

# 上下地震計における吊バネの振動の影響

本 間 正 作\*

## §1. はしがき

私は前に上下動地震計の吊バネの質量が固有週期及び強制振動に及ぼす影響を論じた<sup>(1)</sup>。結果の中固有週期に及ぼす効果を Galitzin が求めてあつたもの<sup>(2)</sup>と比較すると若干の喰違いはあつたが形が似ている所から見ると、Galitzin も多分取扱いの方針は同じであつて、重錘の振動により吊バネが一樣に伸縮すると仮定したのではないかと思われる。しかし、よく考えると吊バネの質量に作用する地動の加速度を取り入れる以上バネが一樣に伸縮と言うのは普遍的の事情ではなく、どうしてもバネの縦振動や横振動を考えなければ不安が残る。そこでこの点を調べてみる。

## §2. 外力をうける弾性糸の振動

吊バネは螺旋バネであるが、これを剛性のない弾性糸と見なす。才1図で I, II はそれぞれ基準

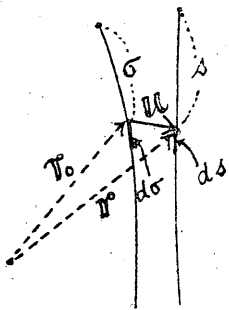


Fig. 1

の状態及び振動をしている弦の形とする。両者の対応する部分を弦の一端から測つた長さ  $\sigma$  及び  $s$  で表わし、それぞれの座標を  $r_0$  及び  $r$ 、変位を  $u$  とすると

$$u = r - r_0 \quad (2.1)$$

この部分に作用する外力を単位質量につき  $F_0$ ,  $F$ , 張力を  $T_0$ ,  $T$  とする。I の状態における糸の線密度 (一樣とする) を  $\rho$  であらわす。

運動の式は

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( T \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right) + \rho F \quad (2.2)$$

特に釣合の状態 (I) では

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( T_0 \frac{\partial r_0}{\partial \sigma} \right) + \rho F_0 = 0 \quad (2.3)$$

次に伸びの弾性率を  $\lambda$  とすると

$$T - T_0 = \lambda \left( \frac{\partial s}{\partial \sigma} - 1 \right) \quad \therefore \quad \frac{\partial s}{\partial \sigma} = 1 + \frac{T - T_0}{\lambda} \quad (2.4)$$

\* 地震観測所

(1) 本間正作; 上下動地震計の吊バネの質量の影響, 驗震時報 14 (1950) 15~20.

(2) B. Galitzin; Vorlesungen über Seismometrie (1914), 386~387, 公式 (18).

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \sigma}{\partial s / \partial \sigma} = \frac{1}{1 + \frac{T - T_0}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma}$$

これを(2.2)に代入して

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{T}{1 + \frac{T - T_0}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right) + \rho \mathbf{F}$$

これと(2.3)の差を作ると

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{T}{1 + \frac{T - T_0}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} - T_0 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right\} + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)$$

次に

$$p = T - T_0 \quad (2.5)$$

とおくと  $\frac{T}{1 + \frac{T - T_0}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \frac{T_0 + p}{1 + \frac{p}{\lambda}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right)$ , したがって

$$\frac{T}{1 + \frac{T - T_0}{\lambda}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} - T_0 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} = \frac{p \left( 1 - \frac{T_0}{\lambda} \right)}{1 + \frac{p}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} + \frac{T_0 + p}{1 + \frac{p}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \quad \text{故に}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{T_0 + p}{1 + p/\lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right\} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{p \left( 1 - \frac{T_0}{\lambda} \right)}{1 + \frac{p}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right\} + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) \quad (2.6)$$

次に  $\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}$  や  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$  は方向余弦だから  $\left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right)^2 = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right)^2 = 1$  となる。これを(2.4)に代入すると

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right)^2 = \left( 1 + \frac{p}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right)^2 = \left( 1 + \frac{p}{\lambda} \right)^2$$

(2.1)を代入すると  $2 \frac{p}{\lambda} + \frac{p^2}{\lambda^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right)$  (2.7)

(2.6)と(2.7)を適当な端の条件から解くと  $\mathbf{u}$  と  $p$  が決る。

特に微小振動であると  $|\mathbf{u}|$  も  $p$  もはなほ小さくて2次量が省略出来、(2.7)は

$$\frac{p}{\lambda} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right) \quad (2.8)$$

(2.6)は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( T_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ (\lambda - T_0) \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right\} + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) \quad (2.9)$$

ベクトルの公式

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right] \right] = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma}$$

を用いて変形すると

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ (\lambda - T_0) \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right] \right] \right\} + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) \quad (2.10)$$

とも書ける。

(2.9) と (2.10) より  $\mathbf{u}$  を2つの部分に分けられることが分る。すなわち

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (2.11)$$

で

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad (2.12)$$

とすると、 $\mathbf{u}_1$  を調べるには (2.9) が便利であり、 $\mathbf{u}_2$  を調べるには (2.10) が便利であつて、それぞれ

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( T_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \sigma} \right) + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) \quad (2.13)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \sigma} \right) + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) \quad (2.14)$$

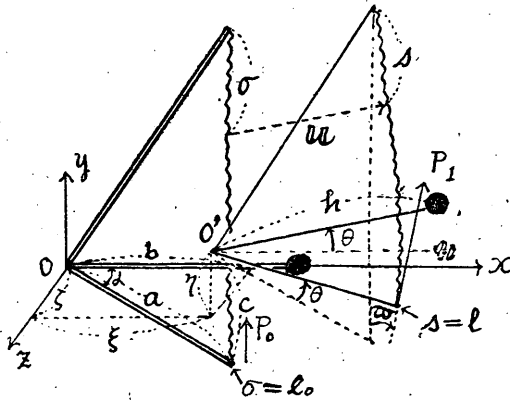


Fig. 2

となる。

$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}$  が  $\sigma$  によらず一定である時 (糸が直線である時) は (2.12) の条件は  $(\mathbf{u}_1, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}) = 0$ ,  $(\mathbf{u}_2, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma}) = 0$  と同一である。(これらの式を  $\sigma$  で微分すると (2.12) になるから。) したがつて  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  はそれぞれ横振動と縦振動を示す。

### §3. 上下動地震計の吊バネの質量の影響の基本式

才2図は座標系と地震計の位置の図で、座標の原点0に静止状態の重錘の廻転軸が一致しており、この時重錘は水平な  $x$  軸上にあり、これを  $x$  軸より下方から鉛直の吊バネで、吊つてあるものとする。振子の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} = -Mgh + aP_1 \cos(\alpha - \theta - \omega) + Mh\xi \sin \theta - Mh\eta \cos \theta \quad (3.1)$$

となる。ここに

$\theta$ : 振子の振れ角,

$I$ : 支点0のまわりの慣性能率 (吊バネを除く),

$f$ : 振子に作用する制振力,

$M$ : 振子 (バネを除く) の質量,

$g$ : 重力加速度,

$h$ :  $O$  と重心の距離,

$a$ :  $O$  と吊バネの下端の距離,

$b$ :  $O$  と吊バネの距離,

$c$ : 吊バネの下端と  $x$  軸の距離,

$l_0, l$ : 釣合及び運動状態における吊バネの長さ,

$\alpha$ : 水平と吊バネの下端が  $O$  に張る角,

$P_1$ : 運動状態にある吊バネが, その下端で示す張力の  $z$  軸に垂直な成分。(振子の運動面内の成分),

$\omega$ :  $P_1$  が鉛直線  $y$  軸となす角,

$\xi, \eta, \zeta$ : 地動変位の  $x, y, z$  成分,

釣合の時の  $P_1$  を  $P_0$  とおくと之は鉛直上方をむき,  $\omega=0$  であるから  $-Mgh+aP_0 \cos \alpha=0$ .

$$\therefore P_0 = \frac{Mgh}{b} \quad (3.2)$$

さて  $\xi, \eta, \zeta$  が小さいと一般に  $\theta$  も  $\omega$  も小さいから,  $a \cos(\alpha - \theta - \omega) \doteq a \{\cos \alpha + (\theta + \omega) \sin \alpha\} = b + (\theta + \omega) c$  であり, また  $\ddot{\xi} \sin \theta$  は  $\ddot{\eta} \cos \theta \doteq \ddot{\eta}$  に比し無視出来るから, (3.1) は

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} &= -bP_0 + P_1 \{b + (\theta + \omega) c\} - Mh\ddot{\eta} \\ &= b(P_1 - P_0) + cP_1(\theta + \omega) - Mh\ddot{\eta} \end{aligned}$$

右辺才 2 項の  $P_1$  は  $P_0$  とおいても, 誤差は 2 次の小量だから, 振子の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} = b(P_1 - P_0) + cP_0(\theta + \omega) - Mh\ddot{\eta} \quad (3.3)$$

次に吊バネの運動を考える。伸びの弾性率  $\lambda$  が  $\sigma$  に関係せず一定とすると, (2.13), (2.14) より

$$\rho \frac{\partial^2(u, w)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ T_0 \frac{\partial(u, w)}{\partial \sigma} \right\}, \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} \quad (3.5)$$

となる。ここで  $(u, v, w)$  は  $(x, y, z)$  方向の変位成分で, 外力は常に重力だけだから  $\mathbf{F} - \mathbf{F}_0 = 0$  である。 $\sigma$  は吊バネの上端から測つてある。

$r_0$  の成分は  $x=b, y=l_0-c-\sigma, z=0$  であるから

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \sigma} = (0, -1, 0) \quad (3.6)$$

釣合の状態の式 (2.3) は

$$-\frac{\partial T_0}{\partial \sigma} - \rho g = 0$$

これを積分し  $\sigma = l_0$ ,  $T_0 = P_0$  の条件で積分すると

$$T_0 = P_0 + \rho g \cdot (l_0 - \sigma) \quad (3.7)$$

(2.8) から  $\frac{p}{\lambda} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}$  であるから, (2.5) に代入して

$$T = T_0 + p = P_0 + \rho g (l_0 - \sigma) - \lambda \frac{\partial v}{\partial \sigma} \quad (3.8)$$

$\sigma = l_0$ , ( $s = l$ ) における  $T$  を  $P$  とおくと

$$P = P_0 - \lambda \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} \quad (3.9)$$

$P_1$  を求めるには  $P$  の方向余弦が必要で, これは  $s = l$  における吊バネの切線方向余弦  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$  の逆方向で与えられる。(2.4) により

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{1}{1 + \frac{p}{\lambda}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \frac{1}{1 - \frac{\partial v}{\partial \sigma}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right)$$

$$\doteq \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma}, -1 + \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right)$$

$$\doteq \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma}, -1, \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right),$$

$$\therefore P_x = -P \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0}, \quad P_y = P, \quad P_z = -P \left( \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0}$$

$$\therefore P_1 = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \doteq P \quad (3.10)$$

$$\omega \doteq \sin \omega = \frac{P_x}{P_1} = - \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} \quad (3.11)$$

(3.9), (3.10) から

$$P_1 - P_0 = -\lambda \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} \quad (3.12)$$

(3.11) と (3.12) を (3.3) に代入して

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} = -b\lambda \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} + Mgh \frac{C}{b} \left\{ \theta - \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} \right\} - Mh\ddot{\eta} \quad (3.13)$$

この式から吊バネの前後方向の振動  $w$  は才一近似程度では  $\theta$  に影響を与えない事が分つた。し

たがつて系の運動方程式としては (3.4), (3.5) 及び (3.7) から

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \{P_0 + \rho g (l_0 - \sigma)\} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right], \quad (3.14)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} \quad (3.15)$$

だけ考えればよい。

吊バネの端の条件は次式で与えられる。

$$\sigma=0 \text{ で } u=\xi, \quad v=\eta \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma=l_0 \text{ で } u &= \xi + a \cos(\alpha - \theta) - a \cos \alpha \dot{\xi} + c\theta, \\ v &= \eta - a \sin(\alpha - \theta) + a \sin \alpha \dot{\eta} + b\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

#### §4. 吊バネの慣性が充分小さい場合

地動が余り急激でなく、従つて吊バネの加速度が余り大きくない時には (3.16) と (3.17) を満足するような (3.14) と (3.15) の第一近似値は  $\rho=0$  とおいて  $\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} = 0$  から得られて

$$u = \xi + c \frac{\sigma}{l_0} \theta, \quad v = \eta + b \frac{\sigma}{l_0} \theta$$

となる。第二近似値を

$$\left. \begin{aligned} u &= \xi + c \frac{\sigma}{l_0} \theta + \frac{\rho g l_0}{P_0} u_1(\sigma, t) \\ v &= \eta + b \frac{\sigma}{l_0} \theta + \frac{\rho}{\lambda} v_1(\sigma, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

とおいて (3.14), (3.15) に代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + c \frac{\sigma}{l_0} \ddot{\theta} &= g l_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} - g l_0 \frac{c\theta}{l_0^2}, \\ \ddot{\eta} + b \frac{\sigma}{l_0} \ddot{\theta} &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial \sigma^2}. \end{aligned}$$

が得られる。これを

$$\sigma=0 \text{ 及び } l_0 \text{ で } u_1=v_1=0$$

の条件で積分して

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\sigma(\sigma-l_0)}{2gl_0} \left\{ \ddot{\xi} + \frac{c}{3l_0} \ddot{\theta} (\sigma+l_0) + \frac{cg}{l_0} \theta \right\}, \\ v_1 &= \frac{\sigma(\sigma-l_0)}{2} \left\{ \ddot{\eta} + \frac{b}{3l_0} \ddot{\theta} (\sigma+l_0) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\therefore \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} = \frac{c}{l_0} \theta + \frac{\rho l_0}{2P_0} \left( \ddot{\xi} + \frac{2}{3} c \ddot{\theta} + \frac{c\xi}{l_0} \theta \right),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=l_0} = \frac{b}{l_0} \theta + \frac{\rho l_0}{2\lambda} \left( \ddot{\eta} + \frac{2}{3} b \ddot{\theta} \right)$$

これらを (3.13) に代入すると

$$\begin{aligned} \left( I + \frac{\rho l_0 a^2}{3} \right) \ddot{\theta} + f \dot{\theta} + \left\{ \frac{\lambda}{l_0} b^2 - M g h \frac{c}{b} \left( 1 - \frac{c}{l_0} \right) + \frac{\rho l_0 c^2}{2 l_0} g \right\} \theta \\ = - \left( M h + \frac{\rho l_0 b}{2} \right) \ddot{\eta} - \frac{\rho l_0 c}{2} \xi \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3) は前論文<sup>(3)</sup>の (2.13) 式と全く一致する。すなわち前論文の場合には計算の過程は十分に正当でなかつたが<sup>(4)</sup>、たまたま結果は正しいものと同じになつた。

### § 5. 吊バネの弾性振動の影響

極めて急激な地動が来ると振動系に生ずる加速度がある程度大きくなるから、才一近似値からバネの運動方程式 (3.14), (3.15) の加速度の項を取り入れる必要がある。

(3.13), (3.14), (3.15), (3.16) 及び (3.17) で  $\xi, \eta, u, v, \theta$  は何れも  $e^{int}$  なる時間因子と  $\xi_0, \eta_0, u_0, v_0, \theta_0$  なる振巾との積の形をとるとすると

$$\left[ -n^2 I \theta_0 + i n f \theta_0 = -b \lambda \left( \frac{\partial v_0}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} + M g h \frac{c}{b} \left\{ \theta_0 - \left( \frac{\partial u_0}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=l_0} \right\} + M h n^2 \eta_0 \right] \quad (5.1)$$

$$\left[ \frac{d}{d\sigma} \left[ \{ P_0 + \rho g (l_0 - \sigma) \} \frac{d u_0}{d\sigma} \right] + n^2 \rho u_0 = 0 \right] \quad (5.2)$$

$$\left[ \lambda \frac{d^2 v_0}{d\sigma^2} + n^2 \rho v_0 = 0 \right] \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma=0 \text{ で } u_0 = \xi_0, \quad v_0 = \eta_0, \\ \sigma=l_0 \text{ で } u_0 = \xi_0 + c \theta_0, \quad v_0 = \eta_0 + b \theta_0 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma=0 \text{ で } u_0 = \xi_0, \quad v_0 = \eta_0, \\ \sigma=l_0 \text{ で } u_0 = \xi_0 + c \theta_0, \quad v_0 = \eta_0 + b \theta_0 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

となる。(5.2), (5.3) の解は

$$u_0 = A_1 J_0 \left\{ \frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0} \left( 1 - \frac{\sigma}{l_0} \right)} \right\} + A_2 Y_0 \left\{ \frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0} \left( 1 - \frac{\sigma}{l_0} \right)} \right\}, \quad (5.6)$$

$$v_0 = B_1 \cos \left( \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n \sigma \right) + B_2 \sin \left( \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n \sigma \right) \quad (5.7)$$

これらを (5.4) と (5.5) に代入すると

(3) 前掲 (1)

(4) 前論文では吊バネの伸縮が一様で  $u, v$  が  $\sigma$  の一次式と假定したが、今度は (4.2) のように  $\sigma^2$  の項が入っている。

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\xi_0 Y_0(r) - (\xi_0 + c\theta_0) Y_0(s)}{J_0(s) Y_0(r) - Y_0(s) J_0(r)}, \\
 A_2 &= \frac{-\xi_0 J_0(r) + (\xi_0 + c\theta_0) J_0(s)}{J_0(s) Y_0(r) - Y_0(s) J_0(r)}, \\
 B_1 &= \eta_0, \\
 B_2 &= \frac{\eta_0 \left\{ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right) \right\} + b\theta_0}{\sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right)},
 \end{aligned} \right\} (5.8)$$

ここで

$$r = \frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}}, \quad s = \frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}} \quad (5.9)$$

また

$$\left. \begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u_0}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=l_0} &= n \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \{A_1 J_1(r) + A_2 Y_1(r)\}, \\
 \left(\frac{\partial v_0}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=l_0} &= n \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} \left\{ -B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right) \right\},
 \end{aligned} \right\} (5.10)$$

これらを (5.1) に代入して  $\theta_0$  を解くと

$$\theta_0 = -\frac{\Phi_1}{\Phi} \eta_0 - \frac{\Phi_2}{\Phi} \xi_0, \quad (5.11)$$

たゞし

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi &= n^2 - i \frac{g}{I} n + \frac{Mgh}{I} \cdot \frac{c}{b} - n \frac{b^2 \sqrt{\lambda \rho}}{I} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right), \\
 &\quad - n \frac{Mgh}{I} \cdot \frac{c^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \cdot \frac{J_1(r) Y_0(s) - Y_1(r) J_0(s)}{J_0(r) Y_0(s) - Y_0(r) J_0(s)}, \\
 \Phi_1 &= n^2 \frac{Mh}{I} + n \frac{b \sqrt{\lambda \rho}}{I} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right), \\
 \Phi_2 &= n \frac{Mgh}{I} \cdot \frac{c}{b} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \left\{ \frac{J_1(r) Y_0(r) - J_0(r) Y_1(r)}{J_0(r) Y_0(s) - Y_0(r) J_0(s)} - \frac{J_1(r) Y_0(s) - Y_1(r) J_0(s)}{J_0(r) Y_0(s) - Y_0(r) J_0(s)} \right\} \\
 &= n \frac{Mgh}{I} \cdot \frac{c}{b} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \cdot \frac{1}{J_0(r) Y_0(s) - Y_0(r) J_0(s)} \left\{ \frac{2}{\pi r} - J_1(r) Y_0(s) + Y_1(r) J_0(s) \right\}
 \end{aligned} \right\} (5.12)$$

特に  $n$  が非常に大きいか、あるいは  $\rho$  が大変小さい時は  $r \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow \infty$  となるから

$$J_0(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_0(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{\pi}{4}\right),$$



$$J_1(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{3\pi}{4}\right), \quad Y_1(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{3\pi}{4}\right);$$

などの漸近展開を代入すると、

$$\begin{aligned} \phi &= n^2 - i \frac{f}{I} + n \frac{Mge}{I} \cdot \frac{c}{b} - n \frac{b^2 \sqrt{\lambda \rho}}{I} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right) \\ &\quad - n \frac{c^2}{I} \sqrt{\frac{Mgh}{b}} \rho \operatorname{ctg}\left\{\frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}} - 1\right)\right\}, \\ \phi_1 &= \frac{Mh}{I} n^2 + n \frac{b \sqrt{\lambda \rho}}{I} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right), \\ \phi_2 &= n \frac{c}{I} \sqrt{\frac{Mgh}{b}} \rho \left[ \frac{\left(1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}\right)^{\frac{1}{4}} - 1}{\sin\left\{\frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}} - 1\right)\right\}} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg}\left\{\frac{n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}} - 1\right)\right\} \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる。

$f=0$  の時、 $\phi=0$  ならしめる  $n$  が振動系の固有周期である。特に  $\rho \rightarrow 0$  とすると

$$\begin{aligned} &\frac{b^2 \sqrt{\lambda \rho}}{I} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right) \doteq \frac{b^2 \sqrt{\lambda \rho}}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0} = \frac{b^2 \lambda}{I n l_0}, \\ &\frac{c^2}{I} \sqrt{\frac{Mgh}{b}} \rho \operatorname{ctg}\left\{\frac{2n}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}} - 1\right)\right\} \doteq \frac{c^2}{I} \sqrt{P_0 \rho} \operatorname{ctg}\left(n \sqrt{\frac{\rho}{P_0}}\right) \\ &\quad \doteq \frac{c^2}{I} \sqrt{P_0 \rho} \frac{1}{n \sqrt{\frac{\rho}{P_0}}} = \frac{c^2 P_0}{I n l_0}, \\ \therefore \phi_{f=0} &= n^2 + \frac{Mgh}{I} \frac{c}{b} - \frac{b^2 \lambda}{I l_0} - \frac{c^2 P_0}{I l_0} \\ &= n^2 + \frac{Mgh}{I} \frac{c(l_0 - c)}{b l_0} - \frac{b^2 \lambda}{I l_0} = 0, \\ \therefore n^2 &= \frac{b^2 \lambda}{I l_0} - \frac{Mgh}{I} \cdot \frac{c(l_0 - c)}{b l_0} \end{aligned}$$

で、ふつうの固有週期の式と完全に一致する。(5.12) の Bessel 函数の展開をもつと高次までとつて  $\rho$  を小さいとすると、(4.3) のような固有週期の式になる。

### § 6. ウィーヘルト上下動地震計の例

ウィーヘルト式上下動地震計では吊バネが全長にわたっていないで下方は剛体の足で重錘を釣っているが、仮りにこれを全長吊バネであると考ええる。そして

$M=8 \times 10^4$ ,  $h=60$ ,  $I \doteq Mh^2=2.88 \times 10^8$ ,  $l_0=157$ ,  $a=48$ ,  $b=28$ ,  $C=39$ ,  $\rho=156$ ,  
 $\lambda=4.5 \times 10^8$  (いずれも単位は C. G. S.) などの数値を与えると

$$\frac{Mgh}{I} \cdot \frac{C}{b} = 1.393, \quad \frac{b^2 \sqrt{\lambda \rho}}{I} = 5.10, \quad \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} l_0 = 0.09244,$$

$$\frac{C^2}{I} \sqrt{\frac{Mgh}{I}} \rho = 5.15, \quad \frac{2}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \left( \sqrt{1 + \frac{\rho g l_0}{P_0}} - 1 \right) = 0.002522$$

となる。なおこの場合

$$\frac{1}{g} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} = 63.55, \quad \frac{\rho g l_0}{P_0} = 3.97 \times 10^{-5}$$

である。 $r \gg 1$  の条件は  $63.55n \gg 1$  となるから固有週期  $\frac{2\pi}{n}$  が数秒以下なら、(5.13) の公式をあてはめてよい。上の数値を用いると、高次の固有週期の式は

$$\Phi_{f=0} = n^2 + 1.393 - 5.10n \{ \text{ctg}(0.09244n) + 1.0098 \text{ctg}(0.002522n) \} = 0$$

となり、この根は無数にあるが、小さい方は 32.1, 46.3..., すなわち週期にすると 0.196 秒, 0.136 秒, ... となる。

ワイエールト式地震計記象に往々非常に短週期の微動が持続的に混入することがあるのは、多分衝撃的地動により誘起したバネの振動ではないかと思われる。たゞし制振器が入っている時にも、この振動が果して持続し得るかどうかが問題となるが、これは  $\Phi_{f \neq 0} = 0$  の根を求めれば判明する。今上下動地震計のふつうの意味の固有週期及び制振度を 5 秒及び 5 位にとると、 $\frac{f}{I} = 1.15$  位になる。従つて  $i \frac{f}{I} n$  は上に求めた  $n^2$  に較べ 30 分の 1 か 40 分の 1 にしか当たらないから、高次の固有振動には大した変化は起らない。そこで  $n = n_0 + in_1$  において  $\Phi_{f=0}(n_0) = 0$  とすると、 $\Phi(n) = \Phi(n_0 + in_1) \doteq \Phi(n_0) + in_1 \Phi'(n_0) \doteq -i \frac{f}{I} n_0 + in_1 \Phi'_{f=0}(n_0)$  が 0 となる。

$$\therefore n_1 = \frac{f}{I} \cdot \frac{n_0}{\Phi'_{f=0}(n_0)} = \frac{f}{I} \cdot \left[ 2 - \frac{5.10}{n_0} \{ \text{ctg}(0.09244n_0) + 1.0098 \text{ctg}(0.002522n_0) \} + 5.10 \{ 0.09244 \text{cosec}^2(0.09244n_0^2) + 1.0098 \times 0.002522 \text{cosec}^2(0.002522n_0) \} \right]^{-1}$$

となる。これを求めると次表のようになる。

$n_0$	32.1	46.3
$n_1$	0.062	0.451

$n_0=46.3$  の方の減衰係数は  $\frac{f}{I}$  の半分位あるが、 $n_0=32.1$  の方の減衰係数は、これよりはるかに小さいから相当持続する振動が現われ得る。これは  $n_0=32.1$  というのが吊バネの縦振動の基本振動数、

$\sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} n l_0\right) = \sin(0.09244n) = 0$  の才 1 根  $n=34$  (週期約 0.185 秒) に近いことと関係がある。

すなわち  $n=34$  では吊バネが両端固定の縦振動が可能であるから、Co-resonance の状態になり  $\theta$  の振巾は 0 になるが、この縦振動に吸収されたエネルギーは下端が完全には固定されていないため

徐々に  $n_0=32.1$  の共鳴振動の方に移つて行き振動を永續させるのに役立つ。 $n_0=46.3$  の方は吊バネの縦振動、横振動何れの週期にも遠い合成的なものであるから持続性が弱い。横振動の固有振動数  $\sin\left\{\frac{2n}{g}\sqrt{\frac{P_6}{\rho}}\left(\sqrt{1+\frac{\rho g l_0}{P_0}}-1\right)\right\}=\sin(0.002522n)=0$  の根はずつと大きい。

才 3 図は  $\xi_0=1$  ミクロン又は  $\eta_0=1$  ミクロンの場合の重心の振巾  $h\theta$  (耗) である。一般に  $\eta$  による方が  $\xi$  によるものの 100 倍位になつている。

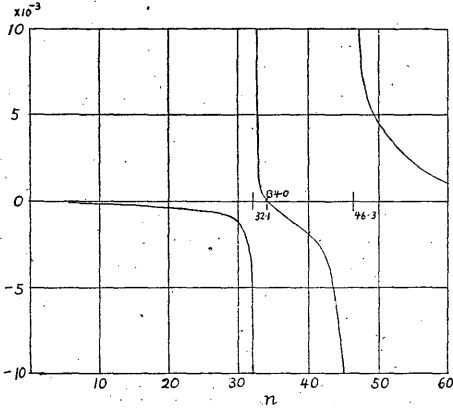


Fig. 3a Amplitude (mm.) of the center of Mass when the amplitude of vertical ground motion is 1 micron and its frequency is  $n$ .  $n=32.1$  and  $46.3$  are resonance points.  $n=34.0$  is co-resonance point of the system and is equal to the first fundamental frequency of lateral oscillation of suspending spring.

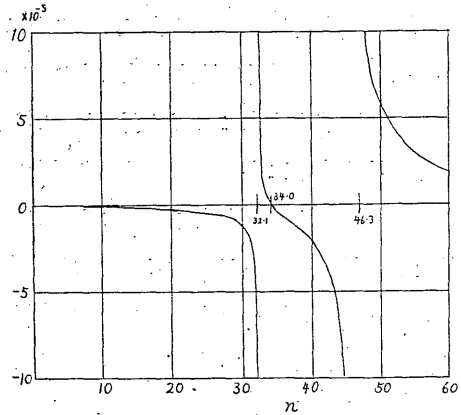


Fig. 3b Corresponding figure to Fig. 3a when the ground motion is horizontal

### § 7. 結 論

上下動地震計の重錘を吊るバネの質量が振子に与える影響については前にも簡単な仮定で扱つたが、今回もう少し物理的条件を増し、吊バネは弾性系のように考えその弾性運動の式から再吟味した。地動が極端に短週期でない場合の地震計の固有週期及び倍率に与えられる影響は前の計算と完全に一致した。しかし地動が急激であると高次の振動が起りうる。いずれの場合にも重錘支桿に直角的な向きの水平動の影響は無視出来る。

ウィーヘルトの上下動地震計に対して上の理論をあてはめると週期約 0.20 秒、0.14 秒、その他無数の高次振動が出る。0.20 秒の振動は大体吊バネの縦振動の基本週期に接近し持続性が強いから、よく記象上に見うける早い振動を説明しうる。0.14 秒の方は持続性が弱い。このような早い振動は急激な地動により誘発された吊バネの縦振動(自由振動)であろう。しかも一般に地動の上下成分の方が水平成分より 100 倍位有力である。

この計算ではウィーヘルト地震計の模型とし不完全で、吊バネの剛性も考慮してないが、大体の模様をうかゞうには足りる。(1950, V, 2)