廻轉軸に薄い板ばねを使つた水平振子の平衡について

矢　崎　敬　三*

従来中央気象台式强震計の様な型の水平振子を板ばねで吊る場合に，板ばねの長さ，走向等については充分注意して設計されては居たが，それにも拘らず板ばねの支点のねぢを緩め，振子が鉛直面内で自由に平衡位置をとれる様にしてやると，かえつて振子がそのまゝ下へずり落ちてしまい，平衡位置が得られないような現象が起つつた。之は必竟支点の位置，ばねの寸法・走向等々が，平衡位置を得るに困難なように作られて居るという事になる。それで此処では色々な場合についてそれらの間の關係を求めて見た。

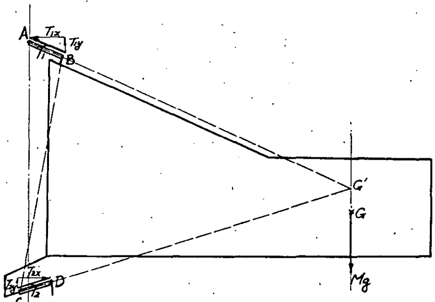

Fig. 1

Fig. 1 に於て振子に働く力は振子の重心を通り，鉛直方向の力 Mg（M は振子の質量）と，板ばねを振子に取付ける支点 B, C に働く力 T_1, T_2 である。振子が板ばねに吊られて釣合の狀態にあるものとすれば，これら3力の間には剛体に働く力の釣合の条件

$\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$, $\Sigma M=0$ (F: 力, M: モーメント)

から次の關係が成立たねばならない。

$$T_{1y}+T_{2y}-M_g=0$$
$$-T_{1x}+T_{2x}=0$$
$$-T_1\cdot\overline{\mathrm{FC}}+Mg\,\overline{\mathrm{CE}}=0$$

卽ち T_1, T_2, Mg 三力の形作る力の三角形が閉ぢるものでなくてはならない。従つて T_1, T_2, Mg の三力の作用線は重心 G を通る鉛直線上の一点 G′ で交る事になる。

今 AB, CD の板ばねの走向と，T_1, T_2 の作用方向とが異る様に取付けられて居ると，それらの力のばね方向の分力は板ばねに引張力として作用し，ばねの走向に直角な方向の分力は板ばねに剪断力として作用する。剪断力として残る分力は万一 AB, CD の取付が同一鉛直面内に收められぬ時には板ばねを捩る様な力として働くので，振子の振動は不良となる。従つて之等のばねの走向は支点に作用する力の方向と一致させる様に取付けるのが良い。順序として，

i)　平衡位置を保つ様に組立てる方法について

ii)　廻転軸の傾斜を変え，週期を変える場合の平衡について

考える事にする。

---

* 氣象測器工場

ia）架台上の支点 A, D の位置，及び板ばねの長さ AB, CD を与えられた場合。

Fig. 1 に示されて居る様に，振子枠の姿勢，即ち ΔBCG の姿勢は定まつて居るから，B, C, G の x 座標の相対距離 c_1, c_2 は一定である。従つて平衡位置が得られたとすると，Fig. 2 から，

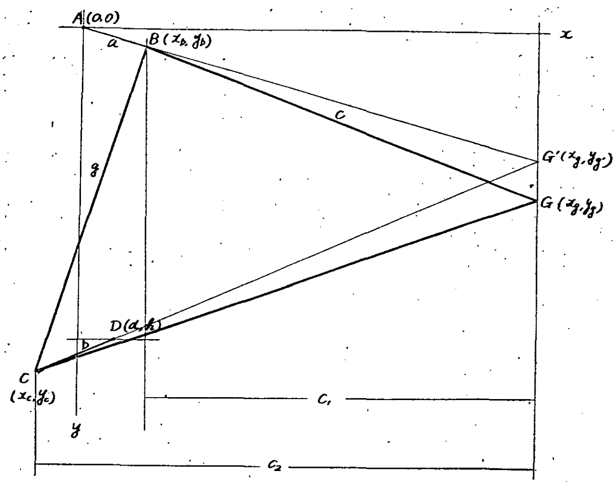

Fig. 2

$$x_b = x_g - c_1 \qquad (1)$$

$$x_c = x_g - c_2 \qquad (2)$$

$$x_b^2 + y_b^2 = a^2 \qquad (3)$$

$$(x_c - d)^2 + (y_c - h)^2 = b^2 \qquad (4)$$

$$(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 = g^2 \qquad (5)$$

$$(x_g - x_b)^2 + (y_g - y_b)^2 = c^2 \qquad (6)$$

の關係が成立ち，且つ G′ $(x_g,\ y_g')$ は $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 両直線上にある条件とから，

$$\begin{aligned}&(k_1 - k_2 + c_1 - c_2\eta)x_g^2\\&+\{-\lambda(c_1 - c_2) - d(k_1 - k_2)\\&-c_2h - c_1d\eta - k_1c_2 + c_1k_2\}x_g\\&+c_1(d\lambda - dk_2 + c_2h) = 0\end{aligned} \qquad (7)$$

$$y_g = \lambda - \eta x_g \qquad (8)$$

但し，

$$k_1 = \sqrt{c^2 - c_1^2}$$

$$k_2 = k_1 - \sqrt{g^2 - (c_2 - c_1)^2}$$

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2 - c_1^2 + c_2 + d^2 + k_2 + h^2 - k_1^2}{2(k_2 + h - k_1)}$$

$$\eta = \frac{2(c_2 + d - c_1)}{2(k_2 + h - k_1)}$$

が得られる。（7）の x_g についての二次式を解けば，（8）式とから重心の位置が判り，

$$y_g' = \frac{y_b}{x_b}x_g$$

なる關係からばねの走向が得られる。此の場合の振子の週期は B, C の位置を知れば求められる。

さて平衡位置が得られた場合，ばねの走向が判るからばねの傾角が知られ，前記の三力の關係式から夫々のばねに働く引張力が求められるから，ばねの諸元を定める目安にする事が出来る。

現在用いられて居る中央気象台式 51 年型強震計について重心位置，その他を求めて見ると，

$$a = b = 60 \quad \mathrm{A}\ (0,\ 0) \qquad \mathrm{D}\ (24,\ 246)$$

を与えて，

$$\mathrm{G}\ (290.7,\ 165)$$

G′ (290.7, 156.1)

B (52.2, 28.1)

C (−32.8, 263.2)

となり，ばねの走向は

$$\theta_1=32°34', \qquad \theta_2=17°37.5'$$

となり，此の場合ばねに働く張力は夫々，

$$T_1=1.88Mg=1.88\times6.01g=11.3\text{kg-wt.}$$

$$T_2=3.08Mg=3.08\times6.01g=18.5\text{kg-wt.}$$

となる。

上，下の板ばねは共に厚さ 0.1mm，幅 12mm であるから，引張応力は夫々 9.4kg/mm², 15.4 kg/mm² となる。ばねに用いられている帯鋼材の機械的性質については審にし得ないが，その引張強さを 100kg/mm² と見ても安全率は 10 乃至 6 位になつて居る。

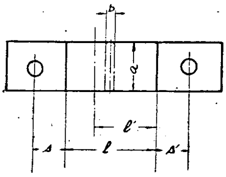

Fig. 3

更に最大週期卽ち廻転軸の傾斜角 0 の場合の平衡について考えて見る。ばねの諸元を Fig. 3 の如くにすると，

$$n=\frac{l}{l-l'}=\frac{l}{l-\dfrac{l\left(\cosh ql-\dfrac{\sinh ql}{ql}\right)}{\cosh ql-1}}=\frac{\cosh ql-1}{\dfrac{\sinh ql}{ql}-1}\ *$$

$$q=\sqrt{\frac{T}{EI_s}},\quad \left(I_s=\frac{ab^3}{12}\right)$$

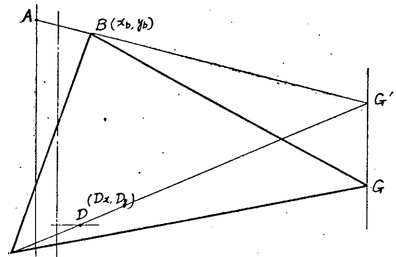

Fig. 4

支点から廻転軸迄の長さを考慮すると，

$$m=\frac{l+s+s'}{l-l'+s}=\frac{n\left(1+\dfrac{s+s'}{l}\right)}{1+\dfrac{ns}{l}}$$

從つて此の場合の振子の平衡位置は Fig. 4 より

$$d-\frac{-x_c+d}{m}=\frac{x_b}{m}$$

$$\therefore\ d=\frac{c_2-c_1}{m-1}$$

卽ち d を上の値になるようにし，y_g, y'_g 等は此の値を前記 (7), (8) の式に入れる事によつて得られる。

ib) D の位置を調整して平衡位置に組立てる事。

一般に上に例を引いた様な振子は複雑な形をして居るので，設計図面上において重心位置を正確

* 萩原尊禮，地震 4 (昭 7) 196.

に求める事は極めて困難であるが，設計の際には一応それを推定し，他の關係位置，例えばドラムやダンパーのマグネツトの位置を決定し，部品図面を作つてしまうから，鑄物が出来上り，加工が終つて全部組立てて見て重心位置を正しく求めて見たところ，それが先に推定した重心位置と異つて居るという事になると，前の様な組立方法ではドラム，ダンパー等の配置にまで影響する事になる。因みに前に例をひいた 51 年型强震計の場合には重心位置を（296, 164）と推定したが，前の計算で得られたのは（290.7, 165）であつた。從つて振子自体の位置をずらさなければ平衡は得られない事になる。

それで次にばねの長さ AB は一定にし，重心の x 座標を与え，その位置で平衡が得られるよう，支点 D の x 座標，ばね CD の長さを求める方法について考えて見る。

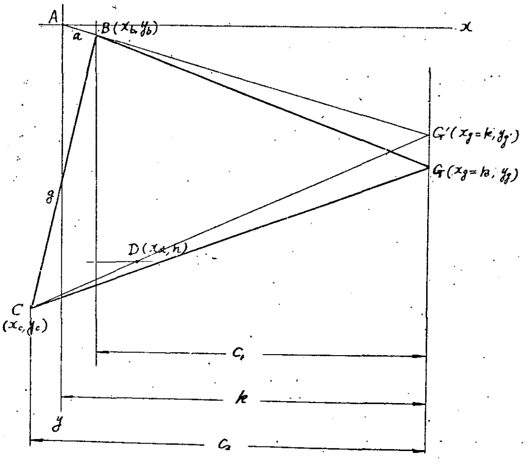

Fig.5

Fig. 5 において AB$=a$, $k=$一定とし，

$$x_b=k-c_1$$

$$y_b=\sqrt{a^2-(k-c)^2}$$

$$\overline{\mathrm{ABG}'}:-y_bx+x_by=0$$

より

$$-y_bk+x_by_g'=0$$

從つて

$$y_g'=\frac{k\sqrt{a^2-\alpha^2}}{\alpha},\quad \alpha=k-c_1$$

$$x_c=(k-c_1)-(c_2-c_1)=\alpha-\beta$$

$$\beta=c_2-c_1$$

$$(x_c-x_b)^2+(y_c-y_b)^2=g^2$$

$$y_c=\sqrt{g^2-\beta^2}+\sqrt{a^2-\alpha^2}$$

$$\overline{\mathrm{CDG}'}:\ (y_c-y_g')x+(x_g-x_c)y+(x_cy_g'-x_gy_c)=0$$

$$(y_c-y_g')x_d+(x_g-x_c)h+(x_cy_g'-x_gy_c)=0$$

$$x_d=\frac{-\{k-(\alpha-\beta)\}h-\left\{(\alpha-\beta)\dfrac{\sqrt{a^2-\alpha^2}}{\alpha}-(\sqrt{g^2-\beta^2}+\sqrt{a_2-\alpha_2})k\right\}}{(\sqrt{g^2-\beta^2}+\sqrt{a^2-\alpha^2})-\dfrac{k\sqrt{a^2-\alpha^2}}{\alpha}}$$

となるから，振子の重心位置を求め，x_d を計算して下の支点の位置が得られる。下のばねの長さはしかる後に求められる事になるから，此の場合には下のばねの加工が一番後に残る事になる。

次に組立て終つた振子について，廻転軸の傾斜と週期を変える場合の平衡について考えて見る。

iia）上部支点 A の位置をずらせて廻転軸の傾斜を変える場合について考えて見る。Fig. 6 において D は固定の位置 A′ は廻転軸が鉛直の場合の上の支点の位置とし，A′ を座標の原点とする。廻転軸の傾斜を変えるには，支点は A′ から ω の角（調節ねどの走向によつて決る）

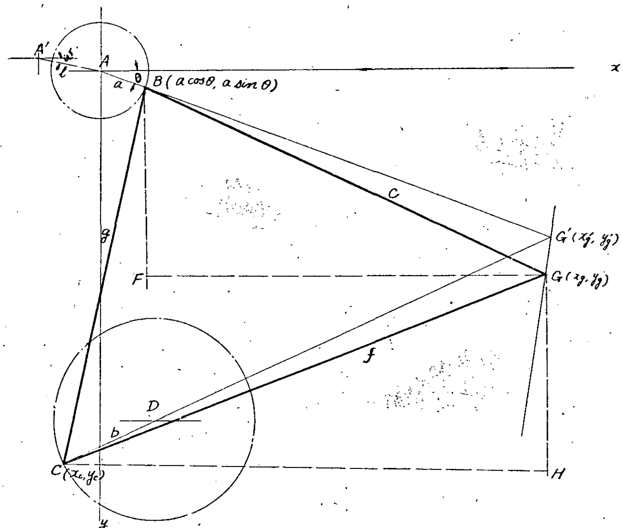

Fig. 6

をなして A の位置えねぢ進めたとする。$AA'=l$ とすると，A を新しい座標の原点として考えた D の座標は D ($d-l\cos\omega=D_x$, $h-l\sin\omega=D_y$) となる。新しい姿勢においては

$$円\ D:\quad (x_c-D_x)^2+(y_c-D_y)^2=b^2 \tag{9}$$

$$\Delta BCE:\quad (x_c+a\cos\theta)^2+(y_c-a\sin\theta^2)=g^2 \tag{10}$$

両式から

$$y_c=\xi-\eta x_c,\quad \xi=\frac{g^2+D_y^2-a^2-b^2+D_x^2}{2\,(D_y-a\sin\theta)},\quad \eta=\frac{D_x+a\cos\theta}{D_y-a\sin\theta}$$

(9) 式より

$$\begin{cases} x_c=\dfrac{D_x+\eta\,(\xi-D_y)\pm\sqrt{\{D_x+\eta(\xi-h)\}^2-(1+\eta)^2\{D_x^2+(\xi-D_y)^2-b^2\}}}{1+\eta^2} \\ y_c=\xi-\eta x_c \end{cases}$$

$$\overline{CDG'}:\quad y=\frac{D_y-y_c}{D_x-x_c}\,x+\frac{y_cD_x-x_cD_y}{D_x-x_c} \tag{11}$$

$$\overline{ABG'}:\quad y=\tan\theta\cdot x \tag{12}$$

(11), (12) より，

$$G'\ (x_g',\ y_g'):\ \tan\theta\cdot x_g'=\frac{D_y-y_c}{D_x-x_c}\,x_g'+\frac{y_cD_x-x_cD_y}{D_x-x_c}$$

$$x_g'=\frac{D_xy_c-D_yx_c}{(D_x-x_c)\tan\theta+y_c-D_y} \tag{13}$$

ΔBGF において

$$(x_g-a\cos\theta)^2+(y_g-a\sin\theta)^2=c^2 \tag{14}$$

ΔCGH において

$$(x_g+x_c)^2+(y_c-y_g)^2=f^2 \tag{15}$$

(14), (15) 両式から

$$y_g=\lambda-\mu x_g,\quad \lambda=\frac{a^2+f^2-c^2-x_c^2-y_c^2}{2\,(a\sin\theta-y_c)},\quad \mu=\frac{x_c+a\cos\theta}{a\sin\theta-y_c}$$

(15) 式から

$$x_g=\frac{-\{x_c+\mu\ (y_c-\lambda\}\pm\sqrt{\{x_c+\mu\ (y_c-\lambda)\}^2-(1+\mu^2)\{x_c^2+(y_c-\lambda)^2-f^2\}}}{1+\mu^2}$$

新しい姿勢で平衡が保たれるのは

$$x_g=x_g'$$

即ち

$$\frac{D_x y_c-D_y x_c}{(D_x-x_c)\tan\theta+y_c-D_y}$$
$$=\frac{-\{x_c+\mu(y_c-\lambda)\}\pm\sqrt{\{x_c+\mu\ (y_c-\lambda)\}^2-(1+\mu^2)\{x_c^2+(y_c-\lambda)^2-f^2\}}}{1+\mu^2} \qquad (16)$$

を満足する様な θ の値の時に限られる。

從つて上の支点 A をずらせて廻転軸の傾斜を変えた場合には，(16) 式より θ の値を求め，之から平衡位置を求める事が出来る。

iib)　振子台を傾斜させて週期を変えようとする場合

此の場合には Fig. 6 において座標原点 A の周りに α なる角だけ AD が転廻したと同等になる。從つて D の新しい位置は D ($d\cos\alpha+h\sin\alpha=D_x$, $-d\sin\alpha+h\cos\alpha=D_y$) となる。從つて前項の D_x, D_y の代りに D の上記の座標を入れれば，前項と同様になり，或る一つの傾斜角即ち D の一つの座標につき前項と同様の操作によつて平衡の位置を得る事が出来る。

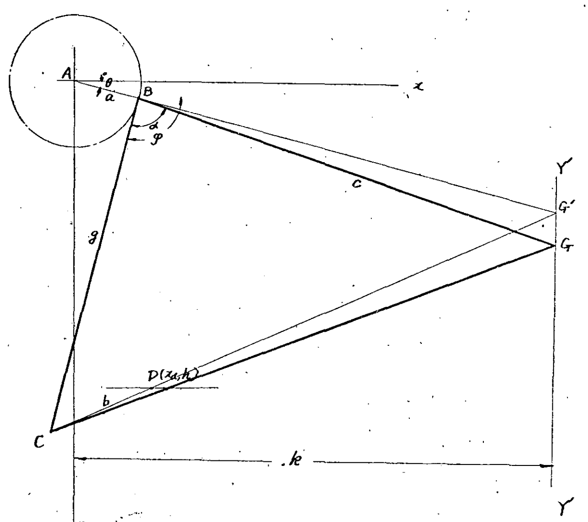

Fig. 7

iic)　最後に AB, CD の長さを一定にし，且つ重心の x 座標 $y_g=k$ (const.) を与え，D 点の x 軸方向のみの移動で任意の週期を得，且つ平衡を保たせる場合。

先ず Fig. 7 に於て振子の形造る ΔBCG が G を Y′Y′ 軸上に保ち，B を A を中心とし a，半径とする円周上に置いたまゝ移動する場合の C の軌跡を考えると

$$x_c=a\cos\theta+g\cos\varphi \qquad (17)$$
$$y_c=a\sin\theta+g\sin\varphi \qquad (18)$$
$$k=a\cos\theta+c\cos(\varphi-\alpha) \qquad (19)$$

(19) より

$$k-a\cos\theta=c\,(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha) \qquad (20)$$

(20), (17), (18) より

$$x_c\cos\alpha+y_c\sin\alpha=a\cos(\alpha-\theta)+g\frac{k-a\cos\theta}{c}$$

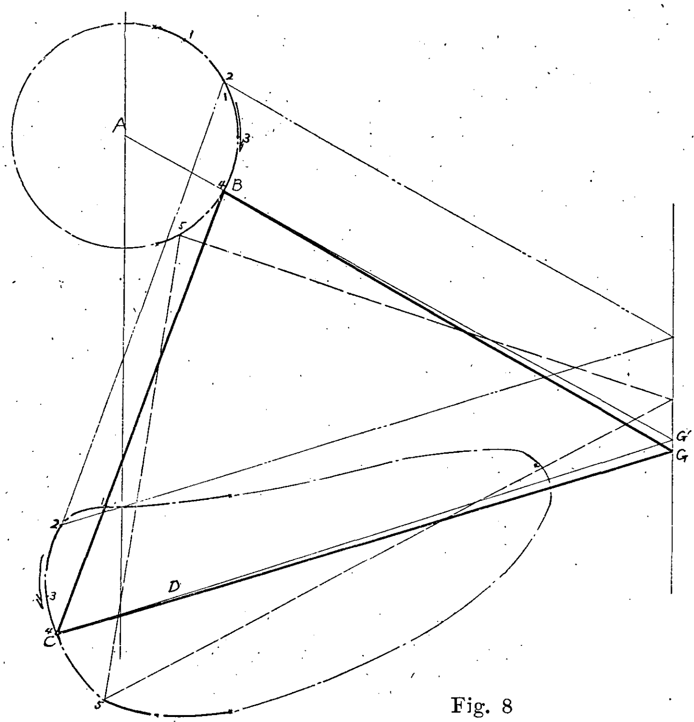

Fig. 8

即ち C は θ を parameter とし，

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=a\cos(\alpha-\theta)+g\frac{k-a\cos\theta}{c}$$

なる直線上にあり，B($a\cos\theta$, $a\sin\theta$) から g の距離にある。Fig. 8 は実際の振子の寸法に基いて上記 C の軌跡を画いたものである。

さて $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ が与えられた長さ a, b で，且つ振子が平衡の位置にある場合には，Fig. 7 に基き，次の關係式が得られる。

$$x_c\cos\alpha+y_c\sin\alpha=a\cos(\alpha-\theta)+g\frac{k-a\cos\theta}{c} \qquad (21)$$

$$(x_c-a\cos\theta)^2+(y_c-a\sin\theta)^2=g^2 \qquad (22)$$

$\overline{\mathrm{CDG'}}$ $\quad (y_c-k\tan\theta)\,x+(k-x_c)\,y+(x_c\,k\tan\theta-y_c\,k)=0$

$$(y_c-k\tan\theta)\,x_d+(k-x_c)\,h+(x_c\,k\tan\theta-y_c\,k)=0 \qquad (23)$$

$$(x_c-x_d)^2+(y_c-h)^2=b^2 \qquad (24)$$

之等の式から

$$y_c=\frac{-k_3(k\tan\theta-h)-\cos\alpha\,(k\,h-k\tan\theta\cdot d)}{x_d\cos\alpha-k\cos\alpha-k\sin\alpha\tan\theta+h\sin\alpha} \qquad (25)$$

$$x_c=-\tan\alpha\cdot y_c+\frac{k_3}{\cos\alpha} \qquad (26)$$

但し，$k_3=a\cos(\alpha-\theta)+g\dfrac{k-a\cos\alpha}{c}$

$$2(x_a-a\cos\theta)\,x_c-2\,(a\sin\theta-h)\,y_c-x_a^2=g^2-b^2-a^2+h^2 \tag{27}$$

(25)，(26) 式と (27) に代入して得られる式は θ を媒変数とする x_a の三次式であるから，x_a の少くとも一つの根は実根である。此の根と x_{a1} とすれば

$$x_{a1}=f\,(\theta)$$

で，即ち一つの θ の値に対し必ずそれに対応する x_a の値を得るから D を此の (x_a, h) の位置に齎せば平衡が得られる事になる。

以上に述べた事を取まとめると，従来ともすると不分明のまゝ行われて居た水平振子の組立てに一つの目安を与え，尚ほ廻転軸の傾斜によつて週期を変える場合の振子の平衡状態をも解明したものであつて，

(i) 与えられたばねの長さ，与えられた支点位置での振子の平衡位置を求めたが，此の条件の下では，予め推定して置いた設計面上の重心位置からずれて眞の重心位置（重心を置くべき位置）が求められた。全部品の出来上り後に組立てる場合に相当し，或いは組立の諸關係位置に影響するおそれがある。

(ii) 前項の欠点を除くよう，重心位置の水平座標（横座標）を設計図面上に予想したものから狂はないようにする爲，上ばねの長さ，上部支点の位置を与えて，平衡狀態を保つべき下ばねの長さ，下部支点の位置を求めた。此の方法に依る場合には振子の重心位置を求めた後，下部支点の位置を求めて孔明け，下ばねの長さの加工をしなければならない。

(iii) 週期を変える爲に上部支点を前にせり出して廻転軸の傾斜を変えた場合の振子の平衡位置を求めた。

(iv) 振子架台を傾斜させ週期を変えようとする場合も前と同様にして振子の平衡位置を求める事が出来る。

(v) 最後に下部支点の水平移動のみで週期を変える場合上部ばねの走向と関連して下部支点を置くべき位置を求めた。

勿論以上は板ばねを用いた振子で，板ばねは鉛直方向には殆ど剛体と見做されるから，たとえ多少平衡位置から狂つて居ても，止めねぢをしつかり締めてしまえば差支えないが，万一上下を細い針金を吊線にして吊ろうと云う場合があるとすると，以上に述べた平衡位置を求めると云う事が極めて重大となるわけである。

以上は初め工作課長矢亀記一技官の示唆によつてはじめたもので，同技官ならびに設計課長吉成邦雄技官の御教示，御指導によつたもので，尚ほ本台地震課村井五郎技官の御助力を多とするものである。終りに諸氏に対し厚く感謝する次才である。