4+\dfrac{87}{150}\left(\dfrac{a}{r}\right)^6\right\}\dfrac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}\right. \\ \qquad +\left\{-\dfrac{26}{53}\left(\dfrac{a}{r}\right)^6+\dfrac{299}{424}\left(\dfrac{a}{r}\right)^8\right\}\dfrac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\dfrac{34}{55}\left(\dfrac{a}{r}\right)^8+\dfrac{17}{22}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{10}\right\}\dfrac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta} \\ \qquad \left.+\left\{-\dfrac{98}{141}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{10}+\dfrac{1379}{1692}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{12}\right\}\dfrac{dP_{10}(\cos\theta)}{d\theta}+\cdots\cdot\right] \qquad (105) \\ w=0 \qquad (106) \end{cases}$$

$r=2a$ の時

$$\begin{cases} u=\dfrac{af\varepsilon}{2\mu}[0.1250\,P_0(\cos\theta)+0.8186\,P_2(\cos\theta)+0.3147\,P_4(\cos\theta)+0.1034\,P_6(\cos\theta) \\ \qquad +0.0318\,P_8(\cos\theta)+0.0094\,P_{10}(\cos\theta)+\cdots\cdot] \qquad (107) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned} v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigl[0.1235\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0059\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0049\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta} \\ &\quad - 0.0018\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0005\frac{dP_{10}(\cos\theta)}{d\theta} - \cdots\cdots\Bigr] && (108) \\ w &= 0 && (109) \end{aligned}\right.$$

$r=5a$ の時

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}[0.0200\,P_0(\cos\theta)+0.1378\,P_2(\cos\theta)+0.0090\,P_4(\cos\theta)+0.0005\,P_6(\cos\theta) \\ &\quad 0.0000_2\,P_8(\cos\theta)+\cdots\cdots] && (110) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigl[0.0179\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0004\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0000_3\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta} \\ &\quad - 0.0000_1\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta} - \cdots\cdots\Bigr] && (111) \\ w &= 0 && (112) \end{aligned}\right.$$

$r=10a$ の時

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}[0.0050\,P_0(\cos\theta)+0.0347\,P_2(\cos\theta)+0.0005\,P_4(\cos\theta)+0.0000_{08}\,P_6(\cos\theta) \\ &\quad +\cdots\cdots] && (113) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigl[0.0044\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0000_2\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta} - 0.0000_{05}\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta} - \cdots\cdots\Bigr] \\ w &= 0 && (114),\ (115) \end{aligned}\right.$$

$r \gg a$ の時

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigl[\frac{1}{2}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^2 P_0(\cos\theta)+\frac{80}{23}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^2 P_2(\cos\theta)\Bigr] && (116) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigl[\frac{10}{23}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^2\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}\Bigr] && (117) \\ w &= 0 && (118) \end{aligned}\right.$$

これらの結果を図示したものが才4図 B である。

iii) C の場合,

$$\left(\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\frac{1}{2}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^2 P_0(\cos\theta) - \Bigl\{\frac{40}{23}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^2 - \frac{75}{184}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^4\Bigr\}P_2(\cos\theta) + \Bigl\{\frac{54}{25}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^4 \\ &\quad - \frac{87}{80}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^6\Bigr\}P_4(\cos\theta) - \Bigl\{\frac{130}{53}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^6 - \frac{10465}{6784}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^8\Bigr\}P_6(\cos\theta) + \Bigl\{\frac{119}{44}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^8 \\ &\quad - \frac{5355}{2816}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^{10}\Bigr\}P_8(\cos\theta) - \Bigl\{\frac{6615}{2256}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^{10} - \frac{4977}{2256}\Bigl(\frac{a}{r}\Bigr)^{12}\Bigr\}P_{10}(\cos\theta) + \cdots\cdots\Bigr] && (119) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigg[-\left\{\frac{5}{53}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{25}{184}\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\frac{9}{106}\left(\frac{a}{r}\right)^4+\frac{261}{1200}\left(\frac{a}{r}\right)^6\right\}\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta} \\ &\quad -\left\{-\frac{65}{424}\left(\frac{a}{r}\right)^6+\frac{1495}{6784}\left(\frac{a}{r}\right)^8\right\}\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta}+\left\{-\frac{119}{704}\left(\frac{a}{r}\right)^8+\frac{595}{2816}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}\right\}\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta} \\ &\quad -\left\{-\frac{1029}{6016}\left(\frac{a}{r}\right)^{10}+\frac{28959}{144384}\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right\}\frac{dP_{10}(\cos\theta)}{d\theta}+\cdots\Bigg] \qquad (120) \\ w &= 0 \qquad (121) \end{aligned}\right.$$

$r=2a$ の時

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}[0.1250\,P_0(\cos\theta)-0.4093\,P_2(\cos\theta)+0.1180\,P_4(\cos\theta)-0.0323\,P_6(\cos\theta) \\ &\quad +0.0087\,P_8(\cos\theta)-0.0023\,P_{10}(\cos\theta)+\cdots] \qquad (122) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigg[-0.0618\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}-0.0022\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}+0.0015\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta} \\ &\quad -0.0005\frac{dP_8(\cos\theta)}{d\theta}+0.0001\frac{dP_{10}(\cos\theta)}{d\theta}-\cdots\Bigg] \qquad (123) \\ w &= 0 \qquad (124) \end{aligned}\right.$$

$r=5a$ の時

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}[0.0200\,P_0(\cos\theta)-0.0689\,P_2(\cos\theta)+0.0034\,P_4(\cos\ )-0.0002\,P_6(\cos\theta) \\ &\quad +0.0000_{05}\,P_8(\cos\theta)-\cdots] \qquad (125) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigg[-0.0089\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}-0.0002\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}+0.0000_{09}\frac{dP_6(\cos\theta)}{d\theta}-\cdots\Bigg] \\ &\qquad (126) \\ w &= 0 \qquad (127) \end{aligned}\right.$$

$r=10a$ の時

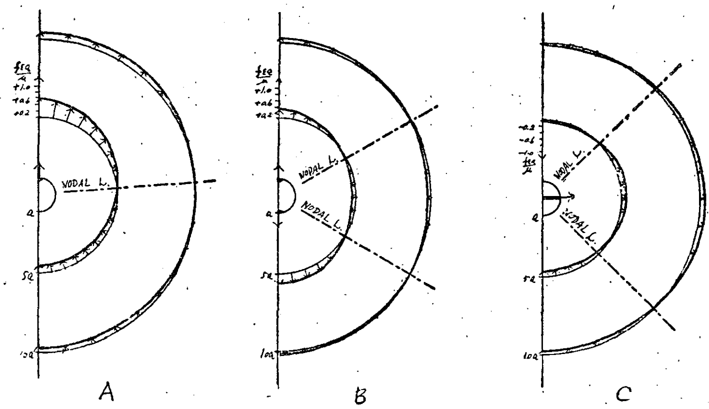
$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}[0.0050\,P_0(\cos\theta)-0.0174\,P_2(\cos\theta)+0.0002\,P_4(\cos\theta)-0.0000_{03}\,P_6(\cos\theta) \\ &\quad +\cdots \qquad (128) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\Bigg[-0.0022\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}-0.0000_{08}\frac{dP_4(\cos\theta)}{d\theta}+\cdots\Bigg] \qquad (129) \\ w &= 0 \qquad (130) \end{aligned}\right.$$

$r\gg a$ の時

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_0(\cos\theta)-\frac{40}{23}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_2(\cos\theta)\right] \qquad (131) \\ v &= \frac{af\varepsilon}{2\mu}\,\frac{5}{23}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}\Bigg] \qquad (132) \end{aligned}\right.$$

$w=0$

となる。これらを図示したものが才4図 C である。



才　4　図

§5. 結

A 型では力のある側が押され，ない側は引かれる。即ち半球型となる。B 型は両極の力のある部分は押され，ない部分は引かれる押円錘型で頂角 120° の対照型となる。C 型はやはり力のある部分は押され，ない部分が引かれる。しかしこの場合は引円錘型となり頂角 90° の対照型である。これ等の関係は r が a より大きい所では r の如何に拘らず殆んど変らない。それ故 $r=a$ の所でもやはりこの関係は保たれると考えられる。これは筆者の予想していた通りであつた。

次に変位の距離による減衰は，A 型は a/r に比例してをるが，B 型，C 型は $(a/r)^2$ に比例してをる。従つて B 型，C 型では波動の距離による減衰よりも遙かに小さくなるが，A 型は同程度である。故に A 型の場合は波動が観測される所では，同程度の変位も観測出来る事になる。しかし B 型，C 型では波動は観測されても地形変動は観測出来ないであろう。

最後に a/r の小さい所では $P_2(\cos\theta)$ までの計算で充分である事が分る。これは震源才二報でも指摘した所である。

1945, 8, 13