振動體の共鳴現象，其の他に就て

廣野 卓藏*・副田 勝利*・本間 正作*

內容目次

I. 振動體の共鳴現象に就て

一般によく知られてゐる共鳴現象は，同一振動數を持つ二つの音叉の一方を鳴らすと，少し離れて居る他方の（共鳴箱上の）音叉もそれに連れて次第に鳴り出す現象である．若し兩者の振動數が違ふと一方の音叉を鳴らしても他方の音叉は鳴らない．振子の場合にも之と同じ現象がある．重錘を吊つてある支點を振子の自己週期と同じ週期で振動させると振子の振幅は次第に大きくなる．

一般に振動體に外部から A$\sin pt$ に比例する力が働くと，その運動は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=A\sin pt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

と云ふ風に書ける（外力の振幅は一定とする．地震計の理論では吊點の振動振幅が一定としてある．兩者の區別は重大である．）但し振動體の自己週期を T_0, 外力の振動週期を T とすると

$$n=\frac{A}{n^2-p^2}\left(\sin pt-\frac{p}{n}\sin nt\right),\ \text{又は}\ =-\frac{A}{2p}t\cos nt.\ (n=p)$$

此の二つの式を見ると，外部からの振動の週期が自己週期に近ずく程振幅が大きくなる事が分る．兩者が一致した場合には振幅はいくらでも大きくなる．之が普通考へられる共鳴現象の意味である．

併し，實際問題として振幅が無制限に大きくならないで，一定の所で止まると云ふのはどう云ふ意味であるかと云ふに，音叉の場合には外來の空氣振動に共鳴すると，その爲に自分自身も音を出す．音を出すと云ふのは自分の持つ勢力を發散させる事である．であるから折角强制振動によつて注入された勢力も蓄へる事なく外部に出して了ふ．受ける勢力と出す勢力がつり合つた所で定常狀態になる．從つてある程度以上振幅は大きくならない．振子の場合でも音こそ出さないが空氣を攪亂したり，地震計の場合の樣に制動器に對して仕事をするから本質的には音叉と同じである．尤も摩擦と云ふ抵抗力があるが，之は又別種の力で之は今考へないとする斯樣な場合には振動の式は一般に

* 中央氣象臺

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\varepsilon\frac{dx}{dt}+n^2x=A^2\sin pt \cdots\cdots(2)$$

とかける事はよく知られてゐる．即ち外力の外に $-2\varepsilon\dfrac{dx}{dt}$ に比例する抵抗力があると考へるわけである．此の式の議論も今迄に充分盡されてゐるが，その内大事な事は少し時間がたつと自己振動が消えて强制振動ばかりになると云ふ點である．(1) の場合の様に自己振動がいつまでも殘らない．併し振動の仕始めには自己振動が影響する．どう云ふ風に影響するかは此の文の第 II 節に副田氏が計算して居られるからそれを見られたい．

自己振動が消えて定常狀態になると

$$x=\frac{A}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}}\sin(pt-\varphi),\qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{2\varepsilon p}{n^2-p^2}$$

その振幅を少し書き直すと $\dfrac{Ar^2}{n^2\sqrt{(r^2-1)^2+4h^2r^2}}$ 但し $r=\dfrac{T}{T_0}$，$\varepsilon=hn$ である．此の様な場合に共鳴とは如何なる場合を指すかと云ふに，まず振動の振幅が最大になる狀態が考へられる．振幅を r で微分して極値を吟味すると $1>2h^2$ の範圍では $T=T_0/\sqrt{1-2h^2}$ で最大になりその場合の振幅は $\dfrac{A}{2n^2\sqrt{1-h^2}}$ で h が小さい程大きくなる．$1\geqq 2h^2$ では T が大なる程大きくなつて漸近的に $\dfrac{A}{n^2}$ に近づき，此の場合には共鳴の意味を失ふ．要するに共鳴する外力の週期は T_0 と一致しないで常に T_0 より大きく，ε が大なる程甚しい．音叉等の共鳴の場合には ε が充分小さいから T と T_0 は殆んど一致するとは云へ嚴密には一致しない點を注意すべきである．

所で振幅が最大になる所が振幅が外部（抵抗力）に對してなす仕事（工率）の最大になる所ではない．それに關連して勢力の事を少し考へて見る．(2) の式に mdx を乘ずると

$$d\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}+2\,m\varepsilon\left(\frac{dx}{dt}\right)dx+d\left(\frac{1}{2}mn^2x^2\right)=mp^2\sin pt\,dx \cdots(3)$$

となる．但し m は振子ならば重錘の質量に當る量である．之は外力が振動體に爲す仕事は，その運動及び位置の勢力の增加量（符號を考へて）と，抵抗力に反對して爲す仕事とに振り向けられる事を意味する．式中 $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ は振動體の運動の勢力で $=\dfrac{1}{2}m\dfrac{A^2p^2}{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}\cos^2(pt-\varphi)$ 振幅を書き直すと $\dfrac{1}{2}\dfrac{mA^2}{n^2}\dfrac{r^2}{(r^2-1)^2+4h^2r^2}$，その最大値は $r=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}}$ で起り ε には無關係となる．次に $\dfrac{1}{2}m\,n^2x^2$ は振動體の位置の勢力で $\dfrac{1}{2}\dfrac{mA^2n^2}{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}\sin^2(pt-\varphi)$．之は振幅が最大になる所で最大になる．明に運動と位置の勢力は異り，$T_0\gtreqless T$ に從つて前者の方が大きく或は小さくなる．$T=T_0$ の時兩者は等しくなる．

(3) 式を一週期間積分すると，運動と位置の勢力は途中に多少の增減があつても一週期たつと結局は元に戻り變化がないから消えて

$$2m\varepsilon\int\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = mA\int_T \frac{dx}{dt}\sin pt\,dt$$

即，外力が振動體になした仕事は結局全部振動體が抵抗力に對してなす仕事に費される．

左邊を計算すると $=\dfrac{mA^2p^2T}{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}$，平均單位時間になす仕事は之を T で割る．即，運動勢力の振幅と全く同じになる．從つて若し共鳴點を例へば音叉が最も多く音の勢力を出す極大點と定義すれば，之は振幅最大點ではない．ε に無關係に $T=T_0\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2}}$ なる所である．

所で ε が零の場合には振子を自由に振動させた時に現はれる T_0 なる週期に等しい週期力が作用すると共鳴現象を起すが，それから類推して，ε が零でない時にも，振動體を自由に（外力なしに）振動させた時の週期 T_0 に等しい週期の外力が作用する時に共鳴を起しはしないかと云ふ考が浮ぶ．所が (2) より自由振動を出すと

$$x=Ae^{-\varepsilon t}\cos(\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t+\psi)$$

（但し A，ψ は常數である）之から自由振動の週期は $\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}=\dfrac{T_0}{\sqrt{1-h^2}}$ となつて常に T_0 より大きく ε が大なる程激しくなつて前記振幅最大の場合と似てゐるが，それよりも小さい週期であり，兩者は完全には一致しない．事實物理的にも兩者は全く異る意味を有する．自由振動の場合は (3) 式の右邊を零とおくと

$$-d\left[\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x^2\right\}\right]=2\varepsilon\frac{dx}{dt}dx$$

となつて振動は運動と位置の勢力の犧牲に於て行はれる．以上の區別は簡單な分り切つた話であるが根本的である．

と云ふのは近頃筆者が遭遇した問題にこう云ふのがある．

深發地震の場合震源域を普通球窩と考へるが，球窩をある週期 p で振動させるとその週期の波が出る．これは强制振動である．球窩の表面で與へた仕事はすべて波動の勢力となつて外部に流れる．此の狀態は丁度 (2) 式で表はせる．所で此の時に出る波の振幅が最大になる樣な週期が，實際の地震現象の時に最も出やすい週期のものであると云ふ推論が行はれてゐる．併し，實際の地震は寧ろ自己振動的なものであつて，(2) 式の右邊が零になつた場合であると考へられる．從つて共鳴の週期と實際のものとは少し異ふのではないかと思ふ．近似論ではどちらでもよろしいが，嚴密には區別すべきものと考へる．尙此の點は理論地震學に於ける重要な論題であつて，今俄に論斷は出來ないが，以上の簡單な考察は多少參考になるものと思ふ．

II. 振子の固有振動の影響

振子の外力に依る運動に就ては，既に多くの硏究が行われて來て居るが，それは多く初動の問題に就てゞある．それ以後の運動に就て計算をしたものは比較的少い．

今正弦波的の外力を考へ，その週期と振子の固有週期の比が 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5 等の種々な場合について計算を行ひ，その場合に如何なる部分迄振子の影響が現れるかを計算して見た．

先ず振子の運動方程式は

$$\frac{d^2a}{dt^2}+2\varepsilon\frac{da}{dt}+n^2a=x_0\,\omega^2\sin\omega t$$

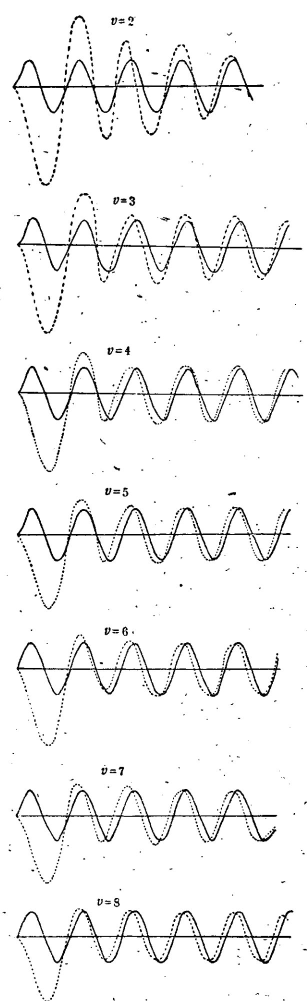
a: 振子の變位，　n: 振子の振動數，　ω: 外力の振動數，　x_0: 外力（正弦波的）の振幅．

初期條件を

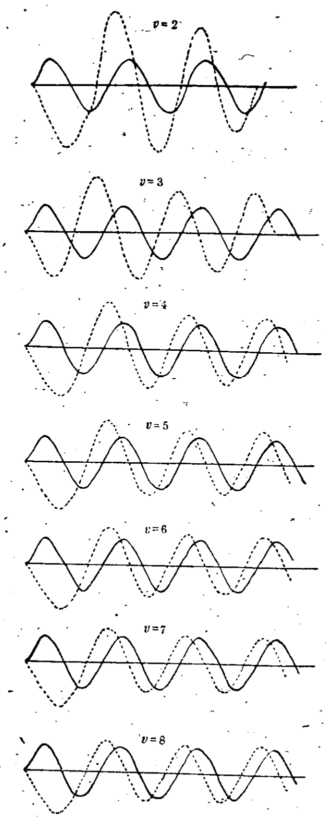
$$t=0,\quad a=0,\quad \frac{da}{dt}=-x_0\omega$$

とすると，その解は（簡單の爲 $x_0=1$ とする）

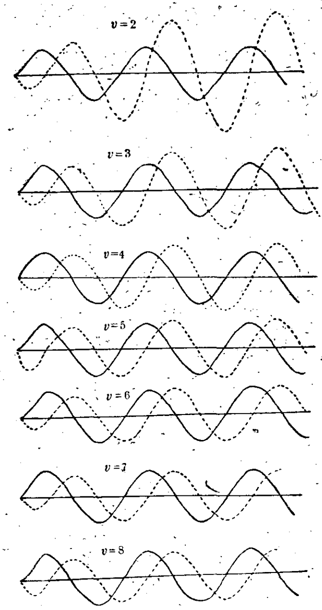
$T/T_0=0.5$ の場合



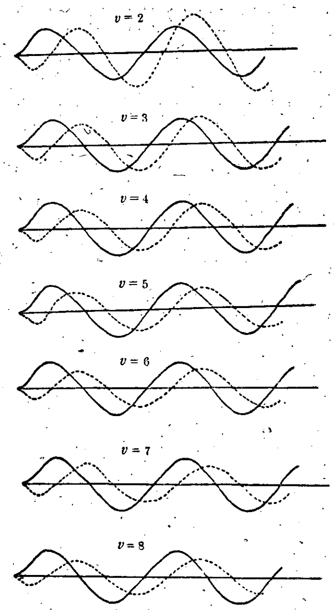
$T/T_0=0.75$ の場合



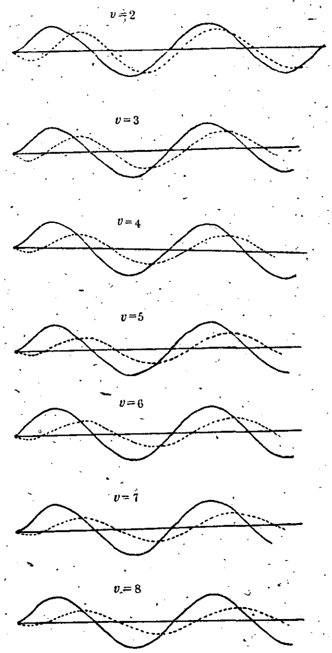
$T/T_0=1.0$ の場合



$T/T_0=1.25$ の場合



$T/T_0=1.5$ の場合



$$
\begin{aligned}
a=&\frac{\omega^2}{\sqrt{(n^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}\sin\omega\tau\, e^{-\varepsilon t}\cos\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t\\
&+\frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}\left\{\frac{\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(n^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}\sin\omega\tau-\omega-\frac{\omega^3}{\sqrt{(n^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}\cos\omega\tau\right\}\sin\sqrt{n^2-\varepsilon^2}\,t\\
&+\frac{\omega^2}{\sqrt{(n^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}\sin\omega(t-\tau).
\end{aligned}
$$

こゝに　$\tan\omega\tau=\dfrac{2\,\varepsilon\omega}{n^2-\omega^2}.$

今外力の週期 T と振子の固有週期 T_0 との比 $T/T_0=0.5,\ 0.75,\ 1.0,\ 1.25,\ 1.5$ の夫々に就て制振度 v が 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の場合について計算して見ると次圖の如くになる．實線は正弦波的外力を，點線は振子の運動を示す．

大體上の圖を見るに，振子の固有週期より短い週期及び丁度同じ週期の外力が働く場合は制振度 2, 3 の時は二振動迄 4, 5, 6 では一振動迄固有振動が影響する．7, 8 では約半振動迄固有振動が影響する．長い週期の場合は制振度 2, 3 位で一振動迄，それ以上の場合は半振動迄固有振動が影響する．

從つて制振度を變通 7, 8 位にして置けば，振動倍率で振幅を計算する時には最初の一振動だけは振動倍率が用ひられないが，後の部分は用ひて良い事が解る．

III. 振子が自由振動を伴はない條件

本誌第 12 卷第1號所載の高木理學士の論文[1]「津浪の灣奥に於ける振動」の中に，その主要な結論の一つとして外海からの入射波の波形が極めて緩徐な時海棚に自由振動が現はれ難いが，波形曲線に折れ目の様な急變點があると自由振動が勵起されると言ふ事が述べられて居る．同氏の解式に於て第一の場合に自由振動の項が現はれて居ないのは，一つには鞍點法で積分を行つたと言ふ數學的取扱ひの理由に依るものと考へられるが，實際の現象として考へても恐らく妥當だらうと思はれる．

例をもつと簡單なモデルとして地震計と地動との關係に求めて地動の始まりの緩急度と地震計の自己振動の問題を考へて見る．土地の變位を表はす函數を $f(t)$ とする時地震計の振動方程式は普通の記號で

$$\ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+n^2x=-V\ddot{f} \quad \cdots\cdots (1)$$

となり，$f(t)$ は $t\leqq 0$ で 0 はと考へられるから，初期條件は，

$$t\to+0 \text{ で } \left.\begin{aligned} v+Vf(0)&=0 \\ \dot{x}+V\dot{f}(0)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる．之の一般解は[2]

$$\begin{aligned} x&=e^{-\varepsilon t}\{\varGamma_1\cos\gamma t+\varGamma_2\sin\gamma t\} \\ &\quad -\frac{V}{\gamma}e^{-\varepsilon t}\{\cos\gamma t\int_0^t e^{\varepsilon t}\sin\gamma t\cdot\ddot{f}(t)dt-\sin\gamma t\int_0^t e^{\varepsilon t}\cos\gamma t\cdot\ddot{f}(t)dt, \quad \cdots\cdots (3) \end{aligned}$$

但し $$\gamma=\sqrt{n^2-\varepsilon^2} \quad \cdots\cdots (4)$$

今 $t>0$ の範圍で t が餘り大きく無い間は $f(t)$ をテーラーの級數に展開出來て，

$$f(t)=f(0)+\dot{f}(0)t+\frac{1}{2}\ddot{f}(0)t^2+ \quad \cdots\cdots (5)$$

となる[3]．之を (3) に入れて積分を行ふと，

$$\begin{aligned} x&=e^{-\varepsilon t}\{\varGamma_1\cos\gamma t+\varGamma_2\sin\gamma t\} \\ &\quad -\frac{V}{\gamma}e^{-\varepsilon t}\{\cos\gamma t\cdot\Im[\ddot{f}(0)I_0+\frac{1}{2}\dddot{f}(0)I_1+\cdots\cdots] \\ &\qquad\qquad -\sin\gamma t\cdot\Re[\ddot{f}(0)I_0+\frac{1}{2}\dddot{f}(0)I_1+\cdots\cdots]\} \quad \cdots\cdots (6) \end{aligned}$$

但し $$\left.\begin{aligned} &I_n=\frac{t^n e^{(\varepsilon+i\gamma)t}}{\varepsilon+i\gamma}-\frac{n}{\varepsilon+i\gamma}I_{n-1}, \quad I_0=\frac{1}{\varepsilon+i\gamma}[e^{(\varepsilon+i\gamma)t}-1], \\ &\dot{I}_n=e^{(\varepsilon+i\gamma)t}t^n \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7)$$

---

(1) 驗震時報，第 12 卷，第 1 號 (昭和 17 年)
(2) B. Galitzin; Vorlesungen über Seismometrie, deutsch von O. Hecker, (1914).
(3) t=o では $\dot{f}$(o) 等が不連續的に飛躍する事があるけれ共，t>o では地動に新しい位相が生じない限り (5) が成立する．

之より $t\to 0$ では

$$I_0=I_1=I_2=\cdots\cdots=0,\quad \dot{I}_0=1,\ \dot{I}_1=\dot{I}_2=\cdots\cdots=0 \qquad (8)$$

であるから，(2) に代入すると

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_1+V\cdot f(0)=0,\\&\gamma\Gamma_2-\frac{V}{\gamma}\ddot{f}(0)+V\dot{f}(0)=0\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

自由振動が起らない爲には $\Gamma_1=\Gamma_2=0$ であればよいから，

$$f(0)=0 \qquad (10)$$

$$\ddot{f}(0)=\gamma\dot{f}(0) \qquad (11)$$

(10) の方は當然の事で問題無い．(11) の關係は地動として極めて特種だから $\dot{f}$ や $\ddot{f}$ が有限の時は容易には成立しないけれ共，兎に角地動が急激の時でも振子の自己振動が餘り大きく出るとは限らない事は興味ある事實と思はれる．一例として (11) が t の小さい範圍で常に成立して，

$$\ddot{f}(t)=\gamma\dot{f}(t)$$

である爲の $f(t)$ を求めると，(10) を考慮して

$$f(t)=A\{e^{\gamma t}-1\}$$

と求まる．之は $\dot{f}(0)=\gamma A$ で有限となるが振子の自己振動を誘發しない．

然し一般には振子の自己振動が起らない時は

$$\dot{f}(0)=0,\quad \ddot{f}(0)=0 \qquad (12)$$

となる事に依り，(11) が成立したと考へる方が確からしいに違ひ無い．(10) 及び (12) は地動の始まりが數學的に緩徐である事を示すものである．この事は津浪の入射波の波形と海棚や灣の自由振動發生との關係とも一脈相通ずる所がある．勿論地震計の時は初期條件が問題となるのに津浪の時は場所に關する境界條件，從つて波頭の形の扁平さが問題となり，條件の形式も大部違ふが，尙ほその上に津浪の方では自由振動を起しさうな境界が，灣の入口と灣の奥との二箇所にあり，假に灣の入口で自由振動を起さない條件が滿された場合でも，其處に反射波も起るから灣奥でも自由振動を發生しない樣な狀態を保持出來るとは言へない筈である．從つて高木理學士の取扱はれた第一の場合（入射波の水位の變化が緩やかな場合）と雖も，甚だ弱勢乍らも自由振動が存在し，全く無いわけではないと考へられる．然し大勢は地震計の場合からの類推通りである事は高木氏の計算から明らかである．