不均質媒質に於ける境界波及び横波型表面波に就て

本　間　正　作*

(昭和 19 年 4 月 18 日受領)

§1. **題　意**　二つの相異つた媒質が境を接して居る時，この境界面に沿ふて波動が傳播し，その振幅は境界面附近で特に發達し，それより遠ざかるに從つて急に減小するものがあり得る事は彈性波に就ては Sotneley(1) に依り詳細に研究された所である。二媒質が直接相接しないで中間層がある場合にも斯様な境界波が存在し，波長が中間層の厚さに較べて十分大きい時には中間層が無く直接兩側の媒質が接觸してゐる時と殆ど同じになる。(2) 故に中間層内の物性(彈性率や密度)の分布は問題にならない。地震關係以外でも境界波が重要な役割をなして居る事は申す迄もない。之等を通覽する　物性分布の不連續が伴つてゐて，之が重要な要件であるかの如くに見える。(3)それでは——媒質より他媒質への物性の變化が非常に滑かに變化して居る場合——即ち物性分布の函數が十分多數回微分しても不連續が現はれない場合——には變化の劇しい中間層の區域に勢力が集中した境界波の如きものが存在し得ないであらうか。換言すれば，境界波の存在に對し物性分布の不連續が果して必須な條件であらうか。この疑問の解決は境界波と言ふものの本質を理解する上に重要なるのみでなく，種々の實際問題の解釋に當つて頗る緊要なものと思はれる。

本文に述べる事はこの疑問を解決するには到つて居らず，寧ろ問題を提出したに留るものであるが，一つの例を以てこの問題を吟味して見度い。この例は又 E. Meissner が論じた様な不均質彈性體の表面を傳はる横波型の表面波の問題にも連關してゐて，其處にも多少注目すべき事柄があるから後半に述べて置いた。

§2. **密度が變化してゐる中間層に沿ふ境界波**　嘗て Stoneley (4) は一つの媒質の內部に，ある厚さの異つた彈性の層が挾つて居る時，この層附近に勢力が集中し，層に對して SH 波的振動をする境界波の存在條件を吟味した。この様な內部層に於ける Rayleigh 波型の境界波に就ては妹澤

---

* 中央氣象臺

(1) R. Stoneley, Elastic Waves at the Surface oi Separation of two Solids, Proc. Roy. Soc. Lond 106 (1924) 416. 其後の發展は妹澤，金井兩博士に依る。ThP Formation Boundary Waves at the Surface of a Discontinuity within the Earth's Crust, I., 震研彙報 16 (1938) 504, II., 同上 17 (1939) 525. 及び The Range of Possible Fxistance of Stoneley Waves, and Some Related Problems, 同上 17 (1939) 1.

(2) 筆者，Rayleigh 波及び Stoneley 波に就て，氣象集誌. II 17 (1939) 442.

(3) 表面波と言ふものも，境界波の特殊な場合である事は申すまでもない。

(4) R. Stoneley, 前出論文の後半。

博士(1)により研究せられた。之等の研究に依ると何れの境界波も存在するが，餘り長波長のものは不安定になる傾向があつて短い波長の方なら安定である事が知れたのである。

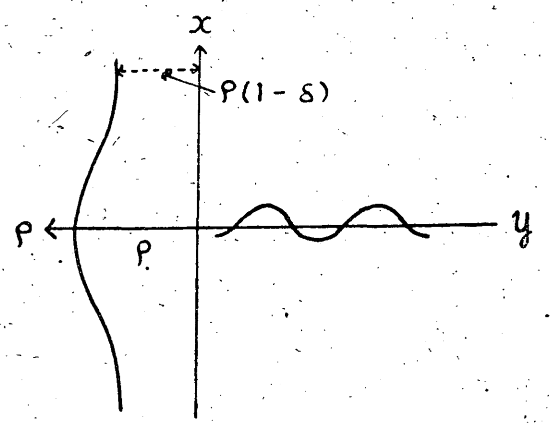
この場合中間層の物性とその兩側の物性とが連續的に變化して，しかも物性そのものの値許りでなく，場所に對する微分係數も亦十分高次のもの迄連續であつても，矢張り境界波は存在するかどうかが問題となる。玆で取扱ふのは特に Stoneley の場合に相當する様な横波型の境界波に限ることにする。そして彈性率 μ は不變で，密度 ρ が x 方向に變化して居るものとしてその分布を

$$\rho=\rho_0\{1-\delta\, tgy^2(\sigma x)\},\qquad (2\cdot1)$$

但し，$|\delta|<1$

で與へる。玆に ρ_0 δ, σ は何れも常數である。即ち $x\to\pm\infty$ では $\rho=\rho_0(1-\delta)$で，その中間 $x=0$ 附近では ρ の不均質性劇しく，その最大値（$\delta>0$ の時），又は最小値（$\delta<0$）が ρ_0 に當る。(第1圖）境界波は y 方向に傳播し變位 u は x 及び y に垂直な成分のみ存在するとして運動方程式は

第　1　圖



$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).\qquad (2\cdot2)$$

$u\infty e^{i\alpha y-ipt}$ と假定すると (2) は

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{p^2\rho}{\mu}-\alpha^2\right)u=0.\qquad (2\cdot3)$$

今

$$f=tgh(\sigma x)\qquad (1>f>-1)\qquad (2\cdot4)$$

とおくと，(2·1) は

$$\rho=\rho_0(1-\delta f^2)\qquad (2\cdot5)$$

となり，

$$\frac{df}{dx}=\sigma(1-f^2),$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{d}{df}\left\{\frac{df}{dx}\cdot\frac{du}{df}\right\}=\sigma^2\left\{(1-f^2)^2\frac{d^2u}{df^2}-2f(1-f^2)\frac{du}{df}\right\},$$

であるから (2·3) は

(1) K. Sezawa and G. Nishimura, Rayleigh-type Waves propagated along an Inner Stratum of a Body. 震研彙報 5 (1928) 85. K. Sezawa and K. Kanai, Requisite Condition for Rayleigh-waves for Transmission through an Inner stratum of the Earth. 同上 17 (1939) 179.

$$(1-f^2)^2\frac{d^2u}{df^2}2f(1-f^2)\frac{du}{df}+\left\{\frac{p^2\rho_0}{\sigma^2\mu}(1-\delta f^2)-\frac{a^2}{\sigma^2}\right\}u=0.$$

或ひは m, n を實數として

$$\frac{p^2\rho_0}{\sigma^2\mu}-\frac{a^2}{\sigma^2}=n(n+1)-m^2, \tag{2·6}$$

$$\delta\frac{p^2\rho_0}{\sigma^2\mu}=n(n+1) \tag{2·7}$$

と置けるものとすれば，上の微分方程式は

$$(1-f^2)\frac{d^2u}{df^2}-2f\frac{du}{df}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-f^2}\right\}u=0 \tag{2·8}$$

となり，之は Legenbre の陪函數の方程式である。$1>f>-1$ の場合に之を滿して且つ m, n の實數値に對して實數になる特解として

$$S_n^m(f)=(1-f^2)^{\frac{m}{2}}\cdot F\left(\frac{-n+m}{2}\ \frac{n+m+1}{2},\ \frac{1}{2};f^2\right), \tag{2·9}$$

$$T_n^m(f)=(1-f^2)^{\frac{m}{2}}\cdot f\cdot F\left(\frac{-n+m+1}{2},\ \frac{n+m+1}{2},\ \frac{3}{2};f^2\right) \tag{2·10}$$

の2つがあり,(1) 前者は f の偶函數であるから $x=0$ 面に對して對称的であり，後者は奇函數であるから反對稱であつて，之等は互に独立な解となる。

超幾何函數に關する

$$E(\alpha,\ \beta,\ \gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\cdot F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma;x)$$

なる關係(2)を用ひる事により，容易に

$$S_{-n-1}^m(f)=S_n^m(f), \qquad T_{n-1}^m(f)=T_n^m(f) \tag{2·11}$$

なる事が分るから，$m\geqq 0$ と考へて置いてもさしつかへない。又

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;x)=F(\beta,\ \alpha,\ \gamma;x)$$

である事から

$$S^m_{-n-1}(f)=S^m_n(f), \qquad T^m_{-n-1}(f)=T^m_n(f) \tag{2·12}$$

なる事が分るから，$h\geqq-\frac{1}{2}$ と考へて置いても一般性を失はない。

---

(1) $(1-f^2)^{\frac{m}{2}}=e^{\frac{m}{2}}\log(1-f^2)$ にて $\log(1+f^2)$ は主値を採る。

普通使ふ Legendre の陪函數 $P_n^m(f)$, $Q_n^m(f)$ の $1>f>-1$ の範圍に於ける定義は Hobson に從へば

$$P_n^m(f)=\frac{2^m\cos\left(\frac{n+m}{2}\pi\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}S_n^m(f)+\frac{2^{m+1}\sin\left(\frac{n+m}{2}\pi\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}T_n^m(f),$$

$$Q_n^m(f)=-\sqrt{\pi}\,2^{m-1}\sin\left(\frac{n+m}{2}\pi\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}S_n^m(f)+\sqrt{\pi}\,2^m\cos\left(\frac{n+m}{2}+1\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}T_n^m(f)$$

である。(E. W. Hobson; The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics §.114, 227, §.145, 228)

(2) Whittaker and Watson; Modern Analysis 2版 280頁。玆で $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}=e^{(\gamma-\alpha-\beta)\log(1-x)}$ で $\log(1-x)$ はその主値を採るものである。

扨て，ここで欲しいのは $f\to\pm 1$, 卽ち $f^2\to 1$ に於て 0 になる様を u である。其處で $f^2\to 1$ に於ける模樣を調べる。

一般に $x\to 1$ に於て $R(\alpha+\beta-\gamma)>0$ なら

$$p(\alpha,\ \beta,\ \gamma;x)\to\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta},$$

$\alpha+\beta-\gamma=0$ なら

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ )\to\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\log\left(\frac{1}{1-x}\right) \tag{2·13}$$

なる關係がある[1] $S_n^m(f)$ に當てはめると，$\alpha+\beta-\gamma=m$ であるから，$m>0$ なら

$$S_n^m(f)\to\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{-n+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m1}{2}\right)}(1-f^2)^{-\frac{m}{2}},$$

$m=0$ なら

$$S_n^0(f)\to\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\log\left(\frac{1}{1-f^2}\right)$$

となる。從つて一般に之等は發散するが，特別な場合として收斂するのは $\frac{-n+m}{2}$ が負の整數或ひは 0 となり，この爲 $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-n+m}{1}\right)}=0$ となる場合である。實際この時には (2·9) の右邊に於ける超幾何級數は有限項で終り，所謂 f^2 に關する Jacobi の多項式となるから，之に $(1-f^2)^{\frac{m}{2}}$ が掛つて $m>0$ なら $S_n^m(f)$ が $f^2\to 1$ で 0 となる。

同様に $T_n^m(f)$ に就ては矢張り $\alpha+\beta-\gamma=m$ であるから，$m>0$ なら $f^2\to 1$ で

$$T_n^m(f)\to\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{-n+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}\cdot f\cdot(1-f^2)^{\frac{m}{2}},$$

$m=0$ なら

$$T_n^m(f)\to\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot f\cdot\log\left(\frac{1}{1-f^2}\right)$$

であるから $\frac{-n+m+1}{2}$ が負の整數か 0 の場合に限つて收斂し，$m>0$ なら $f^2\to 1$ で $T_n{}^m(f)$ が 0 となる。

---

(1) Whittaker and Watson; 前揭 293 頁。

次に $x\to\pm\infty$ 即ち $f^2\to1$ で彈性應力が 0 である條件を調べよう。之は $\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}=\sigma\mu(1-f^2)\dfrac{\partial u}{\partial f}$ $=0$ で與へられる。夫故 $f^2\to1$ で

$$(1-f^2)\frac{\partial u}{\partial f}=0 \tag{2·14}$$

$S_n{}^m(f)$ に就ては

$$(1-f^2)\frac{dS_n{}^m(f)}{df}=\frac{n+m+1}{f}\sqrt{1-f^2}S^{m+1}_{n+1}(f)-\frac{1}{f}\{(n+m+1)-(n+1)f^2\}S_n{}^m(f)^{(1)} \tag{2·15}$$

となる。$S_n{}^m(f)$ は $f^2\to1$ で 0 となる。又 $\dfrac{-n+m}{2}$ が負の整數か 0 だから $\dfrac{-(n+1)+(m+1)}{2}$ $\left(=\dfrac{-n+m}{2}\right)$ が亦負の整數か 0，となり，從つて $S^{m+1}_{n+1}(f)$ も $f^2\to1$ で 0 となる。故に右邊全體も $f^2\to1$ で 0 となる。同樣にして

$$(1-f^2)\frac{dT_n{}^m(f)}{df}=\frac{n+m+2}{2}\sqrt{1-f^2}T_{n+1}{}^{m+1}(f)-\frac{1}{f}\{(n+m+1)-(n+1)f^2\}T_n{}^m(f). \tag{2·16}$$

右邊は $\dfrac{-n+m+1}{2}$ が負の整數か 0，從つて $\dfrac{-(n+1)+(m+1)+1}{2}$ も亦負の整數或ひは 0 である時，$f^2\to1$ で 0 となる。

以上に依り s を 0 又は任意の正の整數とした時，$m>0$ とすると，$n=m+2s$ の時 $S_n{}^m(f)$，$n=m+2s+1$ の時 $T_n{}^m(f)$ の形の境界波が成り立つ事が分る。從つて一つの m に對し最低の n は m であり，あらゆる m に對して最低の n は 0 である。

之までは (2·7) の n を實數としてあつたから $n(n+1)$ の最低値は $-\dfrac{1}{4}$ で，實際には上述の如く 0 であるから $\delta\dfrac{p^2\rho_0}{\sigma^2\mu}>0$ で，$\delta<0$ の場合，特に $\delta\dfrac{p^2\rho_0}{\sigma^2\mu}<-\dfrac{1}{4}$ の場合は全然含まれてゐない。$\delta\dfrac{p^2\rho_0}{\sigma^2\mu}<-\dfrac{1}{4}$ の範圍を吟味するには $n=-\dfrac{1}{2}+i\nu$ (ν 實數) と置けば，$n(n+1)=-\nu^2-\dfrac{1}{4}$ で $-\dfrac{1}{4}$ 以下の範圍になる。この時も (2·9)，(2·10) と同じく (2·8) の特別解として $f^2<1$ の範圍では

$$S^m_{-\frac{1}{2}+i\nu}(f)=(1-f^2)^{\frac{m}{2}}F\left(\frac{\frac{1}{2}-i\nu+m}{2},\ \frac{\frac{1}{2}+i\nu+m}{2},\ \frac{1}{2};\ f^2\right) \tag{2·17}$$

---

(1) $\dfrac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$ 及び $F(\alpha,\beta+1,\gamma;x)-F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\dfrac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$. (Whittaker and Watson, 前掲 273 頁及び 290 頁) 之等より

$\dfrac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\dfrac{\beta}{x}F\{(\alpha,\beta.\gamma;x)-F(\alpha,\beta,\gamma;x)\}=\dfrac{\alpha}{x}F\{\alpha+1,\beta,\gamma;x)-F(\alpha,\beta,\gamma;x)\}$ となる。

この公式を使つて容易に導ける。

$$T^m_{-\frac{1}{2}+\nu}(f)=(1-f^2)\cdot f\cdot F\left(\frac{\frac{3}{2}-i\nu+m}{2},\ \frac{-\frac{1}{2}+i\nu+m}{2}+1,\ \frac{3}{2};\ f^2\right). \tag{2·18}$$

(2·12) に依り，之等の解は m の偶函數であるから $m\geqq 0$ と考へてもよい。$f^2=1$ に於ける狀態を調べる爲に $\lim_{f^2\to 1} S^m_{-\frac{1}{2}+i\nu}(f)$ が存在すると假定して調べると，之は $\lim_{f^2\to 1}(1-f^2)^{\frac{m}{2}}\cdot F\left(\frac{\frac{1}{2}-i\nu+m}{2},\ \frac{\frac{1}{2}+i\nu+m}{2},\ \frac{1}{2};\ 1\right)$ であるから

$$\lim_{f^2\to 1} S^m_{-\frac{1}{2}+i\nu}(f)\to\lim(1-f^2)^{\frac{m}{2}}\left[1+\frac{\left(\frac{1+2m}{4}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2}{1\cdot\frac{1}{2}}+\frac{\left\{\left(\frac{1+2m}{4}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{1+2m+2}{4}\right)^2+\left(\frac{\nu}{2}\right)^2\right\}}{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}+\cdots\cdots\right]$$

一方

$$\lim_{f^2\to 1} S^m_{-\frac{1}{2}}(f)\to\lim(1-f)^{\frac{m}{2}}\left[1+\frac{\left(\frac{1+2m}{4}\right)^2}{1\cdot\frac{1}{2}}+\frac{\left(\frac{1+2m}{4}\right)^2\left\{\frac{1+2(m+2)}{4}\right\}^2}{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}+\cdots\cdots\right],$$

であるが，前に證明した樣に $S^m_{-\frac{1}{2}}(f)$ は $-\frac{1}{2}=m+2s$ の如き正の整數 s が存在しない爲に $f^2\to 1$ で發散である。$\lim_{f^2\to 1} S^m_{-\frac{1}{2}+i\nu}(f)$ の右邊に現はれる級數の各項は $\lim_{f^2\to 1} S^m_{-\frac{1}{2}}(f)$ のものより何れも大であるから $\lim_{f^2\to 1} S^m_{-\frac{1}{2}+i\nu}(f)$ は 0 ならざる總ての ν に對して有限とはならない。$T_{-\frac{1}{2}+i\nu}(f)$ についても同じ樣な議論が成り立つ。夫故$\delta<0$の範圍では對稱的波動も反對稱的波動も成立しない。

最後に (2·6) 於ける m が純虛數なる場合が殘つてゐる。$m=i\mu$ (1) とおくと，矢張り

$$S_n^{i\mu}(f)=e^{\frac{i\mu}{2}\log(1-f^2)}F\left(\frac{-n+i\mu}{2},\ \frac{n+i\mu+1}{2},\ \frac{1}{2};\ f^2\right)$$

$$=\left[\cos\left\{\frac{\mu}{2}\log(1-f^2)\right\}+i\ \sin\left\{\frac{\mu}{2}\log(1-f^2)\right\}\right]F\left(\frac{-n+i\mu}{2},\ \frac{n+i\mu+1}{2},\ \frac{1}{2};\ f^2\right), \tag{2·19}$$

$$T_n^{i\mu}(f)=\left[\cos\left\{\frac{\mu}{2}\log(1-f^2)\right\}+i\ \sin\left\{\frac{\mu}{2}\log(1-f^2)\right\}\right]\cdot f\cdot F\left(\frac{-n+i\mu+1}{2},\ \frac{n+i\mu}{2}+1,\ \frac{3}{2};\ f^2\right) \tag{2·20}$$

なる特解が成立するが，之等は最早實函數であるとは言ひ切れない。然し原の微分方程式 (2·8) は實函數の微分方程式であるから $R\{S_n^{i\mu}(f)\}$, $R\{T_n^{i\mu}(f)\}$ 或ひは $I\{S_n^{i\mu}(f)\}$, $I\{T_n^{i\mu}(f)\}$ が夫々 (2·8) の解となり，夫等は f に關し夫々偶函數であるから，對稱及び反對稱波動を表はす事になる。そこで之等の解の $f^2\to 1$ に於ける狀況を調べる必要がある。この際 (2·13) の判定法を使はうと思ふと $\alpha+\beta-\gamma=i\mu$ 從つて $R(\alpha+\beta-\gamma)=0$ で都合が惡いが，(2·13) の一般化と見られる次の定理(2)に依ればよい。

(1) μ を使つたが，剛性率に將來紛れる虞れはない。

(2) Whittaker and Watson; 前掲，291 頁。

$$\lim_{x\to 1-0}\left[F(\alpha,\beta,\gamma;x)-\sum_{\rho=0}^{k}(-)^{\rho}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\rho)\Gamma(\gamma-\alpha+\rho)\Gamma(\gamma-\beta+\rho)\Gamma(\gamma)}{\rho!\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)\ (\beta)}(1-x)^{\rho+\gamma-\alpha-\beta}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

但し k は $k\leqq R(\alpha+\beta-\gamma)<k+1$ を滿足する整數である。今の場合 $k=0$ であるから

$$\lim_{x\to 1-0}\left[F(\alpha,\beta,\gamma;x)-\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\right]=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{2·21}$$

之を $S_n^{i\mu}(f)$ に當てはめると，

$$\lim_{f^2\to 1}\left[S_n^{i\mu}(f)-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(i\mu)}{\Gamma\left(\frac{-n+i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1+i\mu}{2}\right)}(1-f^2)^{\frac{i\mu}{2}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(-i\mu)}{\Gamma\left(\frac{-n-i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1-i\mu}{2}\right)}(1-f^2)^{\frac{i\mu}{2}}.$$

夫故 $\lim\limits_{f^2\to 1} S_n^{i\mu}(f)$ が存在するなら

$$\lim_{f^2\to 1} S_n^{i\mu}(f)=\sqrt{\pi}\left\{\frac{\Gamma(-i\mu)}{\Gamma\left(\frac{-n-i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1-i\mu}{2}\right)}(1-f^2)^{\frac{i\mu}{2}}+\frac{\Gamma(i\mu)}{\Gamma\left(\frac{-n+i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1+i\mu}{2}\right)}(1-f^2)^{-\frac{i\mu}{2}}\right\}$$

$$=\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(-i\mu)}{\Gamma\left(\frac{-n-i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1-i\mu}{2}\right)}e^{\frac{i\mu}{2}\log(1-f^2)}+\frac{\Gamma(i\mu)}{\Gamma\left(\frac{-n+i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1+i\mu}{2}\right)}e^{-\frac{i\mu}{2}\log(1-f^2)}\right\}. \tag{2·22}$$

Γ 函數は有限な點に 0 點はないから $\Gamma(\pm i\mu)\neq 0$. 又負の整數か 0 以外に ∞ となる點はないから，

$\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{-n-i\mu}{2}\right)}$, $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1-i\mu}{2}\right)}$, $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{-n+i\mu}{2}\right)}$, $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1+i\mu}{2}\right)}$ が 0 となるのは，n の虚數部分が $i\mu$ になる時か，$-i\mu$ になる時以外にはあり得ない。前者の場合には $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{-n+i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1+i\mu}{2}\right)}\neq 0$,

後者の場合には $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{-n-i\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1-i\mu}{2}\right)}\neq 0$ であるから，(2·22) の右邊は第一項と第二項が同時に 0 となる事は出來ない。又 (2·22) の右邊は實數部又は虚數部の中一方のみが 0 である事はあり得ない。夫は $R\{S_n^{i\mu}(f)\}$ も $I\{S_n^{i\mu}(f)\}$ も (2·8) の解であつて，しかも何れも f の偶函數の解だから之等は互に獨立ではなく，$R\{S_n^{i\mu}(f)\}\infty I\{S_n^{i\mu}(f)\}$ なる必要があるからである。夫故に結局 $R\{S_n^{i\mu}(f)\}$ も $I\{S_n^{i\mu}(f)\}$ も $f^2\to 1$ で 0 ではあり得ない。$T_n^{i\mu}(f)$ に就ても同様な議論が出來る。從つて可能なのは $\delta>0$ の場合で

$x=0$ 面に對稱的な波動を u_1，反對稱的な波動を u_2 とすると

$$u_1\infty(1-f^2)^{\frac{m}{2}}F\left(-s,\ m+s+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ f^2\right)$$

$$u_2 \infty (1-f^2)^{\frac{m}{2}} \cdot f \cdot F\left(-s,\ m+s+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ f^2\right)$$

なる形を有する。茲に m は正の實數，s は 0 又は正の整數で，$2s$ 又は $2s+1$ は夫々 u_1，u_2 なる波動の次數（節平面の數）を表はす。

次に分散曲線を調べる。(2·6)，(2·7) より

$$m^2 = \frac{4\pi^2}{\sigma^2 L^2}\left\{1-(1-\delta)\left(\frac{V}{V_s}\right)^2\right\} \tag{2·23}$$

$$m(n+1) = \delta\frac{4\pi^2}{\sigma^2 L^2}\left(\frac{V}{V_s}\right)^2 \tag{2·24}$$

但し L, V, V_s は夫々境界波の波長位相速度及び $x=0$ 附近に於ける横波の速度で，次の如く表はされる。

$$L=\frac{2\pi}{\alpha},\qquad V=\frac{p}{\alpha}\qquad V_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \tag{2·25}$$

n は u_1 に對しては $m+2s$，u_2 に對しては $m+2s+1$ である。(2·23)，(2·24) より n，m を消去し，

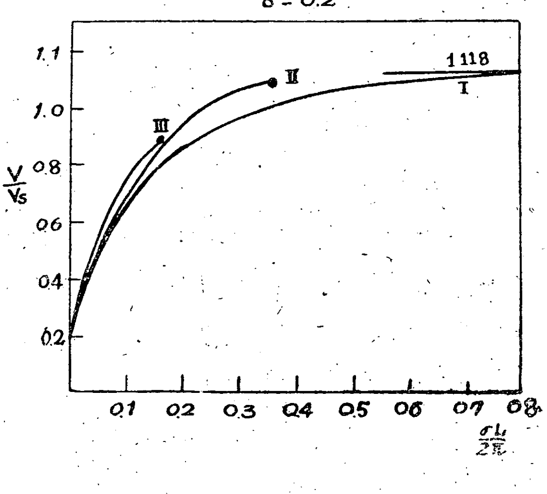
$$\xi=\left(\frac{2\pi}{\sigma L}\right)^2,\qquad \eta=\delta\left(\frac{2\pi}{\sigma L}\right)^2\left(\frac{V}{V_s}\right)^2=\delta\xi\left(\frac{V}{V_s}\right)^2 \tag{2·26}$$

と置くと

$$\xi=\tau(\tau H)+\frac{1}{2}+\eta^2+\frac{1-\delta}{\delta}\eta-\frac{1+2r}{2}\sqrt{1+4\eta^2} \tag{2·27}$$

この式により分散の様式を計算する事が出來る。但し τ は u_1 に對しては $2s$，u_2 に對しては $2s+1$ である。又 η の最低値は $\tau(\tau+1)$ と採ればよい。夫故 ξ の最低値も $\tau s=0$ の場合の外は 0 にならない

第　2　圖

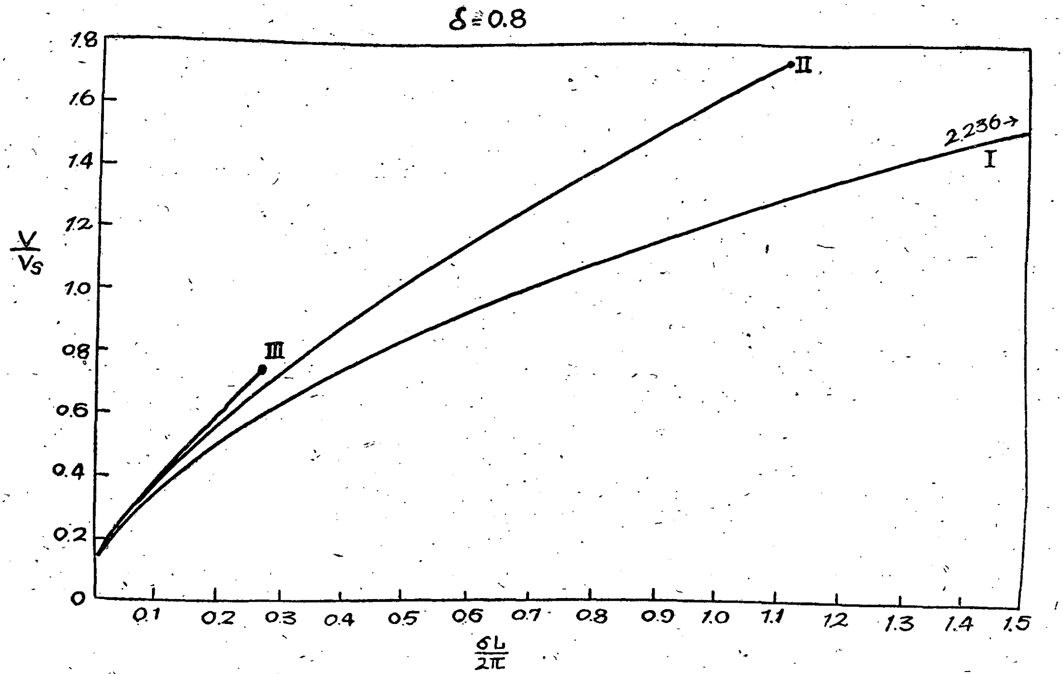


ず，長波長波動が陪振動には成立せぬ事が分る。$\eta\to\infty$ では $\xi\to\eta^2$ となるから，$\left(\dfrac{V}{V_s}\right)^2=\dfrac{1}{\delta}\cdot\dfrac{\eta}{\xi}\to\dfrac{1}{\delta}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}$ となる。$\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}=\dfrac{\sigma L}{2\pi}$ であるから波長が非常に短ければ s に關せず

$$\frac{V}{V_s}\to\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\sigma L}{2\pi}} \tag{2·27}$$

なる法則に從つて速度も c に收斂する。第 1 表及び第 2 圖には $s=0,\ 1$ に對する對稱性波動及び $s=1$ に對する反對稱性波動の分散曲線が揭げてある。$s=0$ に對する對稱性波動のみ無限に長い波長の境界波が成り立つけれ共，他のものでは或る波長以上のものは存在しない事が分り，從來の研究により得られて居る結果とよく一致してゐる。

第　4　圖



§. **不均質媒質に於ける橫波型表面波の存在條件に就て**　既に §1 に述べた様に半無限彈性體の物性が表面からの距離の函數である場合に，その自由表面附近にのみ運動勢力の集中してゐる波動に關しては寡からざる研究が發表されてゐるが，[1] 夫等を通覽するに，Love [2] が初めて取扱つた場合の様に彈性體中に不連續面が存在する場合に非ざれば必ず表面より非常に遠い場所で彈性率 μ や密度 ρ（少く共彈性率 μ）の値が無限大の値を採る様な假定の下に解かれてゐるのを見るのである[3]。この事實は一應注意に値するもので，この爲に表面より距つた場所に於ける波の振幅は非常

第 1 表

δ=0.2						δ=0.5						δ=0.8					
I		II		III		I		II		III		I		II		III	
$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$	$\frac{\sigma L}{2\pi}$	$\frac{V}{Vs}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0163	0.282	0.0165	0.286	0.0168	0.291	0.0167	0.183	0.01695	0.186	0.01725	0.189	0.0168	0.145	0.0171	0.148	0.01735	0.150
0.0318	0.389	0.03275	0.401	0.0338	0.414	0.03325	0.258	0.0345	0.267	0.03565	0.276	0.03375	0.207	0.0349	0.214	0.0362	0.2215
0.08755	0.619	0.0642	0.556	0.0680	0.589	0.09975	0.446	0.0733	0.390	0.0764	0.418	0.104	0.367	0.0733	0.3175	0.0790	0.842
0.1355	0.742	0.116	0.733	0.0927	0.6875	0.166	0.574	0.141	0.563	0.1095	0.5135	0.177	0.484	0.150	0.4745	0.1155	0.428
0.187	0.838	0.133	0.7074	0.09705	0.703	0.2465	0.697	0.1635	0.6115	0.116	0.5305	0.2725	0.609	0.1765	0.521	0.122	0.445
0.233	0.901	0.150	0.823	0.102	0.722	0.325	0.7965	0.1445	0.674	0.123	0.5555	0.3725	0.721	0.214	0.585	0.130	0.463
0.265	0.938	0.162	0.849	0.107	0.738	0.3865	0.864	0.215	0.712	0.1305	0.569	0.455	0.804	0.239	0.626	0.139	0.480
0.3095	0.979	0.176	0.878	0.113	0.757	0.475	0.949	0.240	0.7575	0.1395	0.592	0.583	0.9225	0.2705	0.676	0.150	0.502
0.3735	1.023	0.1885	0.9035	0.118	0.774	0.612	1.060	0.264	0.800	0.1475	0.612	0.805	1.103	0.3025	0.725	0.159	0.5215
0.429	1.050	0.203	0.931	0.124	0.7915	0.737	1.142	0.293	0.849	0.1565	0.634	1.031	1.263	0.343	0.786	0.170	0.5435
0.478	1.068	0.220	0.9595	0.130	0.810	0.851	1.203	0.329	0.907	0.1665	0.658	1.258	1.406	0.3955	0.862	0.182	0.568
0.543	1.085	0.240	0.988	0.1365	0.8295	1.002	1.265	0.372	0.971	0.178	0.685	1.588	1.588	0.463	0.954	0.196	0.596
0.635	1.100	0.264	1.022	0.144	0.850	1.214	1.3295	0.431	1.056	0.191	0.715	2.090	1.810	0.5655	1.095	0.2124	0.6285
0.700	1.106	0.277	1.038	0.1475	0.860	1.357	1.357	0.466	1.102	0.198	0.730	2.4405	1.929	0.6315	1.182	0.221	0.645
0.786	1.111	0.292	1.054	0.152	0.8725	1.544	1.381	0.505	1.152	0.206	0.748	2.8905	2.044	0.713	1.286	0.232	0.666
0.910	1.115	0.3085	1.069	0.156	0.884	1.805	1.398	0.550	1.205	0.2145	0.767	3.494	2.140	0.815	1.412	0.243	0.687
1.117	1.117	0.337	1.083	0.161	0.896	2.228	1.409	0.601	1.260	0.2235	0.787	4.407	2.204	0.944	1.567	0.255	0.710
1.581	1.118	0.3365	1.090	0.163	0.902	3.161	1.4135	0.628	1.288	0.228	0.797	6.212	2.232	1.021	1.655	0.2615	0.722
∞	1.118	0.347	1.097	0.166	0.908	∞	1.414	0.657	1.314	0.233	0.808	∞	2.236	1.4075	1.751	0.268	0.735

に小さくなり，0に收斂するにも拘らず波動の總エネルギーが∞になり；而し實質的には成り立たない解が出たりするのである。(4)

今 $x \geqq x_0$ なる場所にのみ存在する半無限彈性體に於て彈性率 μ は一定で，密度 ρ は前節と同じく (2·1) 或ひは (2·5) で表はされる分布をしてゐる時，y 方向に進行するラブ波型表面波の存在するか否かを考へて見よう。この問題が從來の同種問題と非常に違つてゐる點は $\lim_{\mu x \to \infty} \mu$ が ∞ とはして居らない事である。

運動方程式は前と全然同じ變換に依つて (2·8) となるが，$x \to +\infty$ 卽ち $f \to 1$ で 0 に收斂する特別解として有效なのは

$$u=\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n,\ n+1,\ m+1;\ \frac{1-f}{2}\right)=\Gamma(1+m)P_w{}^{-m}(f) \qquad (3\cdot1)$$

であつて，(5) 之は $|1-f|<2$ の領域で收斂する。$f=1$ で $F=1$ であるから，玆で $u=0$ なる

---

(1) K. Aichi, On the Transversal Seismic Waves travelling upon the Surface of Heterogeneous Material, Proc. Phys.-Math. Soc. 4 (1922) 137.

E. Meissner, Elastischen oberflächen Querwellen, Vesh. 2. Inter. Kongr. f. tech. Mech. (1926). 3. これより先同氏は Vierteljahrsschrift. Naturf. Ges. Zürich 66 (1921) 181 に同樣な理論を發表したが彈性の深さに依る變化率の項が落ちてゐた。

K. Sezawa, A Kind of Waves transmitted over a Semi-infinite Solid Body of Varying Elasticity, 震研彙報 9 (1931) 310.

S. Sakuraba, A Contribution to the Theory of the Love Waves Propagating over a Semi-infinite Solid Body of Varying Elasticity, (I, II) 中央氣象臺歐文彙報 9 (1935) 221, 12 (1938) 167. この內 (II) はこの種の波の發生を取扱つたものとしては唯一である。

K. Sezawa and S. Kanai, On Shallow WaterWaves Transmitted in the Direction Parallel to a Sea Coast, with Special Refer to Love-waves in Heterogeneous Media, 震研彙報 17 (1939) 685.

筆者，不均質彈性體のラブ波型表面波に就て，氣象集誌 18 (1939) 84.

吉山良一，不均質球狀彈性體のラブ波，地震 10 (163) 272.

筆者，不均質彈性體の表面波に就て，驗震時報 10 (1940) 459.

この問題は海岸に浴ふて走る水波の問題と密接に關係してゐるが，彈性體を取扱つてゐない文献は省略する。又媒質內に物性分布の不連續面もある場合の文献も多いが省略する。Meissnor の波の實際的應用は B. Gutenberg に依り採り上げられ太平洋底を傳はる長週期表面波の解決に使はれた。

B. Gutenberg, Dispersion und Extinktion von seismischen Oberilächenwellen und Aufbau der obersten, Erdschichten Phys. Zs. 25 (1924) 377.

(2) A. E. H. Love, Some Problems of Geodynamics (1911).

(3) 球面上のラブ波の如き場合は別。(前掲，吉山良一博士，論文)

(4) K. Sezawa and K. Kanai, 前出 On Shallow Water Waves……

(5) この $P_n{}^{-m}(f)$ は E. W. Hodson $|f|<1$ の實數値に對する Legendre の陪函數を表はす。Hobson; 前掲，227 頁。

爲には $m>0$ であればよく，而もその時の應力 $\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}=\sigma\mu(1-f^2)\dfrac{\partial u}{\partial f}$ は

$$(1-f^2)\frac{d\mu}{df}=-m\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^{\frac{m}{2}}\left\{F\left(-n,n+1,m+1,;\frac{1-f}{2}\right)-\frac{n(n+1)}{2m(m+1)}(1-f^2)F\left(1-n,n+2,\ m+2;\frac{1-f}{2}\right)\right\} \tag{3.2}$$

より0となる。

波動の場に於ける運動エネルギーは

$$a=\mathrm{tgh}(\sigma x_0),\qquad (1>a>-1) \tag{3.3}$$

とおくと，$\int_0^\infty\left\{\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^{\frac{m}{2}}\right\}^2dx=\int_a^1\left(\frac{1-f}{1+f}\right)^m\frac{dx}{df}df=\frac{1}{\sigma}\int_a^1\frac{(1-f)^{m-1}}{(1+f)^{m-1}}df$ のオーダーとなるが，之は $m>0$ で有限である。從つて後は自由表面 $x=x_0$ 即ち $f=a$ に於ける境界條件

$$\left[\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_0}=0 \text{ 即ち } (1-a^2)\left[\frac{du}{df}\right]_{f=a}=0 \tag{3.4}$$

が滿足されゝば表面波が成立する筈である。

この場合に於いても $\delta<0$ では根がない事が言へる。$\delta<0$ の爲には前節に述べた樣に $0>n\geqq-\dfrac{1}{2}$ か n が $-\dfrac{1}{2}+i\nu$（ν は實數）かである。先づ初めの場合を考へると $F\left(-n,\ n+1,\ m+1;\dfrac{1-a}{2}\right)$ を $\dfrac{1-a}{2}$ の冪級數に展開した各項の係數は明らかに盡く正であるから

$$E\left(-n,\ n+1,\ m+1\ ;\frac{1-a}{2}\right)>0.$$

同樣に
$$F\left(1-n,\ n+2,\ m+2\ ;\frac{1-a}{2}\right)>0.$$

而して $n(n+1)$ は却つて負であるから (3.2) の右邊の{……}内は常に正である。夫故根はない。

次に $u=-\dfrac{1}{2}+i\nu$ であると

$$F\left(-n,\ n+1\ m+1;\ \frac{1-a}{2}\right)=1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\nu^2}{1.(m+1)}\left(\frac{1-a}{2}\right)+\frac{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\nu^2\right\}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\nu^2\right\}}{1.2.(m+1)(m+2)}\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\cdots\cdots>0.$$

同樣に $$F\left(1-n,n+2\ m+2\ ;\frac{1-a}{2}\right)=1+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\nu^2}{1.(m+2)}\left(\frac{1-a}{2}\right)+\frac{\left\{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\nu^2\right\}\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\nu^2\right\}}{1.2.(m+2)(m+3)}\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\cdots\cdots>0.$$

而して $n(n+1)=-\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2\right\}<0$ であるから矢張り(3.2)内{…}は常に正の實數となり，0と

はならない。(1) 夫故 $\delta<0$ では (3.4) を滿足する解が存在しない。從つて $\delta>0$ と考へて $n>0$ なる範圍で (3.4) の根を求めればよい。

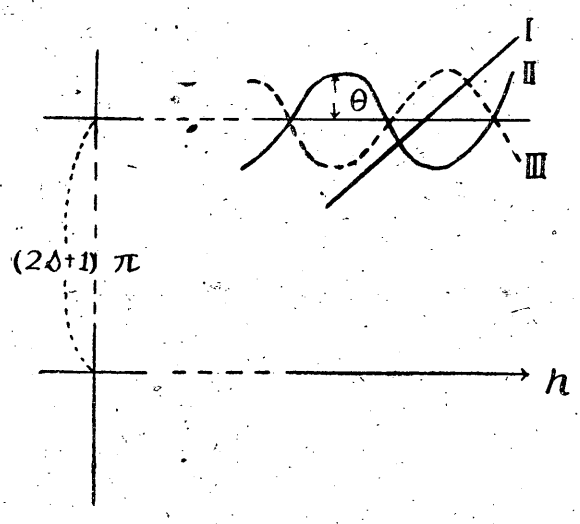
定つた a に對し色々の m を與へて，之に應ずる n を (3.4) の解なる如く求める事は一般に困難であるけれ共，例へば $a=0$ の樣な場合には，前節の對稱的波動 $u_1=S_n^m(f)$ がこの條件を滿足する事が明らかである。そして $s=0$ に對應する節平面なしの表面波の他に $s=1, 2\cdots\cdots$ に對應する高次の陪振動が存在して夫等には夫々 1, 2, …個の節平面が伴ふものである。分散曲線も前節のものと全然同一になる。$a=0$ でない場合でも定性的事情は變りないであらう。特に高次の分散曲線に對しては上記の樣な飛び飛びの陪振動の存在を窺ふ事が出來る。(1) Bholanath Pal に依ればｎが十分大なる時，$\dfrac{dP_n{}^{-m}(f)}{df}=0$ を滿足する n の實數根は第一近似的に

$$\cos\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\,n}{2}\right\}-\cos\theta.\left\{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\right\}=0 \quad (3.5)$$

で與へられる。(2) 玆に $\cos\theta=f$ である。

(3.5) を變形すると，

第　5　圖



$$\cos\left[\frac{1}{2}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\right\}+\frac{\theta}{2}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\right\}\right]$$
$$\times\cos\left[\frac{1}{2}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\right\}-\frac{\theta}{2}\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\right\}\right\}$$
$$=0.$$

夫故 s を以て十分大なる正の整數とした時

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\pm\theta\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{m\pi}{2}\right\}=(2s+1)\pi \quad (8.6)$$

(1) 一般に $m>0$ の時 $1>f>-1$ なる與へられた f に對し $P_n{}^{-m}(f)=0$ を滿足する n の複素根が存在せぬ事は Macdnald が證明した。(Hobson; 前掲，403頁)

この證明はそのまゝ $\dfrac{dP_n{}^{-m}(f)}{df}=0$ の複素根がない事を言うのにも使へる。$n=-\dfrac{1}{2}+iv$ はその特別な場合に當る。

(2) Hobson. 前掲 40頁。

を滿足する n が (3.5) の正根になる。この根は明らかに一つの s に對して一個乃至三箇づつ求まる（第8圖)。之は $a<0\left(\text{即ち}\ \theta>\frac{\pi}{2}\right)$ でも成立する事は面白い事實である。

この問題に對して之以上詳しく調べる事は困難であるけれ共，要するに $x\to\infty$ に於て彈性率 μ 等が ∞ になる樣な假定を置かなくても，Meissner 型の表面波が存在し得る點を特に明確にした積りである(1)。

§ 4. **結　論**　以上求べた所を要約すると，

i. Stoneley は內部に異層を挾んだ彈性體に於いて，層附近に勢力の集中した橫波型境界波の存在を證明したが，その樣な波の存在に對して層の物性がその兩側の彈性體の物性と割然と不連續面をなして違つてゐる事は必要でない。物性の移り變りを表はす函數が極めて滑らかであつても Stoneley の論じたと同性質の境界波が成り立つ。この事は一般に所謂不連續面に起る波動と言ふものに對する考へ方に對して，大いに反省を促すものと思はれる。何故ならば從來，波長に較べて中間の漸變層の厚さが十分薄ければ，其處を不連續面と考へてもよからうと言ふ位の餘り確實でない論法を以て物性の連續の問題が片付けられて居たからである。實際問題としては例へば地震學上の問題で本當の不連續面もあるにはあるだらうが，(2) さうでなく共比較的急劇に物性が變化して居る處に，この種の波動が存在すれば，種々の實體波がそこを通過する時，その一部が境界波に變じて實體波の波動勢力を吸收する事は十分豫想されるから Stoneley (3) や妹澤博士(4)により論ぜられた Stoneley 波の生成が P 波等の勢力を吸收する事と類似の波動減衰作用はもつと廣汎に行はれてゐるに違ひないのである。(5)而も短波長の波程吸收される機會の多い事は特に興呼ある點と思ふ。

ii. 不均質半無限彈性體の表面を傳はる Love 波型の表面波（Meissner の波）の議論に於いて從來いつも用ひられた假定として 彈性率が表面より十分遠方で ∞ となると言ふのは，必要條件ではない事が分つた。遺憾乍ら今の所實際問題に應用し得る樣な具體的な解を得るに到つてゐないが，彈性率が ∞ に增大する場合と，有限に止まる場合とで解の數値が違ふか違はないかと言ふ事を知る事は實用上極めて重要と思ふ。實際問題では彈性率が ∞ になる事はないし，

(1) 玆の假定の如く ρ が $x\to\infty$ に從つて減小する代りに μ が $x\to\infty$ に從つて增大する場合でも $\mu=\mu_0\times\{1+\delta\mathrm{tgh}(\sigma x)\}$ では $x\to\infty$ で有限な解にならないが $\mu=\mu_0\{1+\delta\mathrm{tgh}^2(\sigma x)\}$ なら有理な解の存在する可能がある。實際問題としてはこの方が面白いが之は今後の機會に讓る。

(2) 例へば色々の地層が全く不連續的に境を接する況狀を斷層崖等で実見し得る。

(3) R. Stoneley, 前揭。

(4) K. Sezawa and K. Kanai ; 前揭 The Formation of Boundary Waves…….

(5) 之とは別に実體波が波面を持つて不均質媒質中を進行する事による力學的減衰作用も考へられる。之については別に發表したが印刷はされていない。

境界値問題と言ふものは境界に於ける値をはつきり決めて明らかになるものだからである。夫故 $x\to\infty$ の μ が ∞ では應力が ∞ となつて成立しない解でも，μ が有限なら成立するかも知れないし，$x\to\infty$ で變位も應力も 0 なのに彈性體内全體の波動勢力の積分が ∞ となつて解が駄目になるかも知れない。

尙，この問題は種々の形の海岸に於いて，海岸に沿ふて傳はる淺海波，又は海岸の靜振の問題等(1)とも連關するもので，海底に深さの不連續面を置いたり，ずつと沖合で海の深さが無限に大きくなる事が必要か否かは（必要だとしても實際にはあり得ない）十分吟味を要する。

× × ×

最後に日頃御鞭韃御敎示に與る地震課長井上博士及び數學上の御相談を下さつた正野博士，廣野技師高木技師に感謝申上げる。又數値計算には地震課の齋藤光太郎君の御援助を得，圖版は同課の小林歌子孃を煩はした。併せてその勞に御禮致します。

（昭和 19 年 4 月　於 中央氣象臺地震課）

(1) S. Sakuraba; The Effect of Varying Depth on the Stability of Stationary Oscillations in a Lake or a Sea, 神戸海洋氣象台彙報 VI. (1935—38), 61.

G. R. Goldsbrough, The Seiches in an Ocean Surrounding an Island, Month. Not. Geophy. Suppl. 4 (1939), 404.

K. Sezawa and K. Kanai; 前掲 On Shallow Water Waves........