境界層に於ける波動の反射に就て

本 間 正 作*　長 宗 留 男*

§.1 緒　言　二つの媒質の境界に於ける波動の反射，透過の割合は入射波の波長に關係せず兩媒質の物性により決る。兩媒質の間に中間の轉移層がある場合には反射と透過の割合が波長により違つて來る事も既に計算されて居る(1)。處が入射波が正弦波的のものでなく任意の形のもの——例へば衝撃形——である場合は之を種々な波長の正弦波に分解すると各分解成分の反射透過の割合が夫々違つたものになる爲に反射波と透過波も形が崩れる事になる筈であるが，その樣な計算は餘り行はれて居ない樣であるから§.2に於ては或る例題についてこの計算を行ひ入射波の見掛け上の波長と境界層の厚さによつて反射波の大きさの受ける影響がどの樣に違ふかを調べた。但し茲では波形の變化については述べない。然し更によく考へるに二媒質間の物性の變化が連續的である許りでなく一媒質より他への物性變化の模樣が完全に數學的正則な函數で表はされる場合にも反射波が起るかどうかと云ふ事が問題になる。之は所謂不均質媒質內に於ける波動問題の一つに相當するものでその不均質性の分布が或る幅の地帶（即ち境界層に相當する箇處）は比較的集中してゐる時とゝを一方向きに通る波動の解を出す事は數學的には屢々論ぜられた所であるが，之は單に一方向きに通る樣な解を强いて置いたと云ふだけの事で果して反射的の波が生じないか否かは別の方面から調べなければ分る事ではないと思ふ。實際非常に長波長の波なら反射波が生じさうに考へられる。§.3には近似的方法にてこの問題を取扱つた。その結果フロントを持つた波（即ち既に運動を始めた部分と未だ波動の來着せざる部分との境界をなす不連續面を持つ波）の波頭がこの際に特殊な作用をなして居る事が窺知出來た。この種の問題を徹底的に解明するには尙ほ色々の見方や手段を通じて調べる事が出來，又夫が必要である。茲には上述の二つの見方のみを極く簡單に述べる。詳細な點や別の方面からの研究については近日，驗震時報誌上に於て發表する豫定である。

§.2 境界層より反射する波動に關する例題

不連續層に對して垂直に SH 的彈性波が進んで來るものとし，その方向を x 軸にとると波動方程式は

---

* 松代地震觀測所。

(1) Rayleigh: Theory of Sound, vol. 1, 235頁, 或ひは On Reflection of Vibrations at the Confines of two media between which the Transition is Gradual, Proc. Lond. Math. Soc vol. xl. (1880). 51 頁

新しくは 妹澤克惟•金井清: The Nature of Transverse Waves transmitted through a Discontinuty Layer. 震研時報 14 (昭和11年) 157—162頁.

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

となる。但し y は變位，剛性率は常數と考へ特に 1 とおく，ρ は密度で兩側の媒質內では一定，境界層內では x の函數とする。特に境界層內で ρ は $\frac{1}{x^2}$ に比例するものと考へ(1)，n を或る正の常數とすると $y\infty e^{ip(t-\eta)}$ として

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{n^2}{x^2}y=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

この一般解は

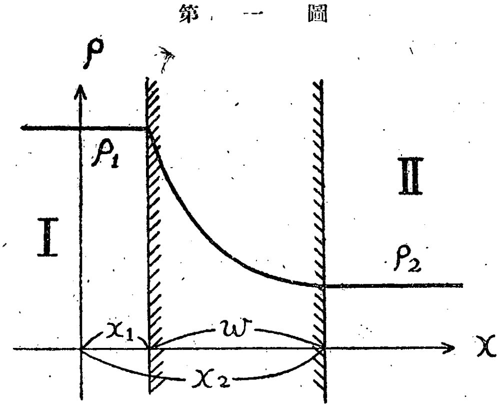
$$y=A'x^{\frac{1}{2}+im}+B'x^{\frac{1}{2}-im} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但し

$$m^2=n^2-\frac{1}{4} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

この境界層は $x=x_1$ 及び $x=x_2(x_2>x_1)$ の二平面間に挾まれて居り，その兩側には $x<x_1$ 側に密度 ρ_1, $x>x_2$ 側に密度 ρ_2 の一樣媒質があり，層內の密度は $x=x_1$ で $\rho=\rho_1, x=x_2$ で $\rho=\rho_2$ になつてゐるとする（第1圖）。入射波は $\rho=\rho_1$ なる媒質內より來るものとして，ここに於ける方程式は

第一圖



$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{n^2}{{x_1}^2}y=0,$$

從つて一般解は

$$y=Ae^{-in\frac{x-x_1}{x_1}}+B^{\,in\frac{x-x_1}{x_1}}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$=x_1$ にて變位と應力が連續なる條件より

$$A'{x_1}^{\frac{1}{2}+im}+B'{x_1}^{\frac{1}{2}-im}=A+B, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\left(\frac{1}{2}+im\right)A'{x_1}^{-\frac{1}{2}+im}+\left(\frac{1}{2}-im\right)B'{x_1}^{-\frac{1}{2}-im}=-\frac{in}{x_1}A+\frac{inB}{x_1}. \quad\cdots\cdots(6)$$

$$\theta=\frac{A-B}{A+B}$$

とおき (5), (6) を解くと

(1) 之は Lord Rayleigh の例題である（前揭）。以下の解法も大体 Rayleigh のものその儘であるが說明の便宜上茲に轉載した。

$$\frac{A'}{B'}=x_1^{-2im}\frac{im-in\theta-\frac{1}{2}}{im+in\theta+\frac{1}{2}}. \qquad \cdots\cdots(7)$$

次に $\rho=\rho_2$ なる媒質を考へるにこの中には透過した波だけしか無い筈であるから，(4)に相當して $y=A_1e^{-in\frac{x-x_2}{x_2}}$ となり，從つて θ に相當する値は 1 となる。故に (7) に相當する式として

$$\frac{A'}{B'}=x_2^{-2im}\frac{im-in-\frac{1}{2}}{im+in+\frac{1}{2}}. \qquad \cdots\cdots(8)$$

(7) と (8) より $\frac{A'}{B'}$ を消去して $x<x_1$ に於ける反射波の振幅を求めると，

$$\frac{B}{A}=\frac{1-\cos(2m\log\mu)-i\sin(2m\log\mu)}{-2(m-n)\sin(2m\log\mu)+2i(m+n)+2i(m-n)\cos(2m\log\mu)}=P+iQ \quad\cdots(9)$$

となる。但し $P,\ Q$ は實數部分及び虚數部分を示し，又

$$\mu=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{v_1}{v_2}\ .$$

である。但し $v_1,\ v_2$ は第一媒質及第二媒質中に於ける波動の速度である。第一媒質中に於ける波長を λ とすると

$$\lambda=\frac{2\pi x_1}{n}.$$

故に

$$n=\frac{2\pi x_1}{\lambda}=\frac{2\pi x_1\frac{x_2-x_1}{x_1}}{\lambda\frac{x_2-x_1}{x_1}}=\frac{2\pi(x_2-x_1)}{\lambda(\mu^{-1}-1)}.$$

然るに層の厚さを w とすると $w=x_2-x_1$ であるから

$$n=\frac{2\pi w}{(\mu^{-1}-1)\lambda}. \qquad \cdots\cdots(10)$$

第一媒質から色々の波長 λ の正弦波が入射した場合に於ける反射波の振幅は (10) に於て w/λ に色々の値を代入した時，(3) を參考にして (9) の右邊を計算すれば求まる。

玆では $\mu=\frac{1}{2}$ 即ち

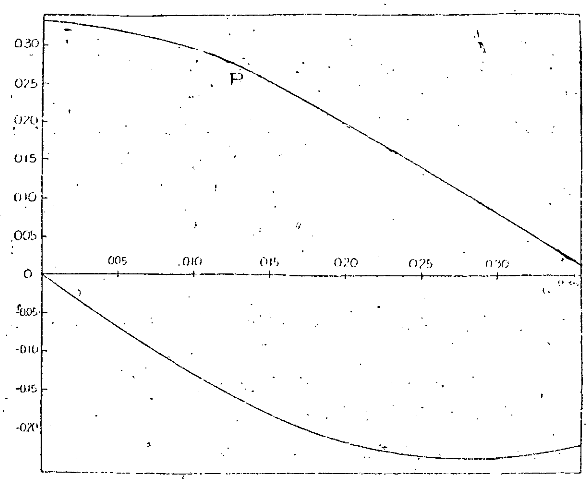
$$\rho_1=4\rho_2$$

として P と Q を計算すると第 2 圖の樣になる(1)。m は $n^2=\frac{1}{4}$ 即ち $w/\lambda=0.079592\cdots\cdots$ で 0 となり $w/\lambda<0.079592\cdots\cdots$ では虚數になる。從つて (9) に於て i が掛つた量が恒に虚數にな

(1) 實際の値は w/λ のもつと大きい範圍まで求めてあるが，玆には現在必要の範圍だけを圖示した。

と云ふわけではない事に注意を要する。

第　2　圖



扨て今入射波が正弦的でなく一般的のものとすると，之をフーリエ積分で表はし色々の波長の正弦型波動の聚合と見做し得，各エレメンタリーの正弦波の反射する分量が上の計算から分るから，反射波は正弦型波それだけの反射係數を乘じて置いて再びフーリエ積分的に寄せあつめれば得られる筈である。

一般に入射波の形を

$$y=f\left(x-x_1-\frac{px_1}{n}t\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

と置くとフーリエの定理により

$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\left(\frac{n}{x_1}\right)\int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{px_1}{n}\eta\right)\cos\left[\frac{n}{x_1}\left\{(x-x_1)-\frac{px_1}{n}(t-\eta)\right\}\right]d\left(\frac{px_1}{n}\eta\right)$$

となるから，各エレメンタリーの正弦波 $\cos\left[\frac{n}{x_1}\left\{(x-x_1)-\frac{px_1}{n}(t-\eta)\right\}\right]$ を (4) の實數部分に相當せしめると，

$$A=\frac{1}{\pi}f\left(\frac{px_1}{n}\eta\right)\cdot d\left(\frac{n}{x_1}\right)\cdot d\left(\frac{px_1}{n}\eta\right)$$

となる。從つて反射のエレメンタリー正弦波の振幅 B は，之に (9) の右邊を乘じたものになる。夫等の反射エレメンターリー正弦波を合成すると，反射波は

$$y=\Re\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos(2m\log\mu)-i\sin(2m\log\mu)}{-2(m-n)\sin(2m\log\mu)+2i(m+n)+2i(m-n)\cos(2m\log\mu)}$$

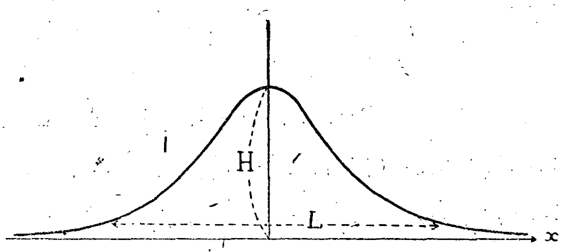
$$\times d\left(\frac{n}{x_1}\right)\int_{-\infty}^\infty f\left(\frac{px_1}{n}\eta\right)\exp i\left[\frac{n}{x_1}\left\{(x-x_1)+\frac{px_1}{n}(t-\eta)\right\}\right]d\left(\frac{px_1}{n}\eta\right)$$

$$=\Re\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(P+iQ)d\left(\frac{n}{x_1}\right)\int_{-\infty}^\infty f(\zeta)e^{i\frac{n}{x_1}(\xi-\zeta)}d\zeta.$$

但し
$$\xi=x-x_1+\frac{px_1}{n}t=x-x_1+v_1t\,,\qquad \zeta=\frac{px_1}{n}\eta$$
にして $\Re$ はその右にある量の實數部分を示す。

この y は更に
$$y=\Re\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(P+iQ)e^{i\frac{n}{x_1}\xi}\,d\left(\frac{n}{x_1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)e^{-i\frac{n}{x_1}\zeta}\,d\zeta$$
であるから，特に $f(\zeta)$ を ζ の偶函數なる如く與へた場合，即ち入射波が前後對稱な形の時には
$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Re\left[(P+iQ)e^{i\frac{n}{x_1}\xi}\right]d\left(\frac{n}{x_1}\right)\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\cos\left(\frac{n}{x_1}\zeta\right)d\zeta$$
となり可成り簡單化する事が出來る。茲では計算を可及的に簡易化する目的の爲に f として，
$$f(\zeta)=\begin{cases}-\dfrac{H}{a-b}\{ae^{-b\zeta}-be^{-a\zeta}\}, & (\zeta>0)\\[2mm] -\dfrac{H}{a-b}\{ae^{b\zeta}-be^{a\zeta}\}, & (\zeta<0)\end{cases}\qquad (a>b>0)\ \Big\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$
とおく。之を (11) と比較すると入射波は $t=0$ に於て $x=x_1$ に最大振幅の位相が到着してゐる第3圖の如き前後に對稱な波である事が分る。その最大振幅は H である。從つて之を上の y の式に入れて ζ に關する積分を行ふと，

第　3　圖



$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{P\cos\left(\frac{n}{x_1}\xi\right)-Q\sin\left(\frac{n}{x_1}\xi\right)\right\}\frac{2ab(a+b)H}{\left\{a^2+\left(\frac{n}{x_1}\right)^2\right\}\left\{b^2+\left(\frac{n}{x_1}\right)^2\right\}}d\left(\frac{n}{x_1}\right),$$

又は $\dfrac{n}{x_1}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$,　$aw=a_1$,　$bw=b_1$ とおくと，
$$y=4a_1b_1(a_1+b_1)H\int_0^\infty\frac{P\cos\left(2\pi\frac{w}{\lambda}\cdot\frac{\xi}{w}\right)-Q\sin\left(2\pi\frac{w}{\lambda}\cdot\frac{\xi}{w}\right)}{\left\{a_1^2+\left(2\pi\frac{w}{\lambda}\right)^2\right\}\left\{b_1^2+\left(2\pi\frac{w}{\lambda}\right)^2\right\}}d\left(\frac{w}{\lambda}\right).$$

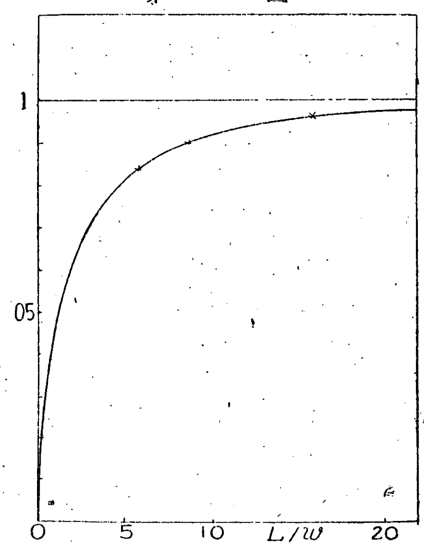
反射波を $x=x_1$ に於て觀測するものとすれば $\xi=v_1t$ となるから，$\dfrac{\xi}{w}=\dfrac{v_1t}{w}$ となる。

故に

$$y_{x=x_1}=4a_1b_1(a_1+b_1)H\int_0^\infty \frac{P\cos\left(2\pi\frac{v_1t}{w}\cdot\frac{w}{\lambda}\right)-Q\sin\left(2\pi\frac{v_1t}{w}\cdot\frac{w}{\lambda}\right)}{\left\{a_1^2+\left(2\pi\frac{w}{\lambda}\right)^2\right\}\left\{b_1^2+\left(2\pi\frac{w}{\lambda}\right)^2\right\}}d\left(\frac{w}{\lambda}\right). \quad\cdots\cdots(13)$$

P, Q は第2圖により $\frac{w}{\lambda}$ の函數として與へられてあるから，色々の $\frac{v_1t}{w}$ に對して，この積分を數値的に計算し反射波の最大振幅を求める事が出來る。入射波の波形を變へずに波長だけを w に對して變へるには $a:b$ を一定に保ち乍ら，その値を色々變へればよい。即ち a_1, b_1 の比を一定にして，その値を變化させればよい。

第 4 圖



玆では $a:b=a_1:b_1=1:0.8$ として（反射波の最大振幅）:（入射波の最大振幅$=H$）を求めた。第4圖の横座標に於けを L は波の長さと境界層の厚さ w の比で，波長としては振幅が $H/10$ なる2點の長さを採つてある(第3圖)。漸近線は境界線の厚さが波長に比し無限小の場合の極限値で第一媒質と第二媒質が直接接觸してゐる場合即ち普通に使はれてゐる反射係數で，之に對する L/w の色々な場合の相對値が縱座標に入れてある。

第4圖によると L が w の9倍位になると $w\to0$ 或いは $L\to\infty$ と考へた場合の値と1割しか差が無くなる事が分る。夫より L/w が大きければ大體境界層の存在を考慮に入れる必要はない。上例の $f(\xi)$ は比較的長波長の成分を多く含んで居る形であつて，所謂衝撃性の波動では大概之より短波長の成分が卓越して居る場合が多いと考へられるから，L/w はもう少し大きく見積つて置く事が必要であらう。又波動の境界層は對する入射が垂直でなくして斜めである時はL/wを更にもつと大きく採らなければ境界層の存在が無視出來ないと思はれる。之は相當重要な問題だから將來改めて研究が必要である。要するに境界層を無視した普通の反射公式で反射波の振幅を1割以內の誤差で算定し得る爲には波の見掛上の長さLが境界層の厚さに對し最も小さい場合で約9倍以上になる事が必要であつて，問題によつては，この9と言ふ數字は更に大きく考へなければならない事が結論出來るであらう。

§.3 弱不均質媒質內を傳はる波動の一性質 前節で取扱つた例では物質（密度）の變化は第一媒質から境界層を經て第二媒質迄連續的であるが，その微分係數 $\frac{d\rho}{dx}$ は最早や連續でなく境界層の兩端 $x=x_1$ 及び $x=x_2$ で不連續であるから，反射波の存在すべき理由は十分あるわけで，只その反射係數について注意すべき點を擧げたわけである。それでは μ や ρ 及びその微分係數に不連續が無い場合（或ひは十分高次の微係數迄は連續なりとした時）にに於ては中間の境界層の幅と波

の長關係如何に依らず反射波が無いものか，或ひは波長の方が十分長ければ反射があるのかと言ふ問題が起る(1)。一般には波長が十分長い場合或ひは漸變境界層の厚さが十分薄い場合には反射波が存在する樣に考へられて居るらしいけれ共その論據は餘り明瞭ではない。

茲では數學的取扱ひを明確化する爲媒質の不均質性が非常に微弱であり，從つて之に依つて波動が受ける影響も亦十分小さいとして近似算をする。

運動方程式

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\frac{\partial y}{\partial x}\right\} \quad\cdots\cdots(14)$$

に於て ρ は常數，μ は x の函數で次の樣に表はせるとする。

$$\mu=\mu_0\{1+\lambda f(x)\},\qquad \text{但し}\quad |\lambda|\ll 1. \quad\cdots\cdots(15)$$

茲に $f(x)$ は勝手な函數であるが，唯今の目的の爲には，之が x について必要なだけ何回でも微分出來る樣な極めて滑らかなる函數と考へて置けばよいのである。

(14) の解を

$$y=\Phi(x-ct)+\lambda\Psi(x,\,t),\qquad \text{但し}\quad c\equiv\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \quad\cdots\cdots(16)$$

と置くと Φ は $f(x)=0$ なる均質媒質内を x の正向に進行する波動を表はし，$\lambda\Psi$ なる項は不均質性に依る擾亂を表はす部分である。(15)，(16) を (17) に代入して λ^2 以上の高次微小量を捨てると，

$$\rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\left\{f(x)\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\},$$

或ひは

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{f(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\}. \quad\cdots\cdots(17)$$

獨立變數 $t,\,x$ を次の樣な $\xi,\,\eta$ に變へる。

$$\xi=x+ct\,,\qquad \eta=x-ct\,;\qquad \text{從つて}\quad x=\frac{\xi+\eta}{2},\qquad ct=\frac{\xi-\eta}{2} \quad\cdots\cdots(18)$$

さうすると，(17) は

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left\{f\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\phi(\eta)\right\} \quad\cdots\cdots(19)$$

と書かれる事が分る。之を積分して一般解を求めると

$$\psi=\frac{1}{4}\int^{\xi}\!\!\int^{\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left\{f\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\phi(\eta)\right\}d\xi d\eta+X(\xi)+Y(\eta), \quad\cdots\cdots(20)$$

---

(1) $\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\frac{\partial y}{\partial x}\right\}$ において，特に $\mu\rho=$(一定) が成り立つ時は μ 及び ρ の連續でも不連續でも，反射波が起らないと言ふ事實がある。但し之は特例である。

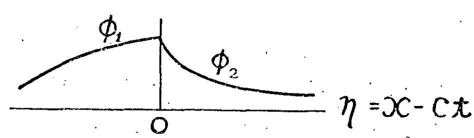
玆で $X(\xi)$, $Y(\eta)$ は夫々 ξ 又は η のみの任意の函數である。上の積分の有効な爲には $f\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$ $\phi(\eta)$ が ξ 及び η に就て2回迄微分出來なくてはならない。f の方は何回でも微分出來ると假定してあるから，結局 $\phi(\eta)$ が2回迄微分可能なる事が必要であつて，若し $\phi(\eta)$ の1回又は2回微分係數に不連續がある時は(1)，その樣な η を境にして Ψ の解を分けて考へる必要がある。$\eta=0$ が不連續點とし(2)，$\eta<0$ に於て ϕ_1 を ϕ_1, Ψ を Ψ^1, $\eta>0$ に於て ϕ を ϕ_2, Ψ を Ψ_2 とする時(第5圖)，變位の連續性から $\phi_1(0)=\phi_2(0)$ となり，又

$$\Psi_1=\frac{1}{4}\int^{\xi}\int^{\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial_2}{\partial\eta^2}\right)\left\{f\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\phi_1(\eta)\right\}d\xi d\eta+X(\xi)+Y(0),\quad(\eta<0)\cdots\cdots(21)$$

$$\Psi_2=\frac{1}{4}\int^{\xi}\int^{\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left\{f\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\cdot\phi_2(\eta)\right\}d\xi d\eta.\quad(\eta>0)\cdots\cdots(22)$$

と置く事が出來る(3)。ここで $Y(0)$ は常數だから之を $X(\xi)$ の中に含めれば，$Y(0)=0$ と考へて

第 5 圖



も差支へない。ψ_2 の方に $X(\xi)$, $Y(\eta)$ を入れないのは，$\eta=0$ 即ち $x=ct$ の時 $\phi(x-ct)$ の微分係數の不連續面が存在する場所よりもつと先方の區間には，擾亂が入つてゐないと言ふ物理的考へから決定される事柄である。$X(\xi)$ を決めるには $\eta=0$ に於て $\phi+\lambda\psi$ 即ち變位が連續なるべき條件に依ればよい。既に $\phi_1(0)=\phi_2(0)$ であるから，この條件は

$$\psi_1(\xi,0)=\psi_2(\xi,0)\cdots\cdots(23)$$

と言ふ事になり，(21), (22) を代入すると ($Y(0)=0$ と置いて),

$$X(\xi)=\frac{1}{4}\int^{\xi}\int^{0}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left[f\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\{\phi_2(\eta)-\phi_1(\eta)\}\right]d\xi d\eta\cdots\cdots(24)$$

であるから，之により $X(\xi)$ の函數形が決定する。

扨てこの $X(\xi)=X(x+ct)$ は $\phi(x-ct)$ とは逆向きに進行する波動を表はして居り，夫が ϕ の微分係數が不連續な點の右側，$x-ct<c$ の範圍だけに存在する事が重要な點である。特別な場合として $\eta=0$ が波の先端である場合には $\phi_2=0$ で，勿論反射成分が發生するのであるが，波の始りが緩かで $\phi_1''(\eta)$ が $\eta=0$ で不連續にならない時には解が二つに分れないから少く共 $0(\lambda)$ の反射

(1) 彈性波動等に於ては慣性の考へから $\phi(\eta)$ の1回微分係數の不連續は（近似的表現以外には）考へられない。故に實際には $\phi''(\eta)$ の不連續のみが問題となる。

(2) 一般には $\eta=$(ら定) であれば0でなく共よろしい。

(3) 積分の下限は例へば $f(x)$ が $x\to-\infty$ で0なら，そこでは ϕ_1, ϕ_2 が0故 $\xi=-\infty$, $\eta=-\infty$ と採つてよい。

成分は生じない事になる。波長との關係等は (24) からは分らないが之は將來調べる必要がある。唯，見掛けの波長の大小は定量的に兎に角，根本に於ては重要であい事が著しい事實である。

尙ここに發生した $\lambda X(x+ct)$ なる波は之が獨立して目に見るえ樣な大きさにはならない。之は元來 $\phi(x-ct)$ と言ふ波形が $0(1)$ の程度の變化を受けない樣な場合を假定してゐるから當然な結果で，その點少し面白くないが數學的取扱ひを可能ならしめる上止むを得ない事である。

唯，次の點は目下の題目には直接關係しないが極めて重要な點と思はれる。夫は弱不均質媒質內を前進するフロントを持つた波に對しては，$X(x+ct)$ の如き後進波の存在により確實に勢力の逸散が行はると言ふ事である。例へば地球內部を前進する P 波や S 波や波の如き實體波は別に媒質の吸收性を考へなく共唯前進するだけで力學的に勢力が消耗される事が明白になつたのである。實例等については本文では立ち入らないで定性的の話に止め，他は別の報文に讓る事にする。

§.4 結　論

(1) 第一媒質と第二媒質の間に中間層が存在し，之を通して物性が連續的に變化して居る時，これを通過して第一媒質より第二媒質へ進む勝手な形の彈性波はその見掛上の波長が中間層の幅に比し如何に長くとも中間層の幅を 0 とした値とは多少違ふ筈であるが，その程度を一例を以て調べた。中間層の幅の影響が何れかと云へば小ささうな例に就て計算した結果に依れば，波の長さが層の厚さの約 9 倍以下になると層の厚さを 0 と考へる (又は層の厚さに比し波長を無限大と考える) 時の反射波の最大振幅の値に比し夫が 1 割以上小さくなる。從來の正弦波を引きつづいて通す時には波長が層の厚さに對し 0 より段々大きくなると反射率の變化は所々に極大を持つて振動的であつたが，一般の形ではそうゆう事は起らない。

(2) 全く滑らかに物性が變化する媒質中を波動が前進する時でも，波形曲線の第 1 次或は第 2 次の微分係數に不連續があると，夫が起因となつて後進的の波動が發生する事が分つた。從つて第 1 媒質より第 2 媒質への物性變化が如何に滑らかであつても，例へばフロントを持つた波動なら反射成分を持つことが出來るのである。只今の計算は近似的のもので反射波の特性等について詳しい吟味が出來ないのを遺憾に思うが，定性的には種々の實際問題に暗示を與える事が多いものと信ずる。

(3) 上述の反射成分は弱不均質媒質內を前進する實體波の勢力逸散に聯關して考える時，その意味が極めて重要性を持つものと思う。

終りに臨み地震課長井上博士及び同課の諸學兄の御鞭撻並びに畏兄廣野技師の御教示に感謝の意を表する次第である。又齊藤光太郎君及び小林歌子孃には製圖の勞の一部分を頒けて貰つた。併せて御禮申し上げる。

(昭和 19 年 3 月)