

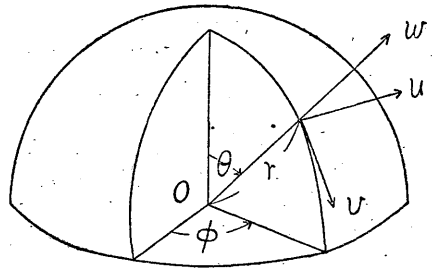
弾性波動論の初期値問題 (I)

本 間 正 作*

1. 緒 言

地球物理学に於ける弾性方程式の境界値問題は震源の理論として近年著しい發達を遂げ、具體的な數値計算に迄立到つて居る状態である⁽¹⁾。この方面の初期値問題も亦大いに研究されて居るが、その際の初期条件は例へば半無限弾性體の表面の變位と云ふ様な形で與へられる⁽²⁾。即ち表面の變位が定まれば、自づから弾性平衡論に従つて各部の變位の初期値が決定されて居る事になる。然し地球物理学の問題に純弾性論的取扱ひのみでは満足することは出来まい。殊に地震發生前後の弾性的條件の複雑性を反省する必要がある。故に從來の初期値問題の取扱ひ方は少くとも地球力学上より觀れば一般性を缺くものと言はなければならぬ。茲に弾性體内各處に初期条件を立體的に配布し、其の後の模様を調べる問題が成立する筈である。之は丁度熱傳導問題に於いて固體内各所の初期の溫度を與へて、其の後に於ける溫度配分の變化を論ずる事に匹敵するものである。

第 1 圖



今回の報告に於いては深發地震の震源論に對應すべき球座標に依る基本解を導出し、尙取扱ひ方を明らかにする爲、極めて簡単な一例を擧げるに止め、もつと異つた形の基本解や實際上の具體的解等については後の機會に次第に發表する豫定である。

2. 基本方程式

球座標に依る弾性方程式及びその解法は妹澤博士⁽³⁾に倣ふ。即ち (r, θ, ϕ) 方向の變位成分を夫々 (u, v, w) と書き、Lamé の弾性率を λ, μ 、密度を ρ とすれば、運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - 2\mu \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\varpi_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varpi_\theta}{\partial \theta} \right\}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varpi_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \varpi_\phi)}{\partial r} \right\}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

* 中央氣象臺

(1) 河角廣, 吉山良一; 地震 7 (1935), 367 に始まり妹澤, 金井, 西村等諸博士の計算があり, 井上博士 Bull. Earthq. Res. Inst., 14 (1916), 582, 15 (1937), 90, 674, 686, 956, 16 (1938) 597, に於て具體的に大いに進歩した。

(2) 例へば新しいものでは正野重方 geophys. Mag., 9 (1935) 285 等

(3) 妹澤克惟; 振動學, p. 653.

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Delta}{\partial \phi} - 2\mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial (r \varpi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi_r}{\partial \theta} \right\}, \quad \Bigg\}$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (ur^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (vr \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (wr)}{\partial \phi} \right\}, \\ 2\varpi_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (w r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (v r)}{\partial \phi} \right\}, \\ 2\varpi_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{\partial (w r \sin \theta)}{\partial r} \right\}, \\ 2\varpi_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (v r)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

(2) を (1) に代入して u, v, w を消去すれば,

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \phi^2} \right\}, \\ \rho \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial t^2} &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \varpi_r}{\partial r} + \frac{2\varpi_r}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varpi_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial \phi^2} \right\}, \\ \rho \frac{\partial^2 \varpi_\theta}{\partial t^2} &= \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (\varpi_\theta r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varpi_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (\varpi_\theta \sin \theta)}{\partial \phi \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial r \partial \theta} \right\}, \\ \rho \frac{\partial^2 \varpi_\phi}{\partial t^2} &= \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (\varpi_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\varpi_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varpi_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial r \partial \phi} \right]. \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

(3) を解くに當つて

$$\Delta \propto e^{ipt}, \quad (\varpi_r, \varpi_\theta, \varpi_\phi) \propto e^{iqt} \dots \dots \dots (4)$$

と置く. 又 P 波及び S 波の速度を V, \mathfrak{B} とすると

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \dots \dots \dots (5)$$

であるが

$$p^2 = V^2 h^2, \quad q^2 = \mathfrak{B}^2 k^2 \quad \text{即ち} \quad h^2 = \frac{p^2 \rho}{\lambda + 2\mu}, \quad k^2 = \frac{q^2 \rho}{\mu} \dots \dots \dots (6)$$

と置けば, 妹澤博士⁽³⁾の場合と同様に

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \phi^2} \right\} &= -h^2, \\ \frac{1}{\varpi_r} \left\{ \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \varpi_r}{\partial r} + \frac{2\varpi_r}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varpi_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial \phi^2} \right\} &= -k^2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\omega_\theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(\omega_\theta r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2(\omega_\theta \sin \phi)}{\partial \phi \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial r \partial \theta} \right\} = -k^2,$$

$$\frac{1}{\omega_\phi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(\omega_\phi r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\omega_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right\} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \phi} \right\} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial r \partial \phi} \right] = -k^2$$

となり、之の3個の特解は $Z_{n+1/2}$ を以つて $n+1/2$ 次の圓壘函数とすれば、(但し n は整数)

$$\Delta = A_{mn} \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) e^{i\omega t}, \dots \dots \dots (7)$$

$$2\omega_r = B_{mn} \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r^3}} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\phi) e^{i\omega t}, \dots \dots \dots (8)$$

$$2\omega_\theta = \left[\frac{B_{mn}}{n(n+1)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(kr) \} \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + C_{mn} \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right] \sin(m\phi) e^{i\omega t}, \dots \dots \dots (9)$$

$$2\omega_\phi = \left[\frac{mB_{mn}}{n(n+1)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(kr) \} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{C_{mn} Z_{n+1/2}(kr)}{m} \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{\sqrt{r} d\theta} \right] (\cos m\phi) e^{i\omega t}, \dots \dots \dots (12)$$

で、 A_{mn} , B_{mn} 及び C_{mn} は何れも常數で初期条件により決定すべきものである。之等より導かれる變位成分は矢張り 3 個の部分に分れ

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{A_{mn}}{h^2} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \right\} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos(m\phi) e^{i\omega t}, \\ v_1 &= -\frac{A_{mn} Z_{n+1/2}(kr)}{h^2} \cdot \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{\sqrt{r} d\theta} \cdot \cos(m\phi) e^{i\omega t}, \\ w_1 &= \frac{m A_{mn}}{h^2} \cdot \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r^3}} \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \sin(m\phi) e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= 0, \\ v_2 &= \frac{m B_{mn}}{n(n+1)} \cdot \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \cos(m\phi) e^{i\omega t}, \\ w_2 &= -\frac{B_{mn}}{n(n+1)} \cdot \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \cdot \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \sin(m\phi) e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= -\frac{n(n+1) C_{mn}}{m k^2} \cdot \frac{Z_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r^3}} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) e^{i\omega t}, \\ v_3 &= -\frac{C_{mn}}{m k^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(kr) \} \cdot \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \cos(m\phi) e^{i\omega t}, \\ w_3 &= \frac{C_{mn}}{k^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(kr) \} \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cdot \sin(m\phi) e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

(1) と (3) とは球面函数の部分の形が同じであるから常に相伴ひ、(2) は之とは獨立のもので妹澤博士が第二種の S 波と呼ばれたものである。(1) は $\varpi_r = \varpi_\theta = \varpi_\phi = 0$ を満し、(2) は $\Delta = 0$ を満し、(3) は $\Delta = \varpi_r = 0$ を満足するものである。

従來の發震機構論では $p = q$ と置くが、これからの取扱ひでは

$$h = k \dots\dots\dots (14)$$

と置く。即ち波長の等しい P 波と S 波を組合せる。故に

$$p = Vh, \quad q = \mathfrak{B}h \quad \text{即ち} \quad \frac{p}{q} = \frac{V}{\mathfrak{B}} \dots\dots\dots (15)$$

となる。

3. 初期變位を與へる問題

i $\varpi_r = 0$ の波

前節に得た解の中 (11) と (13) を組合せると $\varpi_r = 0$ の波が出る。即ち

$$\begin{aligned} u &= - \left[\frac{A_{mn}}{h^2} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{Z_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right\} e^{ipt} + \frac{n(n+1)C_{mn}Z_{n+1/2}(hr)}{mh^2} \frac{e^{iat}}{\sqrt{r}} \right] P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), \\ v &= - \left[\frac{A_{mn}Z_{n+1/2}(hr)}{h^2} \frac{e^{ipt}}{\sqrt{r^3}} + \frac{C_{mn}}{mh^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(hr) \right\} e^{iat} \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \\ w &= m \left[\frac{A_{mn}Z_{n+1/2}(hr)}{h^2} \frac{e^{ipt}}{\sqrt{r^3}} + \frac{C_{mn}}{mh^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(hr) \right\} e^{iat} \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi). \end{aligned}$$

圓壘函数の漸化式を使へば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{Z_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r}} \right\} &= \frac{h}{(2n+1)\sqrt{r}} \{ nZ_{n-1/2}(hr) - (n+1)Z_{n+3/2}(hr) \}, \\ \frac{Z_{n+1/2}(hr)}{\sqrt{r^3}} &= \frac{h}{(2n+1)\sqrt{r}} \{ Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr) \}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \sqrt{r} Z_{n+1/2}(hr) \right\} &= \frac{h}{(2n+1)\sqrt{r}} \{ (n+1)Z_{n-1/2}(hr) - nZ_{n+3/2}(hr) \}, \end{aligned}$$

等の諸公式が得られるから

$$\left. \begin{aligned} u &= - \frac{1}{(2n+1)h\sqrt{r}} \left[A_{mn} \{ nZ_{n-1/2}(hr) - (n+1)Z_{n+3/2}(hr) \} e^{ipt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)}{m} C_{mn} \{ Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr) \} e^{iat} \right] P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), \\ v &= - \frac{1}{(2n+1)h\sqrt{r}} \left[A_{mn} \{ Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr) \} e^{ipt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{mn}}{m} \{ (n+1)Z_{n-1/2}(hr) - nZ_{n+3/2}(hr) \} e^{iat} \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$w = \frac{m}{(2n+1)h\sqrt{r}} \left[A_{mn} \{Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi t} \right. \\ \left. + \frac{C_{mn}}{m} (n+1) Z_{n-1/2}(hr) - n Z_{n+3/2}(hr) \right] e^{i\alpha t} \left] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi). \right.$$

この特解を一般化するには A, B, C 等を h の函数と考へて、種々の h のもの (即ち色々の波長の波) を重ね合せればよい。依つて

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \frac{A_{mn}(h)}{h} \{nZ_{n-1/2}(hr) - (n+1)Z_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi ht} dh \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)}{m} \int_0^\infty \frac{C_{mn}(h)}{h} \{Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi ht} dh \right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\phi), \\ v &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \frac{A_{mn}(h)}{h} \{Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi ht} dh \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{C_{mn}(h)}{h} \{(n+1)Z_{n-1/2}(hr) - nZ_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi ht} dh \right] \cdot \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \cos(m\phi), \\ w &= \frac{m}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \frac{A_{mn}(h)}{h} \{Z_{n-1/2}(hr) + Z_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi ht} dh \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{C_{mn}(h)}{h} \{(n+1)Z_{n-1/2}(hr) - nZ_{n+3/2}(hr)\} e^{i\varphi ht} dh \right] \cdot \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cdot \sin(m\phi). \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$t=0$ に於ては

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[n \int_0^\infty \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h} Z_{n-1/2}(hr) dh \right. \\ &\quad \left. - (n+1) \int_0^\infty \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h} Z_{n+3/2}(hr) dh \right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\phi), \\ v &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h} Z_{n-1/2}(hr) dh \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h} Z_{n+3/2}(hr) dh \right] \cdot \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \cos(m\phi), \\ w &= \frac{m}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h} Z_{n-1/2}(hr) dh \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h} Z_{n+3/2}(hr) dh \right] \cdot \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cdot \sin(m\phi). \end{aligned}$$

故に初期の變位分布が

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{f(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} P_n^m(\cos\theta)\cos(m\phi), \\ v &= -\frac{g(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} \cdot \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cdot \cos(m\phi), \\ w &= \frac{mg(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} \cdot \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cdot \sin(m\phi). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

と與へられて居るならば上の値と比較して、

$$\begin{aligned} n \int_0^\infty \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h} Z_{n-1/2}(hr) dh - (n+1) \int_0^\infty \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h} Z_{n+3/2}(hr) dh &= f(r), \\ \int_0^\infty \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h} Z_{n-1/2}(hr) dh + \int_0^\infty \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h} Z_{n+3/2}(hr) dh &= g(r). \end{aligned}$$

之を書き直して、圓壙函数 Z として Bessel 函数 J を採れば、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h^2} J_{n-1/2}(hr) dh &= \frac{1}{2n+1} \{f(r) + (n+1)g(r)\}, \\ \int_0^\infty h \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h^2} J_{n+3/2}(hr) dh &= \frac{-1}{2n+1} \{f(r) - ng(r)\}, \end{aligned}$$

となるが、Hankel の可逆式を使へば

$$\begin{aligned} \frac{A_{mn} + \frac{n+1}{m} C_{mn}}{h^2} &= \frac{1}{2n+1} \int_0^\infty \xi \{f(\xi) + (n+1)g(\xi)\} J_{n-1/2}(h\xi) d\xi, \\ \frac{A_{mn} - \frac{n}{m} C_{mn}}{h^2} &= \frac{-1}{2n+1} \int_0^\infty \xi \{f(\xi) - ng(\xi)\} J_{n+3/2}(h\xi) d\xi, \end{aligned}$$

之を解いて A_{mn} , C_{mn} を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}(h) &= \frac{h^2}{(2n+1)^2} \left[n \int_0^\infty \xi \{f(\xi) + (n+1)g(\xi)\} J_{n-1/2}(h\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - (n+1) \int_0^\infty \xi \{f(\xi) - ng(\xi)\} J_{n+3/2}(h\xi) d\xi \right], \\ C_{mn}(h) &= \frac{mh^2}{(2n+1)^2} \left[\int_0^\infty \xi \{f(\xi) + (n+1)g(\xi)\} J_{n-1/2}(h\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \xi \{f(\xi) - ng(\xi)\} J_{n+3/2}(h\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

之を (17) に代入すれば、

$$\begin{aligned}
u(r) = & \left\{ \frac{-1}{(2n+1)^3 \sqrt{r}} \left[\int_0^\infty h \{nJ_{n-1/2}(hr) - (n+1)J_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \right. \right. \\
& \times \int_0^\infty \xi f(\xi) \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
& + n(n+1) \int_0^\infty h \{nJ_{n-1/2}(hr) - (n+1)J_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \\
& \times \int_0^\infty \xi g(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \left. \right] \\
& + \frac{-n(n+1)}{(2n+1)^3 \sqrt{r}} \left[\int_0^\infty h \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dg \right. \\
& \times \int_0^\infty \xi f(\xi) \cdot \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
& + \int_0^\infty h \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \\
& \times \int_0^\infty \xi g(\xi) \cdot \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \left. \right] \\
& \times P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos(m\phi) \\
v(r) \Big\} = & \left\{ \frac{-1}{(2n+1)^3 \sqrt{r}} \left[\int_0^\infty h \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \right. \right. \\
w(r) \Big\} = & \left\{ \int_0^\infty \xi f(\xi) \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\
& + n(n+1) \int_0^\infty h \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \\
& \times \int_0^\infty \xi g(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \left. \right] \\
& + \frac{-1}{(2n+1)^3 \sqrt{r}} \left[\int_0^\infty h \{(n+1)J_{n-1/2}(hr) - nJ_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \right. \\
& \times \int_0^\infty \xi f(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
& + \int_0^\infty h \{(n+1)J_{n-1/2}(hr) - nJ_{n+3/2}(hr)\} e^{i\sqrt{r}ht} dh \\
& \times \int_0^\infty \xi g(\xi) \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \left. \right] \\
& \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \cos(m\phi), \\ P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin(m\phi). \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{20}$$

茲に表れる Bessel 函数は三角函数で置き換へる事が出来る。即ち

$$J_{n+1/2}(x) = \frac{(-)^n (2x)^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right), \quad J_{-(n+1/2)}(x) = \frac{(2x)^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\cos x}{x} \right) \quad (21)$$

で、例へば

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \cos x \right\},$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right\},$$

$$J_{7/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x} \right) \sin x - \left(\frac{15}{x^2} - 1 \right) \cos x \right\},$$

$$J_{9/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{105}{x^4} - \frac{45}{x^2} + 1 \right) \sin x - \left(\frac{105}{x^3} - \frac{10}{x} \right) \cos x \right\},$$

$$J_{11/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{945}{x^5} - \frac{420}{x^3} + \frac{15}{x} \right) \sin x - \left(\frac{945}{x^4} - \frac{105}{x^2} + 1 \right) \cos x \right\}, \text{ 等々.}$$

ii $\Delta=0$ の波

$\Delta=0$ の波は (12) から出る。この方は問題が甚だ簡単で、初期条件を

$$t=0 \text{ に於て } \left\{ \begin{array}{l} u=0, \\ v = \frac{mf(r)}{n(n+1)\sqrt{r}} \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(m\phi), \\ w = \frac{-f(r)}{n(n+1)\sqrt{r}} \cdot \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \sin(m\phi), \end{array} \right. \dots\dots\dots (22)$$

と與へ、一方 (12) を一般化して

$$u=0$$

$$v = \frac{m}{n(n+1)\sqrt{r}} \int_0^\infty B_{mn}(h) J_{n+1/2}(hr) e^{i\Omega h t} dh \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(m\phi),$$

$$w = \frac{-1}{n(n+1)\sqrt{r}} \int_0^\infty B_{mn}(h) J_{n+1/2}(hr) e^{i\Omega h t} dh \cdot \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \sin(m\phi),$$

と置き、その $t=0$ に於ける値と (22) を比較して直ちに、

$$\int_0^\infty h B_{mn}(h) \cdot \frac{J_{n+1/2}(hr)}{h} dh = f(r)$$

を得るから Hankel の式に依り

$$B_{mn} = h \int_0^\infty \xi f(\xi) J_{n+1/2}(h\xi) d\xi.$$

故に一般解は

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \\ v &= \frac{m}{n(n+1)\sqrt{r}} \int_0^\infty h J_{n+1/2}(hr) e^{i33ht} dh \int_0^\infty \xi f(\xi) J_{n+1/2}(h\xi) d\xi \cdot \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(m\phi), \\ w &= \frac{-1}{n(n+1)\sqrt{r}} \int_0^\infty h J_{n+1/2}(hr) e^{i33ht} dh \int_0^\infty \xi f(\xi) J_{n+1/2}(h\xi) d\xi \cdot \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \sin(m\phi). \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

なとる。

上に得た二種の解 i 及び ii は夫々初期条件の形式に制限がある。i では u は自由であるが v と w の形式の間には関係がある爲に同一の函数 $g(r)$ で支へられる。ii でも v と w は一つの函数 $f(r)$ で與へられる。この様な制限から脱れて u, v, w を各獨立の形に與へる爲には m, n の色々の値のものを組合せなければならない。即ち i と ii では v, w の式に於ける θ, ϕ を含む函数の形が違ふから、之等を同一の球面函数で展開する様な方法⁽¹⁾が考へられるが、未ださう言ふ計算が實行された事は無い様である。茲でも只今の所そこ迄は立入らない。

4. 例 題

實際の應用方法を示す爲に i の種類の問題で $n=0$ の場合を考へる。之は法線變位のみを與へるので、發生する波動に於ても u 以外は零である。(18) に於て

$$f(r) = \frac{mr^{3/2}}{(1+m^2r^2)^2} \quad (m \text{ は常數}) \dots \dots \dots (24)$$

と置くと⁽²⁾ $t=0$ の値は

$$u_0 = \frac{mr}{(1+m^2r^2)^2}, \quad v=w=0 \dots \dots \dots (25)$$

となる。之を (20) に入れ、(21) を参照して Bessel 函数を三角函数に置き代へると容易に積分出來て、結局

$$\begin{aligned} u &= \frac{Vt}{4mr^2} \left\{ \frac{1}{m^2(r-Vt)^2+1} - \frac{1}{m^2(r+Vt)^2+1} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2r} \left\{ \frac{(r+Vt)^2}{[1+m^2(r+Vt)^2]^2} + \frac{(r-Vt)^2}{[1+m^2(r-Vt)^2]^2} \right\} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

となる。この値は $r \rightarrow 0$ に於ける極限值を作ると零になる事が分る。又 $t=0$ では $-r \cdot (1+m^2r^2)^{-2}$ となり (25) と一致する。數値計算の際には

$$mr = \rho, \quad mVt = \tau \dots \dots \dots (27)$$

(1) この事の可能性については河角廣博士が調べられた事がある由何ふを得た事を感謝申上げる。

(2) この様な初期値の擇び方は解の積分を收斂させるものでなければならぬから色々の數學的條件が必要である事は勿論である。

とおけば

$$u_0 = -\frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} \dots\dots\dots(28)$$

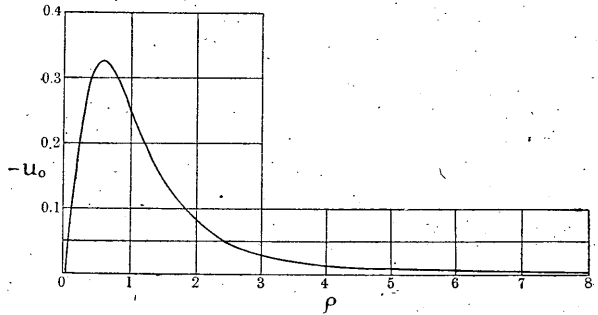
$$u = \frac{\tau}{4\rho^2} \left\{ \frac{1}{1+(\rho-\tau)^2} - \frac{1}{1+(\rho+\tau)^2} \right\} - \frac{1}{2\rho} \left\{ \frac{(\rho-\tau)^2}{[1+(\rho-\tau)^2]^2} + \frac{(\rho+\tau)^2}{[1+(\rho+\tau)^2]^2} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

となる。第 1 表及び第 2 圖には初めの變位 u_0 を、第 2 表及び第 3 圖には若干の場合に於ける u の模様を示してある。初期變位の集中してゐる ρ の小さい範圍は別として、或る一地點の時間的變化の模様を見ると、先づ初めの變位が益々増大するが、或る時刻になると極めて急激に戻つて來て反對側に非常に著しい最大振幅を生ずる。其の後は略々對稱的な形で元に戻る。この最大振幅の現れる時刻は略々 $r=0$ の點から出發した P 波が到達する時刻に等しい。而してこの山は遠方に

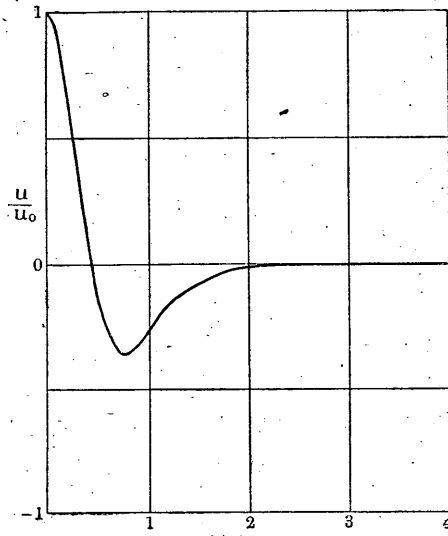
第 1 表

$\tau=0$	
ρ	$-u_0$
0	0.—
0.1	0.0980296
0.2	0.184911
0.3	0.252504
0.4	0.297265
0.5	0.32—
0.6	0.3243945
0.7	0.315301
0.8	0.297442
1.0	0.25—
1.2	0.201559
1.4	0.159788
1.6	0.126247
2.0	0.08—
2.4	0.052519
3.2	0.025309
4.0	0.013841
5	0.0073965
6	0.004383
8	0.0018935
10	0.0 ⁰ 9803
30	0.0 ⁰ 36955
60	0.0 ⁰ 4627
100	0.0 ⁰ 9998

第 2 圖



第 3 圖 (1) $\rho=0.2$



行く程鋭く尖つた形を呈する。

最大振幅が略々 $\rho = \tau$ に於て起るとすれば、この時に於ける u の値は ρ が大きいとして、(29) の第一項のみ採り出して

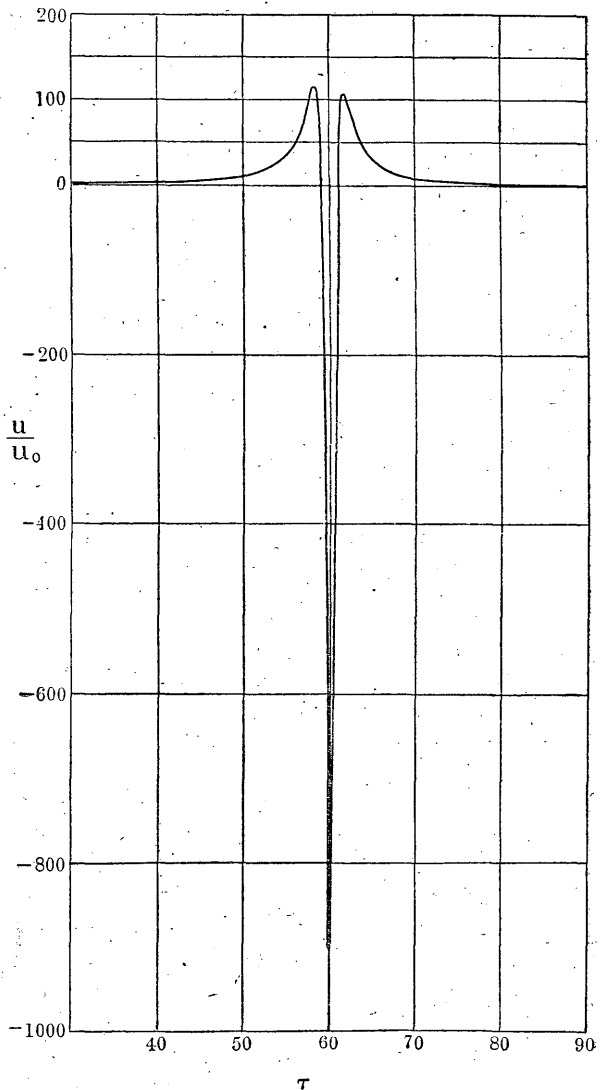
$$u_{\max} \approx \frac{1}{4\rho}$$

となる。即ち最大振幅は中心からの距離に反比例する事になる。然し中心に近い方では事情がもつと複雑である。

第 2 表 (1)

$\rho = 0.2$		
τ	u/u_0	u
0.05	1—	0.1849
0.1	0.97725	0.1807
0.15	0.8074	0.1493
0.2	0.6752	0.12485
0.25	0.5252	0.09711
0.3	0.3591	0.06640
0.5	0.1536	0.02840
0.7	0.3502	0.06476
1.0	0.2701	0.04994
1.5	0.07444	0.013765
2.0	0.01277	0.00236
2.5	0.0 ⁰ 86	0.0 ⁰ 16
3.0	0.00300	0.0 ⁰ 555
3.5	0.00272	0.0 ⁰ 50
4.0	0.00209	0.0 ⁰ 39
5	0.00113	0.0 ⁰ 21
6	0.0 ⁰ 625	0.0 ⁰ 115
8	0.0 ⁰ 2255	0.0 ⁰ 42
10	0.0 ⁰ 96	0.0 ⁰ 18
13	0.0 ⁰ 36	0.0 ⁰ 66
15	0.0 ⁰ 21	0.0 ⁰ 4

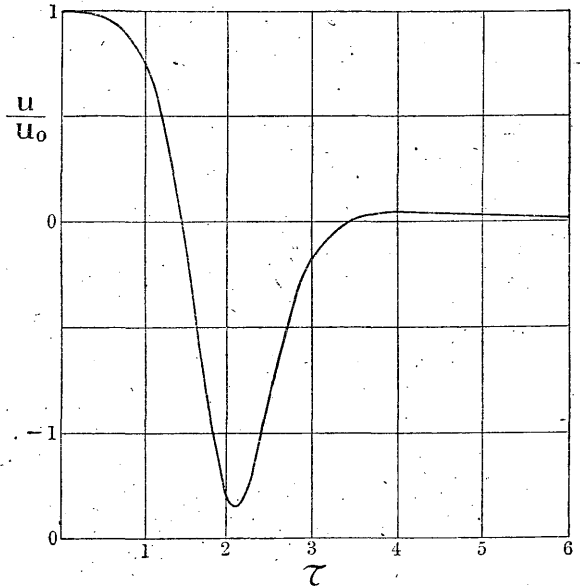
第 3 圖 (6) $\rho = 60$



第 2 表 (2)

$\rho=0.6$		
τ	u/u_0	u
0	1 —	$\bar{0}.3244$
0.1	0.9503.	$\bar{0}.3083$
0.2	0.8086	$\bar{0}.2623$
0.4	0.3420	$\bar{0}.1109$
0.6	$\bar{0}.1367$	0.04434
0.8	$\bar{0}.4010$	0.1301
1.0	$\bar{0}.4197$	0.1362
1.5	$\bar{0}.1583$	0.05135
2.0	$\bar{0}.02309$	0.007491
2.5	$\bar{0}.000840$	$0.0^3 2725$
3.0	0.004645	$\bar{0}.0015065$
3.5	0.00458	$\bar{0}.001485$
4.0	0.00359	$\bar{0}.001165$
5	0.001956	$\bar{0}.0^3 6345$
6	0.001080	$\bar{0}.0^3 350$
8	0.000389	$\bar{0}.0^3 126$
12	$0.0^4 885$	$\bar{0}.0^3 29$
16	$0.0^4 28$	$\bar{0}.0^3 9$
20	$0.0^4 116$	$\bar{0}.0^3 4$

第 3 圖 (3) $\rho=2$



第 2 表 (3)

$\rho=2$		
τ	u/u_0	u
0	1 —	$\bar{0}.08—$
0.1	0.9992	$\bar{0}.079935$
0.2	0.9966	$\bar{0}.0797265$
0.4	0.9836	$\bar{0}.078686$
0.6	0.95195	$\bar{0}.076156$
0.8	0.8839	$\bar{0}.0707135$
1.0	0.75—	$\bar{0}.060—$
1.2	0.50865	$\bar{0}.0406925$
1.4	0.12009	$\bar{0}.009607$
1.6	$\bar{0}.4078$	0.032663
1.8	$\bar{0}.9875$	0.078998
2.0	1.2976	0.103806
2.2	$\bar{1}.2862$	0.102897
2.4	$\bar{1}.0059$	0.0804715
2.6	$\bar{0}.6603$	0.0528245
2.8	$\bar{0}.37465$	0.029973
3.0	$\bar{0}.1849$	0.014793
3.5	0.008634	$\bar{0}.000691$
4.0	0.041636	$\bar{0}.003331$
4.5	0.03854	$\bar{0}.003083$
5	0.03—	$\bar{0}.0024—$
6	0.01673	$\bar{0}.001338$
8	0.00577	$\bar{0}.000462$
10	0.00243	$\bar{0}.000194$
14	0.000648	$0.0^4 514$
20	0.000155	$0.0^4 124$
30	$0.0^4 31$	$0.0^5 25$

第 2 表 (4)

$\rho=10$		
τ	u/u_0	u
0	1 —	$\bar{0}.0009803$
0.2	0.94975	$\bar{0}.0009310$
0.4	1.0030	$\bar{0}.0009832$
1.2	1.02735	$\bar{0}.001007$
2	1.0787	$\bar{0}.0010575$
4	1.3749	$\bar{0}.001343$
6	2.18095	$\bar{0}.002138$
7	3.0421	$\bar{0}.002982$
7.5	3.6543	$\bar{0}.003582$
8	4.2996	$\bar{0}.004215$
8.5	4.4064	$\bar{0}.0043195$
9	1.4790	$\bar{0}.001450$
9.5	$\bar{11}.0241$	0.0108069
10	$\bar{25}.3121$	0.0248134
10.5	$\bar{13}.0697$	0.0128122
11	1.0965	$\bar{0}.0010749$
11.5	2.0142	$\bar{0}.0019745$
12	2.2082	$\bar{0}.0021647$
13	1.4337	$\bar{0}.0014055$
14	0.8737	$\bar{0}.0008565$
16	0.32295	$\bar{0}.0003165$
20	0.10815	$\bar{0}.0001060$
30	0.0157	$0.0^4 154$
40	0.00447	$0.0^5 44$

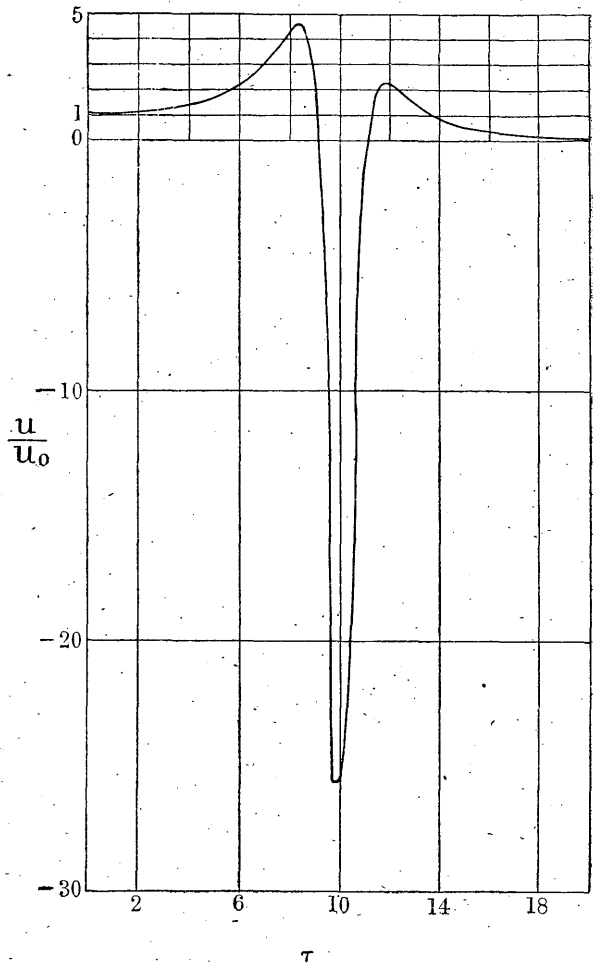
第 2 表 (5)

$\rho=30$		
τ	u/u_0	u
0	1 —	$\bar{0}.0^4 3695$
8	1.1575	$\bar{0}.0^4 428$
16	1.9370	$\bar{0}.0^4 716$
20	3.17305	$\bar{0}.000117$
22	4.5154	$\bar{0}.000167$
24	7.2005	$\bar{0}.000266$
26	13.6788	$\bar{0}.0005055$
28	30.2631	$\bar{0}.001118$
29	3.9504	$\bar{0}.000146$
29.4	$\bar{74}.502$	0.002753
29.8	$\bar{198}.513$	0.007336
30.2	$\bar{201}.406$	0.00744
30.6	81.154	0.002999
31	3.5746	0.000132
33	16.9632	$\bar{0}.000627$
36	4.7118	$\bar{0}.000174$
40	1.5976	$\bar{0}.0^4 5905$
44	0.7416	$\bar{0}.0^4 274$
52	0.24725	$\bar{0}.0^5 915$

第 2 表 (6)

$\rho = 60$		
τ	u/u_0	u
0	1—	$\bar{0}.0^{\circ}46$
12	1.0849	$\bar{0}.0^{\circ}50$
20	1.26495	$\bar{0}.0^{\circ}585$
30	1.7748	$\bar{0}.0^{\circ}82$
40	3.2227	$\bar{0}.0^{\circ}149$
45	5.1700	$\bar{0}.0^{\circ}24$
50	10.4361	$\bar{0}.0^{\circ}48$
52	15.4805	$\bar{0}.0^{\circ}72$
54	25.657	$\bar{0}.000119$
56	50.467	$\bar{0}.0002335$
57	76.7365	$\bar{0}.000355$
58	114.255	$\bar{0}.000529$
58.5	113.686	$\bar{0}.000526$
59	7.69385	$\bar{0}.0^{\circ}356$
59.5	$\bar{4}26.048$	0.001971
60	$\bar{9}00.3125$	0.004166
60.5	$\bar{4}38.057$	0.002027
61	$\bar{7}.31865$	0.0^{\circ}339
61.5	99.826	$\bar{0}.000462$
62	102.240	$\bar{0}.000473$
63	67.719	$\bar{0}.000313$
64	43.387	$\bar{0}.000201$
66	21.0415	$\bar{0}.0497$
68	11.7526	$\bar{0}.0^{\circ}54$
70	7.4220	$\bar{0}.0^{\circ}34$
80	1.6391	$\bar{0}.0^{\circ}76$
100	0.31575	$\bar{0}.0^{\circ}15$
120	0.11103	$\bar{0}.0^{\circ}51$

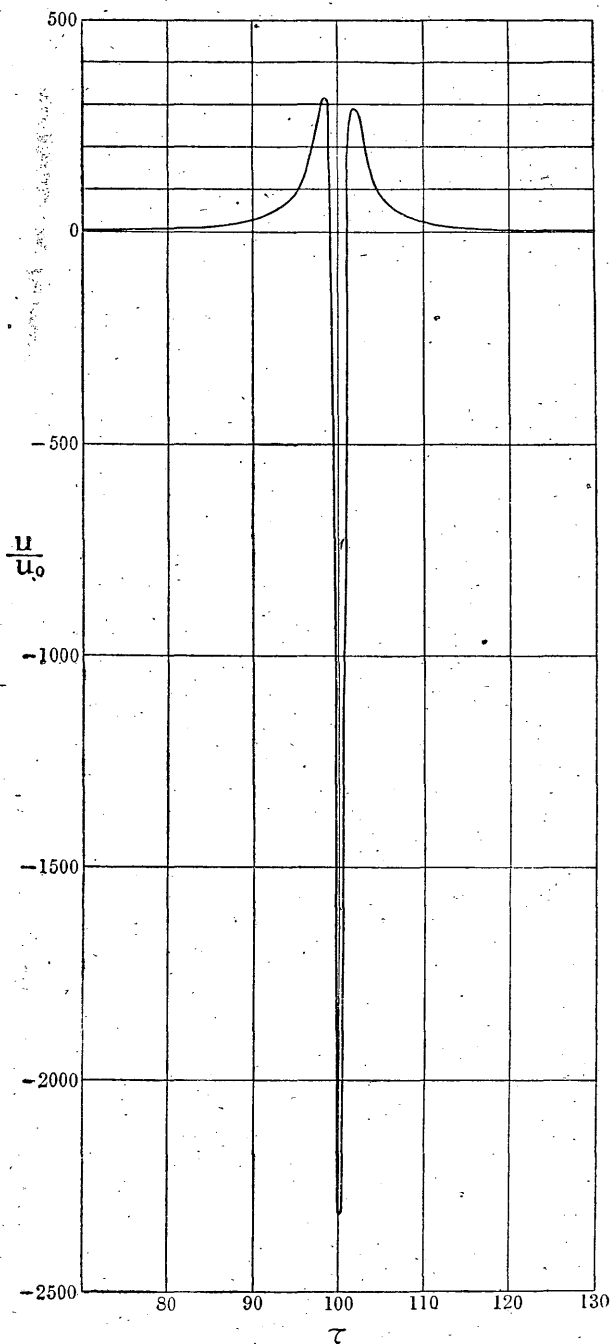
第 3 圖 (4) $\rho = 10$



第2表 (7) $\rho=100$

$\rho=100$		
τ	u/u_0	u
0	1—	$\bar{0}.0^510$
20	1.0850	$\bar{0}.0^510$
40	1.4167 ₆	$\bar{0}.0^513$
60	2.4386	$\bar{0}.0^524$
70	3.8547 ₅	$\bar{0}.0^539$
80	7.6662	$\bar{0}.0^577$
83	10.2416	$\bar{0}.0^410$
87	16.6531	$\bar{0}.0^417$
89	22.6167 ₆	$\bar{0}.0^423$
90	26.9433	$\bar{0}.0^427$
92	40.5611 ₆	$\bar{0}.0^4405$
94	68.1782	$\bar{0}.0^468$
96	135.860	$\bar{0}.000136$
98	310.252	$\bar{0}.000310$
99	12.6913	$\bar{0}.0^413$
99.5	$\overline{1190.050}$	$\bar{0}.00190$
100	$\overline{2300.272}$	$\bar{0}.00230$
100.5	$\overline{1210.055}$	$\bar{0}.00121$
101	12.3162	$\bar{0}.0^412$
102	290.243	$\bar{0}.000290$
104	124.083	$\bar{0}.000124$
106	60.053 ₆	$\bar{0}.0^460$
108	34.3860	$\bar{0}.0^434$
110	21.6160	$\bar{0}.0^422$
115	9.4770	$\bar{0}.0^595$
120	5.1227 ₆	$\bar{0}.0^551$
130	1.9815 ₆	$\bar{0}.0^520$
150	0.6391	$\bar{0}.0^664$
200	0.1013	$\bar{0}.0^910$

第3圖 (7) $\rho=100$

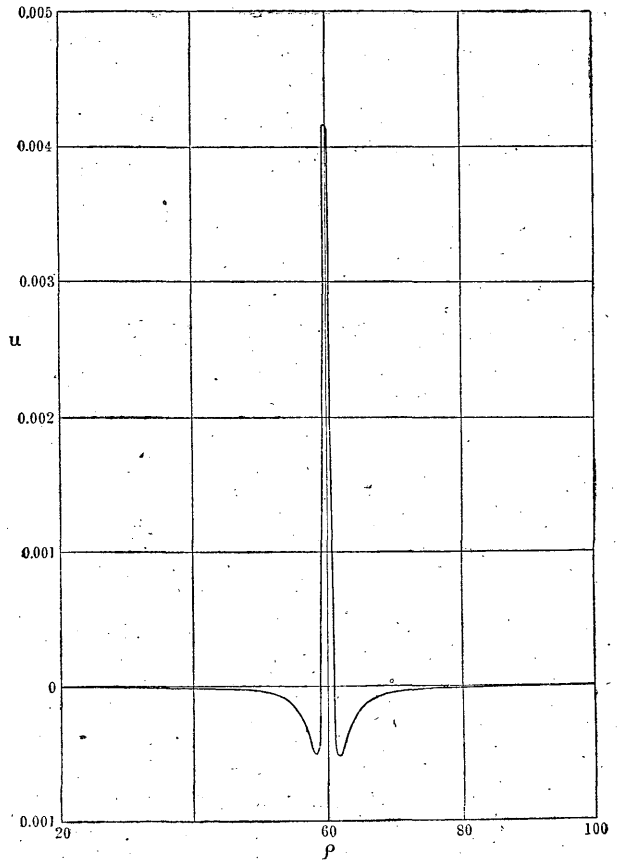


或る時刻に於ける u の場所的變化の一例は第 3 表及び第 4 圖に示したが、矢張り中心から出た P 波がその時刻に到達すべき距離に極めて著しい最大變位が起る事が分る。

第 3 表

$\tau=60$		
ρ	u/u_0	u
0	0—	0—
8	0.0003	$\bar{0}.0^{\circ}64$
16	0.0059	$\bar{0}.0^{\circ}14$
25	0.0441	$\bar{0}.0^{\circ}28$
35	0.2652	$\bar{0}.0^{\circ}62$
40	0.6343	$\bar{0}.0^{\circ}99$
45	1.6282	$\bar{0}.0^{\circ}1785$
50	4.9972	$\bar{0}.0^{\circ}40$
54	16.635	$\bar{0}.0^{\circ}1055$
56	37.600	$\bar{0}.0^{\circ}213$
57	60.923	$\bar{0}.0^{\circ}329$
58	95.3605	$\bar{0}.0^{\circ}4885$
58.5	94.741	$\bar{0}.0^{\circ}473$
59	7.1939	$0.0^{\circ}35$
59.5	430.85	0.002044
60	900.35	0.004166
60.5	433.25	0.001955
61	8.8198	$\bar{0}.0^{\circ}39$
61.5	119.248	$\bar{0}.0^{\circ}515$
62	121.772	$\bar{0}.0^{\circ}511$
63	84.341	$\bar{0}.0^{\circ}337$
64	57.138	$\bar{0}.0^{\circ}218$
66	31.064	$\bar{0}.0^{\circ}108$
70	13.834	$\bar{0}.0^{\circ}40$
80	5.1938	$\bar{0}.0^{\circ}10$
90	3.2325	$\bar{0}.0^{\circ}45$
100	2.4386	$\bar{0}.0^{\circ}25$
120	1.7771	$\bar{0}.0^{\circ}10$

第 4 圖



5. 初期變位と初期速度を與へた問題

前節迄には専ら初期變位を與へた場合を取扱つたが、同様にして初速度を與へて後の運動を論ずる問題も成り立つ。然し本節では $t=0$ に於て變位と速度を同時に與へた場合を取扱はう。其の場合には時間に関する因子に e^{ipt} , e^{iqt} の外に尙 e^{-ipt} , e^{-iqt} を含むものが入つて来る。

i $\omega_r=0$ の波

第 3 節 (17) 式に對應して

$$\left. \begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{nJ_{n-1/2}(hr) - (n+1)J_{n+3/2}(hr)\} \left\{ \frac{A_{mn}(h)}{h} e^{i\nu ht} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\overline{A_{mn}}(h)}{h} e^{-i\nu ht} \right\} dh + \frac{n(n+1)}{m} \int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} \left\{ \frac{C_{mn}(h)}{h} e^{i\mathfrak{B}ht} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\overline{C_{mn}}(h)}{h} e^{-i\mathfrak{B}ht} \right\} dh \right] \cdot P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), \\
 v &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} \left\{ \frac{A_{mn}(h)}{h} e^{i\nu ht} + \frac{\overline{A_{mn}}(h)}{h} e^{-i\nu ht} \right\} dh \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m} \int_0^\infty \{(n+1)J_{n-1/2}(hr) - nJ_{n+3/2}(hr)\} \left\{ \frac{C_{mn}(h)}{h} e^{i\mathfrak{B}ht} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\overline{C_{mn}}(h)}{h} e^{-i\mathfrak{B}ht} \right\} dh \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \\
 w &= \frac{m}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\begin{array}{ccc} & \text{同} & \text{上} \end{array} \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi),
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と採る。 $t=0$ に於ける條件を

$$\left. \begin{aligned}
 u &= -\frac{f(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), & \frac{du}{dt} &= -\frac{F(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), \\
 v &= -\frac{g(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), & \frac{dv}{dt} &= -\frac{G(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \\
 w &= \frac{mg(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi), & \frac{dw}{dt} &= \frac{mG(r)}{(2n+1)\sqrt{r}} \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi),
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とする。但し f, g, F, G は夫々任意に與へられた r の函数である。

(30) より $t=0$ に於ける之等の値を作ると、

$$\left. \begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{nJ_{n-1/2}(hr) - (n+1)J_{n+3/2}(hr)\} \frac{A_{mn} + \overline{A_{mn}}}{h} dh \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n+1)}{m} \int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} \frac{C_{mn} + \overline{C_{mn}}}{h} dh \right] P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), \\
 v &= -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} \frac{A_{mn} + \overline{A_{mn}}}{h} dh \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m} \int_0^\infty \{(n+1)J_{n-1/2}(hr) - nJ_{n+3/2}(hr)\} \frac{C_{mn} + \overline{C_{mn}}}{h} dh \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \\
 w &= \frac{m}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\begin{array}{ccc} & \text{同} & \text{上} \end{array} \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi), \\
 \frac{du}{dt} &= -\frac{i}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{nJ_{n-1/2}(hr) - (n+1)J_{n+3/2}(hr)\} V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) dh \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n+1)}{m} \int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}}) dh \right] P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi),
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{i}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^8 \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) dh \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \int_0^\infty \{(n+1)J_{n-1/2}(hr) - nJ_{n+3/2}(hr)\} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}}) dh \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{im}{(2n+1)\sqrt{r}} \left[\begin{array}{cc} & \text{同} \quad \text{上} \\ & \left[\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi). \right] \end{array} \right] \end{aligned} \right\}$$

之と (31) を比較して

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{n(A_{mn} + \overline{A_{mn}}) + \frac{n(n+1)}{m}(C_{mn} + \overline{C_{mn}})}{h} J_{n-1/2}(hr) dh \\ & - \int_0^\infty \frac{(n+1)(A_{mn} + \overline{A_{mn}}) - \frac{n(n+1)}{m}(C_{mn} + \overline{C_{mn}})}{h} J_{n+3/2}(hr) dh = f(r), \\ & \int_0^\infty \frac{(A_{mn} + \overline{A_{mn}}) + \frac{n+1}{m}(C_{mn} + \overline{C_{mn}})}{h} J_{n-1/2}(hr) dh \\ & + \int_0^\infty \frac{(A_{mn} + \overline{A_{mn}}) - \frac{n}{m}(C_{mn} + \overline{C_{mn}})}{h} J_{n+3/2}(hr) dh = g(r), \\ & \int_0^\infty \{nV(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) + \frac{n(n+1)}{m} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}})\} J_{n-1/2}(hr) dh \\ & - \int_0^\infty \{(n+1)V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) - \frac{n(n+1)}{m} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}})\} J_{n+3/2}(hr) dh = iF(r), \\ & \int_0^\infty \{V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) + \frac{n+1}{m} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}})\} J_{n-1/2}(hr) dh \\ & + \int_0^\infty \{V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) - \frac{n}{m} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}})\} J_{n+3/2}(hr) dh = iG(r), \end{aligned}$$

或ひは少し變形すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h \cdot \frac{(A_{mn} + \overline{A_{mn}}) + \frac{n+1}{m}(C_{mn} + \overline{C_{mn}})}{h^2} J_{n-1/2}(hr) dh = \frac{1}{2n+1} \{f(r) + (n+1)g(r)\}, \\ & \int_0^\infty h \cdot \frac{(A_{mn} + \overline{A_{mn}}) - \frac{n}{m}(C_{mn} + \overline{C_{mn}})}{h^2} J_{n+3/2}(hr) dh = \frac{1}{2n+1} \{f(r) - ng(r)\}, \\ & \int_0^\infty h \cdot \frac{V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) + \frac{n+1}{m} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}})}{h} J_{n-1/2}(hr) dh = \frac{i}{2n+1} \{F(r) + (n+1)G(r)\}, \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty h \cdot \frac{V(A_{mn} - \overline{A_{mn}}) - \frac{n}{m} \mathfrak{B}(C_{mn} - \overline{C_{mn}})}{h} J_{n+3/2}(hr) dh = \frac{-i}{2n+1} \{F(r) - nG(r)\},$$

故に Hankel の可逆式を使い、第 3 節に於ける如く計算すれば、

$$\begin{aligned} A_{mn} + \overline{A_{mn}} &= \frac{h^2}{(2n+1)^2} \left[\int_0^\infty \xi f(\xi) \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + n(n+1) \int_0^\infty \xi g(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right], \\ C_{mn} + \overline{C_{mn}} &= \frac{mh^2}{(2n+1)^2} \left[\int_0^\infty \xi f(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \xi g(\xi) \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right], \\ A_{mn} - \overline{A_{mn}} &= \frac{ih}{(2n+1)^2 V} \left[\int_0^\infty \xi F(\xi) \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + n(n+1) \int_0^\infty \xi G(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right], \\ C_{mn} - \overline{C_{mn}} &= \frac{imh}{(2n+1)^2 \mathfrak{B}} \left[\int_0^\infty \xi F(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \xi G(\xi) \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right]. \end{aligned}$$

之を解けば、

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{h}{2(2n+1)^2} \left[\int_0^\infty \xi \left\{ hf(\xi) + \frac{i}{V} F(\xi) \right\} \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + n(2n+1) \int_0^\infty \xi \left\{ hg(\xi) + \frac{i}{V} G(\xi) \right\} \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right], \\ \overline{A_{mn}} &= \frac{h}{2(2n+1)^2} \int_0^\infty \xi \left\{ hf(\xi) - \frac{i}{V} F(\xi) \right\} \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\ &\quad + n(n+1) \int_0^\infty \xi \left\{ hg(\xi) - \frac{i}{V} G(\xi) \right\} \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi, \\ C_{mn} &= \frac{mh}{2(2n+1)^2} \left[\int_0^\infty \xi \left\{ hf(\xi) + \frac{i}{\mathfrak{B}} F(\xi) \right\} \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \xi \left\{ hg(\xi) + \frac{i}{\mathfrak{B}} G(\xi) \right\} \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right], \\ \overline{C_{mn}} &= \frac{mh}{2(2n+1)^2} \left[\int_0^\infty \xi \left\{ hf(\xi) - \frac{i}{\mathfrak{B}} F(\xi) \right\} \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \xi \left\{ hg(\xi) - \frac{i}{\mathfrak{B}} G(\xi) \right\} \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \right], \end{aligned} \quad (32)$$

之等を (30) に代入すれば、結局次の解に到達する。

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{(2n+1)^2\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{nJ_{n-1/2}(hr) - (n+1)J_{n+3/2}(hr)\} H(h, t) dh \right. \\
 &\quad \left. + n(n+1) \int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} K(h, t) dh \right] P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi), \\
 v &= -\frac{1}{(2n+1)^2\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty \{J_{n-1/2}(hr) + J_{n+3/2}(hr)\} H(h, t) dh \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \{(n+1)J_{n-1/2}(hr) - nJ_{n+3/2}(hr)\} K(h, t) dh \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \cos(m\phi), \\
 w &= \frac{m}{(2n+1)^2\sqrt{r}} \left[\begin{array}{cc} \text{同} & \text{上} \end{array} \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin(m\phi),
 \end{aligned} \tag{33}$$

茲に、

$$\begin{aligned}
 H(h, t) &= h \cos(Vht) \int_0^\infty \xi f(\xi) \{nJ_{n-1/2}(h\xi) - (n+1)J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{V} \sin(Vht) \int_0^\infty \xi F(\xi) \{ \quad \quad \quad \} d\xi \\
 &\quad + n(n+1) h \cos(Vht) \int_0^\infty \xi g(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
 &\quad - n(n+1) \frac{1}{V} \sin(Vht) \int_0^\infty \xi G(\xi) \{ \quad \quad \quad \} d\xi, \\
 K(h, t) &= h \cos(\mathfrak{B}ht) \int_0^\infty \xi f(\xi) \{J_{n-1/2}(h\xi) + J_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{V} \sin(\mathfrak{B}ht) \int_0^\infty \xi F(\xi) \{ \quad \quad \quad \} d\xi \\
 &\quad + h \cos(\mathfrak{B}ht) \int_0^\infty \xi g(\xi) \{(n+1)J_{n-1/2}(h\xi) - nJ_{n+3/2}(h\xi)\} d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{V} \sin(\mathfrak{B}ht) \int_0^\infty \xi G(\xi) \{ \quad \quad \quad \} d\xi.
 \end{aligned} \tag{34}$$

II $\Delta=0$ の波

やはり甚だ簡単で初期条件を $t=0$ で

$$\begin{aligned}
 u &= 0, \\
 v &= \frac{m}{n(n+1)\sqrt{r}} f(r) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(m\phi), \\
 w &= \frac{-1}{n(n+1)\sqrt{r}} f(r) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \sin(m\phi),
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{m}{n(n+1)\sqrt{r}} F(r) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(m\phi), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{-1}{n(n+1)\sqrt{r}} F(r) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \sin(m\phi), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

とすると,

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \\ v &= \frac{m}{n(n+1)\sqrt{r}} \int_0^\infty J_{n+1/2}(hr) \{B_{mn} e^{i\mathfrak{B}ht} + \overline{B_{mn}} e^{-i\mathfrak{B}ht}\} dh \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(m\phi), \\ w &= \frac{-1}{n(n+1)\sqrt{r}} \int_0^\infty J_{n+1/2}(hr) \{B_{mn} e^{i\mathfrak{B}ht} + \overline{B_{mn}} e^{-i\mathfrak{B}ht}\} dh \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \sin(m\phi), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

に於て

$$\left. \begin{aligned} B_{mn} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi \left\{ hf(\xi) - \frac{i}{\mathfrak{B}} F(\xi) \right\} J_{n+1/2}(h\xi) d\xi, \\ \overline{B_{mn}} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi \left\{ hf(\xi) + \frac{i}{\mathfrak{B}} F(\xi) \right\} J_{n+1/2}(h\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

となる事が證明出来る。依つて

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \\ v &= \frac{m}{n(n+1)\sqrt{r}} \left[\int_0^\infty h J_{n+1/2}(hr) \cos(\mathfrak{B}ht) dh \int_0^\infty \xi f(\xi) J_{n+1/2}(h\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty J_{n+1/2}(hr) \sin(\mathfrak{B}ht) dh \int_0^\infty \xi F(\xi) J_{n+1/2}(h\xi) d\xi \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos(m\phi), \\ w &= \frac{-1}{n(n+1)\sqrt{r}} \left[\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \sin(m\phi). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

をる得。

6. 要 約

以上述べ來つた處を括めると、深發地震の震源論に對し、從來の様な面上で條件を與へる立場を一層擴張し、媒質内到處の初期の狀況を與へた場合の基礎理論を建てたものであつて特に球座標に依る解式を示し、尙簡単な一例を添へた。今回は地震學上の具體的な問題には全然觸れなかつたが之等は續報に於て追々論ずる積りである。又純理論としても必ずしも十分に一般的とは言へない。即ち、例へば u, v, w の初期値が全然獨立には與へては居らない事や、 θ, φ に關する形式が指定されて居る事は甚しく不滿である⁽¹⁾。又夫を別としても解の形式をもう一步進めると更に便

(1) 之の難點を切り抜ける一つの方法として河角博士の御教示下された方法は波動方程式の初期値問題に關する Poisson の公式を弾性波動論の場合に擴張した Love の公式 (A. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4th. ed. (1934) p. 302) を繰返し使ふ事に依り數值的に積分する事である。

利な形で得る見込みがある。然し夫には尙甚だ複雑冗長な計算を要するから他の諸問題と共に後の機会に譲り度い。

この計算は私が水戸測候所在勤中始めたものであるが、当初から始終興味を寄せて、御激勵下さつた高谷沖繩氣象臺長に心から感謝申し上げます。又途中遭遇した種々の疑問に對し御教示を賜り御解決戴いた河角博士と長兄廣野技師、及び日頃御鞭撻頂く本多博士はじめ、本臺地震課の諸學兄の御厚情に深謝の意を表し、更に面倒な計算や製圖に御助力下さつた鈴木、高見兩嬢にも御禮申し上げる次第である。

(昭和 16 年 12 月 8 日、於中央氣象臺)