或る内部歪核に依る半無限彈性體の變形に就いて（補遺）

副　田　勝　利*

先に内部歪核として $\Delta=-A\frac{z}{r^3}$ に依る半無限彈性體の變形に就いて計算を行つた[1]. 然しその計算に於て表面に於ける歪力が零である條件を滿足させる爲に，表面に $Z=-2\mu\frac{b}{R^3}-6\mu q\frac{b^3}{R^5}$ なる垂直力が作用する場合を加へたのであるが，斯様に表面に力を加へたならば内部歪核に影響を及ぼすのは當然である．今それがどの程度に影響するものか計算して見ると，先づ

$$Z=-2\mu\frac{b}{R^3}-6\mu q\frac{b^3}{R^5}$$

に依る變位は

$$\left\{\begin{aligned}
u&=3qb^2\frac{xz}{r_2^5}+\frac{xz}{r_2^3}-b^2\frac{x}{r_2^3(r^2+z+b)}-b^2\frac{x}{r_2^2(r_2+z+b)^2}-\frac{1}{q}\frac{x}{r_2(r_2+z+b)}\\
v&=3qb^2\frac{yz}{r_2^5}+\frac{yz}{r_2^3}-b^2\frac{y}{r_2^3(r_2+z+b)}-b^2\frac{y}{r_2^2(r_2+z+b)^2}-\frac{1}{q}\frac{y}{r_2(r_2+z+b)}\\
w&=3qb^2\frac{z(z+b)}{r_2^5}+\frac{z(z+b)}{r_2^3}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left(qb^2\frac{1}{r_2^3}+\frac{1}{r_2}\right)
\end{aligned}\right.$$

こゝに

$$r_2^2=x^2+y^2+(z+b)^2$$

$$q=\frac{\lambda+\mu}{\mu}$$

これを $(0,\ 0,\ b)$ を原點とする球座標に變換すると

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta_R&=3qb^2\frac{r\sin^2\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^5}+\frac{r\sin^2\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^3}-b^2\frac{r\sin^2\theta}{r_2^3(r_2-r\cos\theta+2b)}\\
&\quad-b^2\frac{r\sin^2\theta}{r_2^2(r_2-r\cos\theta+2b)^2}-\frac{1}{q}\frac{r\sin^2\theta}{r_2(r_2-r\cos\theta+2b)}+3qb^2\frac{(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\cos\theta}{r_2^5}\\
&\quad+\frac{(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\cos\theta}{r_2^3}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left(qb^2\frac{\cos\theta}{r_2^3}+\frac{\cos\theta}{r_2}\right)\\
\vartheta_\varphi&=0\\
\vartheta_\theta&=3qb^2\frac{r\sin\theta\cos\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^5}+\frac{r\sin\theta\cos\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^3}-b^2\frac{r\sin\theta\cos\theta}{r_2^3(r_2-r\cos\theta+2b)}\\
&\quad-b^2\frac{r\sin\theta\cos\theta}{r_2^2(r_2-r\cos\theta+2b)^2}-\frac{1}{q}\frac{r\sin\theta\cos\theta}{r_2(r_2-r\cos\theta+2b)}+3qb^2\frac{(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\sin\theta}{r_2^5}
\end{aligned}\right.$$

---

* 中央氣象臺

(1) 驗震時報, 第 11 卷, p. 256

$$+\frac{(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\sin\theta}{r_2^{\,3}}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left(qb^2\frac{\sin\theta}{r_2^{\,3}}+\frac{\sin\theta}{r_2}\right).$$

之に依る歪力成分は

$$T_{RR}=(\lambda+2\mu)\Bigg[3qb^2\left\{\frac{\sin^2\theta(b-2r\cos\theta)}{r_2^{\,5}}-5\frac{r\sin^2\theta(b-r\cos\theta)(r-2b\cos\theta)}{r_2^{\,7}}\right\}$$

$$+\left\{\frac{\sin^2\theta(b-2r\cos\theta)}{r_2^{\,3}}-3\frac{r\sin^2\theta(b-r\cos\theta)(r-2b\cos\theta)}{r_2^{\,5}}\right\}$$

$$-b^2\left\{\frac{\sin^2\theta}{r_2^{\,3}(r_2-r\cos\theta+2b)}+\frac{\sin^2\theta}{r_2^{\,2}(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right.$$

$$-\frac{r\sin^2\theta[3(r-2b\cos\theta)(r_2-r\cos\theta+2b)+r_2(r-2b\cos\theta)-r_2^{\,2}\cos\theta]}{r_2^{\,5}(r_2-r\cos\theta+2b)^2}$$

$$\left.-\frac{r\sin^2\theta[2(r-2b\cos\theta)(r_2-r\cos\theta+2b)+2r_2(r-2b\cos\theta)-2r_2^{\,2}\cos\theta]}{r_2^{\,4}(r_2-r\cos\theta+2b)^3}\right\}$$

$$-\frac{1}{q}\left\{\frac{\sin^2\theta}{r_2(r_2-r\cos\theta+2b)}\right.$$

$$\left.-\frac{r\sin^2\theta[(r-2b\cos\theta)(r_2-r\cos\theta+2b)+r_2(r-2b\cos\theta)-r_2^{\,2}\operatorname{oos}\theta]}{r_2^{\,3}(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right\}$$

$$+3qb^2\left\{-\frac{\cos^2\theta(3b-2r\cos\theta)}{r_2^{\,5}}-\frac{5\cos\theta(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)(r-2b\cos\theta)}{r_2^{\,7}}\right\}$$

$$+\left\{-\frac{\cos^2\theta(3b-2r\cos\theta)}{r_2^{\,3}}-3\frac{(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)(r-2b\cos\theta)\cos\theta}{r_2^{\,5}}\right\}$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left\{-3qb^2\frac{\cos\theta(r-2b\cos\theta)}{r_2^{\,5}}-\frac{\cos\theta(r-2b\cos\theta)}{r_2^{\,3}}\right\}\Bigg]+$$

$$\lambda\Bigg[6qb^2\frac{\sin^2\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^{\,5}}+2\frac{\sin^2\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^{\,3}}-2b^2\frac{\sin^2\theta}{r_2^{\,3}(r_2-r\cos\theta+2b)}$$

$$-2b^2\frac{\sin^2\theta}{r_2^{\,2}(r_2-r\cos\theta+2b)^2}-\frac{2}{q}\frac{\sin^2\theta}{r_2(r_2-r\cos\theta+2b)}$$

$$+3qb^2\left\{\frac{b(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)-r(2\cos^3\theta-2\cos\theta\sin^2\theta)}{r_2^{\,5}}-10\frac{br\sin^2\theta\cos\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^{\,7}}\right\}$$

$$+\left\{\frac{b(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)-r(2\operatorname{oos}^3\theta-2\cos\theta\sin^2\theta)}{r_2^{\,3}}-6\frac{br\sin^2\theta\cos\theta(b-r\cos\theta)}{r_2^{\,5}}\right\}$$

$$-b^2\left\{\frac{(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r_2^{\,3}(r_2-r\cos\theta+2b)}+\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r_2^{\,2}(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right.$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta[4br\sin\theta(r_2-r\cos\theta+2b)-4brr_2\sin\theta-2rr_2^{\,2}\sin\theta]}{r_2^{\,4}(r_2-r\cos\theta+2b)^3}$$

$$\left.-\frac{\sin\theta\cos\theta[6br\sin\theta(r_2-r\cos\theta+2b)-2brr_2\sin\theta-rr_2^{\,2}\sin\theta]}{r_2^{\,5}(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{q}\left\{\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r_2(r_2-r\cos\theta+2b)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\theta\cos\theta[2br\sin\theta(r_2-r\cos\theta+2b)-2brr_2\sin\theta-rr_2^2\sin\theta]}{r_2^3(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right\}$$

$$+3qb^2\left\{\frac{4\cos\theta(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)+r\sin^2\theta(3b-2r\cos\theta)}{rr_2^5}\right.$$

$$\left.-10\frac{b\sin^2\theta(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)}{r_2^7}\right\}$$

$$+\frac{4\cos\theta(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)+r\sin^2\theta(3b-2r\cos\theta)}{rr_2^3}$$

$$\left.-\frac{6b(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\sin^2\theta}{r_2^5}\right\}$$

$$\left.+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left\{qb^2\left(\frac{4\cos\theta}{rr_2^3}-6\frac{b\sin^2\theta}{r_2^5}\right)+\left(\frac{4\cos\theta}{rr_2}-2b\frac{\sin^2\theta}{r_2^3}\right)\right\}.\right]$$

$$T_{R\varphi}=0$$

$$T_{R\theta}=\mu\left[3qb^2\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta(2b-3r\cos\theta)}{r_2^5}-5\frac{r\sin\theta\cos\theta(b-r\cos\theta)(r-2b\cos\theta)}{r_2^7}\right\}\right.$$

$$+\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta(2b-3r\cos\theta)}{r_2^3}-3\frac{r\sin\theta\cos\theta(b-r\cos\theta)(r-2b\cos\theta)}{r_2^5}\right\}$$

$$-b^2\left\{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r_2^3(r_2-r\cos\theta+2b)}\right.$$

$$\left.-\frac{r\sin\theta\cos\theta[3(r-2b\cos\theta)(r_2-r\cos\theta+2b)+r_2(r-2b\cos\theta)-r_2^2\cos\theta]}{r_2^5(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right\}$$

$$-b^2\left\{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r_2^2(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2r\sin\theta\cos\theta[(r-2b\cos\theta)(r_2-r\cos\theta+2b)+r_2(r-2b\cos\theta)-r_2^2\cos\theta]}{r_2^4(r_2-r\cos\theta+2b)^3}\right\}$$

$$-\frac{1}{q}\left\{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r_2(r_2-r\cos\theta+2b)}\right.$$

$$\left.-\frac{r\sin\theta\cos\theta[(r-2b\cos\theta)(r_2-r\cos\theta+2b)+r_2(r-2b\cos\theta)-r_2^2\cos\theta]}{r_2^3(r_2-r\cos\theta+2b)^2}\right\}$$

$$-15qb^2\frac{r(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\sin\theta}{r_2^7}-3\frac{r(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)\sin\theta}{r_2^5}$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left(-qb^2\frac{3r\sin\theta}{r_2^5}-\frac{r\sin\theta}{r_2^3}\right)+3qb^2\left\{\frac{r\sin^3\theta}{r_2^5}-5\frac{\sin^2\theta(b-r\cos\theta)2br\sin\theta}{r_2^7}\right\}$$

$$+\left\{\frac{r\sin^3\theta}{r_2^3}-3\frac{\sin^2\theta(b-r\cos\theta)2br\sin\theta}{r_2^5}\right\}$$

$$+\frac{b^2\sin^2\theta\{6br\sin\theta(r_2-r\cos\theta+2b)+2r_2br\sin\theta+r_2^2r\sin\theta\}}{r_2^5(r_2-r\cos\theta+2b)^2}$$

$$+\frac{b^2\sin^2\theta\{4br\sin\theta(r_2-r\cos\theta+2b)+4r_2br\sin\theta+2r_2^2r\sin\theta\}}{r_2^4(r_2-r\cos\theta+2b)^3}$$

$$+\frac{1}{q}\frac{\sin^2\theta\{2br\sin\theta(r_2-r\cos\theta+2b)+2brr_2\sin\theta+r_2^2r\sin\theta\}}{r_2^3(r_2-r\cos\theta+2b)^2}$$

$$-6qb^2\frac{\sin\theta(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)}{rr_2^5}-\frac{2\sin\theta(b-r\cos\theta)(2b-r\cos\theta)}{rr_2^3}$$

$$-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left\{qb^2\frac{2\sin\theta}{rr_2^3}+\frac{2\sin\theta}{rr_2}\right\}\Bigg].$$

歪核 $r=a$ なる球上に於ける上記の歪力成分の分布は上式に $r=a$ と置けば良い

今，$\lambda=\mu$ なる場合について $r=0$, $\pm\pi/2$, π の四ヶ所に於ける歪力成分を計算して見るに

$\theta=0$ に於ては

$$\begin{cases} T_{RR}=\mu\left[\dfrac{6b^2(8b-11a)}{r_2^5}+\dfrac{51b^2}{2r_2^4}+\dfrac{3b-5a}{r_2^3}+\dfrac{4}{r_2^2}+\dfrac{24b^2(b-a)}{rr_2^4}+\dfrac{12b^2}{rr_2^2}+\dfrac{4(b-a)}{rr_2^2}+\dfrac{b}{rr_2}\right] \\ T_{R\varphi}=0 \\ T_{R\theta}=0 \end{cases} \qquad (r_2=2b-a)$$

$\theta=\pm\pi/2$ に於ては

$$\begin{cases} T_{RR}=\mu\Bigg[-\dfrac{78b^3a^2+8b^5+4b^3a^2+5ba^4}{r_2^7}+\dfrac{6b^3a^2(2r_2+3b)}{r_2^5(r_2+2b)^2}+\dfrac{12b^2a^2(r_2+b)}{r_2^4(r_2+2b)^3}+\dfrac{3a^2(r_2+b)}{r_2^3(r_2+2b)^2} \\ \qquad -\dfrac{12b^2+2a^2}{r_2^3(r_2+2b)}-\dfrac{4b^2}{r_2^2(r_2+2b)^2}\Bigg] \\ T_{R\varphi}=0 \\ T_{R\theta}=\mu\left[-\dfrac{120b^4a}{r_3^7}-\dfrac{27}{2}\dfrac{b^2a}{r_2^5}-\dfrac{24b^4}{ar_2^5}-\dfrac{7b^2}{ar_2^3}-\dfrac{6}{ar_2}\right], \end{cases} \qquad (r_2^2=a^2+4b^2)$$

$\theta=\pi$ に於ては

$$\begin{cases} T_{RR}=\mu\left\{\dfrac{6b^2(8b+11a)}{r_2^5}+\dfrac{51b^2}{2r_2^4}+\dfrac{2b+5a}{r_2^3}+\dfrac{4}{r_2^2}-\dfrac{24b^2(b+a)}{rr_2^4}-\dfrac{12b^2}{rr_2^3}-\dfrac{4(b+a)}{rr_2^2}-\dfrac{6}{rr_2}\right\} \\ T_{R\varphi}=0 \\ T_{R\theta}=0 \end{cases} \qquad (r_2=2b+a)$$

歪核の大きさと，深さの種々なる場合について即ち $b=na$ と置いて $n=1, 2, 3, \cdots, 10$, の場合を計算して見ると次表の多くなり，之を圖 1, 2, 3 及び 4 に示してある.

Normal stress について見るに初めに與へた stress は $\theta=0$ で $7A\dfrac{u}{a^2}$ であるから[1] $\theta=0$ に於て

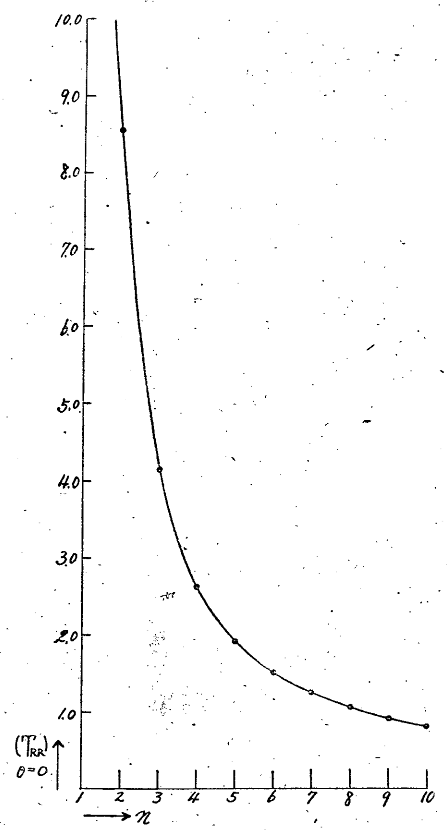
(1) 前出

n \ T_{RR}	$\theta=0$	$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$	$\theta=\pi$	n \ $T_{R\theta}$	$\theta=\frac{\pi}{2}$
1	$50.50\frac{\mu}{a^2}A$	$-0.567\frac{\mu}{a^2}A$	$-2.240\frac{\mu}{a^2}A$	1	$4.409\frac{\mu}{a^2}A$
2	8.555	−0.137	−1.815	2	2.317
3	4.151	−0.058	−1.473	3	1.546
4	2.648	−0.033	−1.230	4	1.159
5	1.940	−0.020	−1.064	5	0.926
6	1.527	−0.014	−0.916	6	0.772
7	1.257	−0.010	−0.811	7	0.661
8	1.070	−0.008	−0.728	8	0.579
9	0.928	−0.006	−0.660	9	0.514
10	0.820	−0.005	−0.603	10	0.463

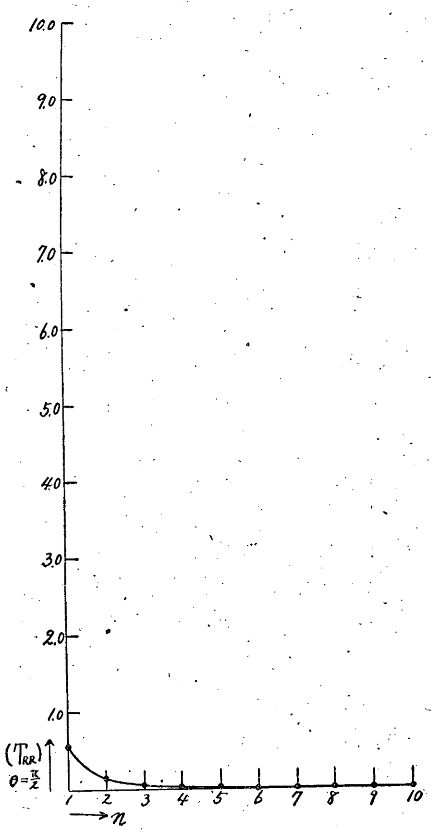
は $n=1$ では影響が非常に大きい．これは當然であるが $n=5$ に於ては元の歪核の 2/7 影響し，$n=10$ で 1/10 ある．$\theta=\pi$ に於ては $n=5$ で 1/7 で，$n=10$ で 1/10 影響する事になる．

tangential stress については $n=5$ で 1/3 影響し，$n=10$ で 1/6 になる．從つて，先づ內部歪核の大きさとその深さとの比が 1/10 より小なる時は先づ左程影響しないと考へて良いと思はれる．

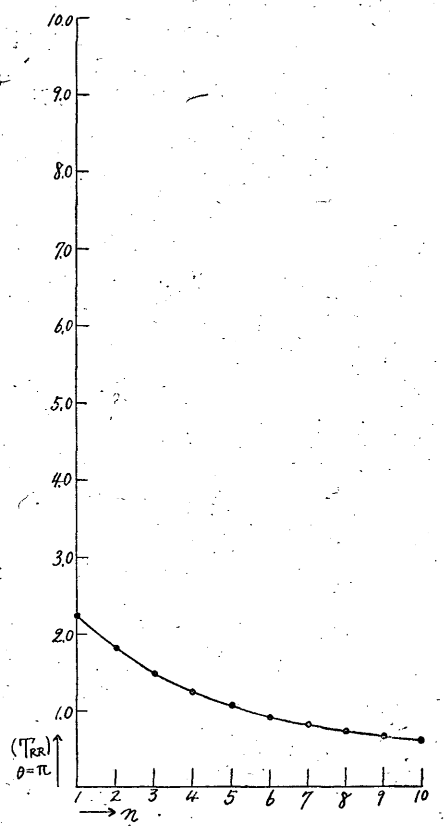
第 1 圖



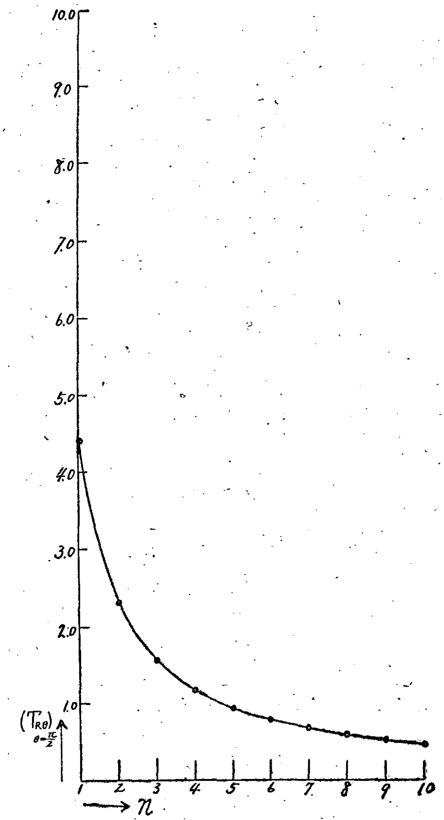
第 2 圖



第 3 圖



第 4 圖



=10 以下になると影響は可成大きいと見るべきである．内部歪核としては大體 $n=10$ 以上の場合を考へて見ると先般に於ける小論に於て表面に於ける歪力 =0 にする爲に表面に垂直力を作用させると考へる事は先づ良いと考へられる．