

# 報 時 震 驗

## 第 12 卷 第 2 號

### 水平等方彈性體のレーレー波に就いて

本 間 正 作\*

#### §1. 緒 言

最近、那須博士と表理學士<sup>(1)</sup>は、人工衝擊に依り地表附近の或る水成岩層中の彈性波速度を精密に測定された結果、波が水平方向に進む速さは鉛直方向に進む速さより著しく大きく、約 1 倍 8 分にも達し、恰も強異方性彈性體の様な状態にある事を示された。この事は飯田理學士<sup>(2)</sup>の測定にかゝる豊富な材料からも確認されてゐる。この事實は地震波動觀測の結果を解釋する上に、色々な點で考慮しなければならぬ處と思はれる。例へば表面反射に及ぼす影響、表面波に及ぼす影響等を吟味する必要がある。

茲では差し當つてレーレー波に就いて研究した結果を報告致し度いと思ふ。尤も強い異方性は表面近邊に限られたものであらうから、等方半無限彈性體の上に割合に薄い異方性の層がある場合とか、深さと共に異方性が減少する様な場合を考へるのが適當な事と思はれるが、それ等は取扱ひ上複雑になる事は免れないから、一先づ等質な異方彈性體の境界平面を傳はる平面レーレー波を調べて大凡の模様を窺ふに止め其の他の問題は總て他の機會に譲り度いと思ふ。

#### §2. 彈性方程式

異方彈性體の彈性波を地震波として取扱つたものには例へば松澤博士<sup>(3)</sup>のものもあるが、今の場合は問題が違ふので、茲で必要なのは水平の方向には等方的であるが鉛直向きに性質が異つた場合、即ち水平等方體 (horizontally isotropic body) の場合である。この様な場合の彈性實體波に就いては古く M. P. Rudzki<sup>(4)</sup> の有名な研究があるから、その基礎方程式を借りる事にすればよろし

\* 中央氣象臺

(1) 那須信治、表俊一郎；池邊式檢速儀に依る彈性波傳播速度の測定 (其一)、地震, 13. (昭和 16 年), 91

(2) 飯田級事；振動方法に依る岩石の彈性率測定, 地震, 13, (昭和 16 年), 299

(3) T. Matuzawa; On the Relative Magnitude of the Preliminary and the Principal Portion of Earthquake Motions, Jap. Jour. Astro. Geophys., 4, (1926), 1-34.

(4) M. P. Rudzki; Von der Gestalt elastischer Wellen in Gesteinen, Gerland Beitr. z. Geophys., 3, (1898) 519.

之は六方晶系 (Hexagonal System) の結晶體の彈性運動方程式に他ならぬ。(彈性學書參照)

い. Rudzki とは少し違つた記號を使い, 應力と變形の關係は,  $z$  を鉛直軸とする時

$$\left. \begin{aligned} X_x &= M_1(x_x + y_y) - 2N_2 y_y + (M_3 - 2N_1) z_z, \\ Y_y &= M_1(x_x + y_y) - 2N_2 x_x + (M_3 - 2N_1) z_z, \\ Z_z &= M_2 z_z + (M_3 - 2N_1)(x_x + y_y), \\ Y_z &= N_1 y_z, \\ Z_x &= N_1 x_z, \\ X_y &= N_2 x_y, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と表される<sup>(1)</sup>. 即ち五つの獨立な彈性係數  $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2$  がある. 而して等方體の場合にはラーメの彈性係數  $\lambda, \mu$  に對して,

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = M_3 = \lambda + 2\mu, \\ N_1 &= N_2 = \mu, \end{aligned}$$

となるのである.

運動方程式は密度を  $\rho$  として

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x}(X_x, Y_x, Z_x) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y, Y_y, Z_y) + \frac{\partial}{\partial z}(X_z, Y_z, Z_z). \dots\dots\dots (2)$$

只今の論文では  $x$  方向に傳はる一次元的平面レーレー波を考へ,  $y$  方向には變化がないものとする. 又鉛直軸は物質の内部に向つて正に採り, 自由表面は  $z=0$  に在るとする. 更に又  $y$  方向の變位  $v$  は無いものとする, (1) と (2) より運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (M_3 - N) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (M_3 - N) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる. 但し  $N$  とあるは (1) に於ける  $N_1$  であつて,  $N_2$  は二次元の問題には關係して來ない. 即ち話は四個の彈性係數で決る. この方程式は一般には等方質の場合の様に發散量 (dilatation) と廻轉量 (rotation) とに分けると云ふわけにゆかない. そこで波動の速度を  $V$  として

$$(u, w) \propto e^{im(x-Vt)} \dots\dots\dots (4)$$

と假定して (3) 代入すると,

$$\left. \begin{aligned} -m^2 V^2 \rho u &= -m^2 M_1 u + N \frac{d^2 u}{dz^2} + im(M_3 - N) \frac{dw}{dz}, \\ -m^2 V^2 \rho w &= im(M_3 - N) \frac{du}{dz} - m^2 N w + M_2 \frac{d^2 w}{dz^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(1) 云ふ迄もなく  $x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, y_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$  等. 但し  $u, v, w$  は變位成分. 尙 Rudzki の彈性係數と比較するには  $M_1 \rightarrow A, M_2 \rightarrow C, M_3 \rightarrow F + 2L, N_1 \rightarrow L, N_2 \rightarrow N$  と置けばよい.

故に

$$u = Ae^{-\sigma mz}, \quad w = iBe^{-\sigma mz} \dots\dots\dots (6)$$

と置けば、

$$\left. \begin{aligned} (M_1 - V^2\rho - \sigma^2 N)A &= \sigma(M_3 - N)B, \\ \sigma(M_3 - N)A &= (\sigma^2 M_2 + V^2\rho - N)B. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

之が  $A, B$  が共に 0 でなくとも成立する条件として

$$M_2 N \sigma^4 + \{M_3^2 - 2M_3 N - M_1 M_2 + (M_2 + N)V^2\rho\}\sigma^2 + (M_1 - V^2\rho) \cdot (N - V^2\rho) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

を得る. 之を  $\sigma^2$  に關する二次方程式として解いた二根を  $\xi^2, \eta^2$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} u &= Ae^{-m\xi z} + \mathfrak{A}e^{-m\eta z}, \\ w &= iBe^{-m\xi z} + i\mathfrak{B}e^{-m\eta z}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる<sup>(1)</sup>. 但し  $\xi$  と  $\eta$  は正とし、又  $A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  は常數であるが (7) に依り

$$\left. \begin{aligned} (M_1 - V^2\rho - \xi^2 N) \cdot A &= \xi(M_3 - N)B, & \xi(M_3 - N)A &= (\xi^2 M_2 + V^2\rho - N) \cdot B, \\ (M_1 - V^2\rho - \eta^2 N)\mathfrak{A} &= \eta(M_3 - N)\mathfrak{B}, & \eta(M_3 - N)\mathfrak{A} &= (\eta^2 M_2 + V^2\rho - N)\mathfrak{B}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となる筈である.

次に表面で應力 0 と云ふ條件は (1) に依り、 $z=0$  で

$$\left. \begin{aligned} Z_z &= M_2 \frac{\partial w}{\partial z} + (M_3 - 2N) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ Z_x &= N \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる. (9) を代入して整理すると、

$$\left. \begin{aligned} (M_3 - 2N)(A + \mathfrak{A}) - M_2(\xi B + \eta \mathfrak{B}) &= 0, \\ \xi A + \eta \mathfrak{A} + B + \mathfrak{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(10) に於ける左側の 2 式と (12) の 2 式とより  $A, \mathfrak{A}, B, \mathfrak{B}$  を消去すると、各係數の作る行列式を 0 と置いて、

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 & 1 \\ M_3 - 2N & M_3 - 2N & -\xi M_2 & -\eta M_2 \\ M_1 - V^2\rho - \xi^2 N & 0 & -\xi(M_3 - N) & 0 \\ 0 & M_1 - V^2\rho - \eta^2 N & 0 & -\eta(M_3 - N) \end{vmatrix} = 0$$

之を展開し、(8) より出る關係式

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{M_2 N} [-M_3^2 + 2M_3 N + M_1 M_2 - (M_2 + N)V^2\rho],$$

(1) 等方體の時は  $M_1 = M_2 = M_3 = M$  と置くと、(8) は  $[M\sigma^2 - (M - V^2\rho)]\{N\sigma^2 - (N - V^2\rho)\} = 0$  と因數分解出来るから、例へば  $\xi^2 = 1 - \frac{V^2\rho}{M}$ ,  $\eta^2 = 1 - \frac{V^2\rho}{N}$  となる.

$$\xi^2 \eta^2 = \frac{1}{M_2 N} (M_1 - V^2 \rho) \cdot (N - V^2 \rho)$$

を利用して變形すると結局

$$(\xi - \eta) \cdot [V^4 \rho^2 - (M_1 + M_2 \xi \eta) V^2 \rho + \xi \eta \{M_1 M_2 - (M_3 - 2N)^2\}] = 0,$$

或ひは

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \alpha N, & M_2 &= \beta N, & M_3 &= \gamma N, \\ \tau &= V^2 \rho / N = (V/V_s)^2; & (V_s: & S \text{ 波の速度}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

なる記號を使へば、次の様にも書ける。

$$(\xi - \eta) \{ \tau^2 - (\alpha + \beta \xi \eta) \tau + \xi \eta \{ \alpha \beta - (\gamma - 2)^2 \} \} = 0. \dots\dots\dots (14)$$

(14) が  $\xi = \eta$  に依り満足されて居るものとすれば、(9) の様な一般解は成立しないで、

$$u = A e^{-m \xi z} + \mathfrak{A} (z e^{-m \xi z}), \quad w = i [B e^{-m \xi z} + \mathfrak{B} z e^{-m \xi z}]$$

と云ふ形式の解が之に代る事は微分方程式の議論から知られて居る所であるが、斯様に置いては運動方程式と境界條件を同時に満す様な  $A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  を決定出来ない事が證明されたから<sup>(1)</sup>、結局

$$\tau^2 - (\alpha + \beta \xi \eta) \tau + \xi \eta \{ \alpha \beta - (\gamma - 2)^2 \} = 0 \dots\dots\dots (15)^{(2)}$$

又 (8) は

$$\beta \sigma^4 + \{ \gamma (\gamma - 2) - 2 \alpha \beta + (\beta + 1) \tau \} \sigma^2 + (\alpha - \tau) (1 - \tau) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

と書かれる。(15) と (16) から  $\tau$  と  $\sigma$  (即ち  $\xi, \eta$ ) が求められ、次に (12) の二式と (10) の第一式から

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{A} : B : \mathfrak{B} &= - \left| \begin{array}{ccc|ccc} \eta & 1 & 1 & \xi & 1 & 1 \\ M_3 - 2N & -\xi M_2 & -\eta M_2 & M_3 - 2N & -\xi M_2 & -\eta M_2 \\ 0 & -\xi (M_3 - N) & 0 & M_1 - V^2 \rho - \xi^2 N & -\xi (M_3 - N) & 0 \end{array} \right| \\ & : \left| \begin{array}{ccc|ccc} \eta & \xi & 1 & \eta & 1 & \xi \\ M_3 - 2N & M_3 - 2N & -\eta M_2 & M_3 - 2N & -\xi M_2 & M_3 - 2N \\ 0 & M_1 - V^2 \rho - \xi^2 N & 0 & 0 & -\xi (M_3 - N) & M_1 - V^2 \rho - \xi^2 N \end{array} \right| \\ & = - \left| \begin{array}{ccc|ccc} \eta & 1 & 1 & \xi & 1 & 1 \\ \gamma - 2 & -\xi \beta & -\eta \beta & \gamma - 2 & -\xi \beta & -\eta \beta \\ 0 & -\xi (\gamma - 1) & 0 & \alpha - \tau - \xi^2 & -\xi (\gamma - 1) & 0 \end{array} \right| \\ & : \left| \begin{array}{ccc|ccc} \eta & \xi & 1 & \eta & 1 & \xi \\ \gamma - 2 & \gamma - 2 & -\eta \beta & \gamma - 2 & -\xi \beta & \gamma - 2 \\ 0 & \alpha - \tau - \xi^2 & 0 & 0 & -\xi (\gamma - 1) & \alpha - \tau - \xi^2 \end{array} \right| \end{aligned}$$

(1) 證明は冗漫になるから略す。

(2) 茲で  $\alpha = \beta = \gamma$  と置くと  $\xi^2 = 1 - \frac{\tau}{\alpha}, \eta^2 = 1 - \tau$  となり、(前頁, 脚註参照), 之を用ひると (15) の左邊は  $-\frac{\xi}{\xi - \gamma} (\alpha - 1) [(\tau - 2)^2 - 4\xi\eta]$  となる。處が  $(\tau - 2)^2 - 4\xi\eta = 0$  はとりも直さず等方體のレーレー波の特性方程式に外ならぬものである。

となるが、之は結局

$$\begin{aligned}
 A : \mathfrak{A} : B : \mathfrak{B} &= (\gamma - 1)(\gamma - 2 + \beta\eta^2)\xi \\
 &: (\xi - \eta)(\alpha - \tau - \xi^2)\beta - (\gamma - 1)(\gamma - 2 + \beta\xi\eta)\xi \\
 &: (\alpha - \tau - \xi^2)(\gamma - 2 + \beta\eta^2) \\
 &: -(\alpha - \tau - \xi^2)(\gamma - 2 + \beta\xi\eta) - (\gamma - 1)(\gamma - 2)(\xi - \eta)\xi \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

となるから (9) の様なレーレー波が決定する。

(15) と (16) から  $\tau$  等を求めるに當つては、少し方程式を變形した方が都合がよい。即ち (15) より

$$\tau^2 - \alpha\tau = [\beta\tau - \alpha\beta + (\gamma - 2)^2]\xi\eta$$

兩邊を平方して、(16) から出る

$$\xi^2\eta^2 = \frac{(\alpha - \tau)(1 - \tau)}{\beta} \dots \dots \dots (18)$$

を代入すると、幾らか計算した後に

$$\beta(\beta - 1)\tau^2 - \beta(2K + \beta - \alpha)\tau + K \cdot (K + 2\beta)\tau - K^2 = 0, \dots \dots \dots (19)$$

但し

$$K = \alpha\beta - (\gamma - 2)^2 \dots \dots \dots (20)$$

と云ふ形になる。之より  $\tau$  が分り、その値を (16) に入れて  $\xi, \eta$  が求められる。

(19) の左邊は  $\tau = 0$  の時  $-K^2 < 0$  となり、 $\tau = 1$  では  $\beta(\alpha - 1)$  となる事が分る。普通  $\alpha > 1$  と考へるべきであるから、 $\beta(\alpha - 1) > 0$  である。故に弾性係數の値に關せず 0 と 1 の間に (19) を滿すべき  $\tau$  の實根が存在する事は保證されて居り、之が即ち普通のレーレー波に相當するものである。

### § 3. 弾性係數の選擇及び數値例

茲に一應  $M_1, M_2, M_3$  及び  $N$  等の大きさの關係を調べて置く必要がある。一般に只今考へて居る様な水平等方弾性體內に於て、平面實體波が方向餘弦  $(l, m, n)$  なる方向に速度  $c$  で進行するものとすれば、

$$\begin{vmatrix}
 M_1l^2 + N_2^2m^2 + N_1n^2\rho - c^2 & (M_1 - N_2)lm & (M_3 - N_1)ln \\
 (M_1 - N_2)lm & M_1m^2 + N_2l^2 + N_1n^2 - \rho c^2 & (M_3 - N_1)mn \\
 (M_3 - N_1)ln & (M_3 - N_1)mn & M_2n^2 + N_1l^2 + N_1m^2 - \rho c^2
 \end{vmatrix} = 0$$

となる<sup>(1)</sup>。  $x, y$  面内だけを考へれば、 $m = 0$  故

$$(N_2l^2 + N_1n^2 - \rho c^2) \cdot [(M_1l^2 + N_1n^2 - \rho c^2)(M_2n^2 + N_1l^2 - \rho c^2) - (M_3 - N_1)^2l^2n^2] = 0^{(2)} \dots \dots (21)$$

(1) 例へば松澤博士、前出(1頁)に於て  $a_{11} = a_{22} = M_1, a_{12} = a_{21} = M_1 - 2N_2, a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = M_3 - 2N_1, a_{33} = M_2, a_{44} = a_{55} = N_1, a_{66} = N_2$  と置けばよい。

(2) 茲に  $N_1$  は今迄の  $N$  に當る。(3)式の所、参照。

$x$  方向に向ふ波を考えると,  $l=1, n=0$  と置いて,

$$c^2 = \frac{M_1}{\rho}, \frac{N_1}{\rho}, \frac{N_2}{\rho}$$

$z$  方向に向ふ波を考えると,  $n=1, l=0$  と置いて

$$c^2 = \frac{M_2}{\rho}, \frac{N_1}{\rho}, \frac{N_1}{\rho}$$

即ち  $M_1, M_2$  及び  $N (=N_1)$  は水平方向或ひは鉛直方向に進む  $P$  波や  $S$  波の速度に依つて定まるもので, 那須, 表兩氏の測定結果の様に,  $P$  波の水平速度が垂直速度の 1.8 倍と云ふ事は  $\sqrt{M_1} = 1.8\sqrt{M_2}$  と云ふ意味である.  $S$  波の速度は測定されて居ないから  $N$  と  $M$  の関係は知れてゐない.  $M_3$  を決めるには水平でも鉛直でもない方向の波の速度を求めればよい. 例へば水平と  $45^\circ$  の方向を考えると  $l=n=\frac{1}{\sqrt{2}}$  である. 依つて (21) の第二因數を 0 と置き

$$M_3 = N + \sqrt{4\rho^2 c^4 - 2(M_1 + M_2 + 2N)\rho c^2 + (M_1 + N)(M_2 + N)} \dots \dots \dots (22)$$

茲で  $c$  は  $45^\circ$  の方向の平面波速度である. 實測の結果の一つは各方向に於ける速度が分布が大體楕圓形に近い型を示すから長半徑が  $\sqrt{\frac{M_1}{\rho}}$ , 短半徑が  $\sqrt{\frac{M_2}{\rho}}$  の楕圓を考へ,  $45^\circ$  の方向の半徑が  $c$  を與へるものとする.

今楕圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

の  $45^\circ$  方向の半徑  $OP$  を考へると (第 1 圖),  $P$  では  $x=z$  であるから,  $x^2 = z^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ , 従つて  $a = \sqrt{\frac{M_1}{\rho}}, a = \sqrt{\frac{M_2}{\rho}}$  を考へて,

$$\rho c^2 = OP^2 = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} \dots \dots \dots (23)$$

となる. 之を (22) に入れて  $M_3$  を求めると, 例へば

$$\alpha = \frac{M_1}{N} = 3, \beta = \frac{M_2}{N} = 2 \text{ なら } \gamma = \frac{M_3}{N} = 2.08$$

又  $\alpha = \frac{M_1}{N} = 5, \beta = \frac{M_2}{N} = 3 \text{ なら } \gamma = \frac{M_3}{N} = 3.3$

となる, 要するに實測値から見れば略々

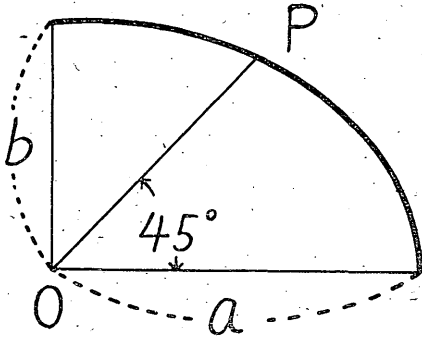
$$M_3 = M_2 \text{ 或ひは } \beta = \gamma \dots \dots \dots (24)$$

と考へてよい様である.

其處で前節に説いた處に従つて  $\alpha=3$  で,  $\beta(=\gamma)$  の値を色々變へ時, 及び  $\beta=\gamma=3$  で  $\alpha$  を色々變へた時の數値計算を行つた<sup>(1)</sup>. 結果は第 1 表及第 2 表に掲げてあり, その一部は第 2 圖及

(1) 那須, 表兩氏の結果の様に  $\sqrt{\alpha} \doteq 1.8\sqrt{\beta}$  と云ふと  $\alpha \doteq 3.2\beta$  となるが, この 3.2 は  $\nu$ - $\nu$ -波等と考へようとするに就いては餘り大き過ぎる様だから, 茲ではそんな大きな範圍迄は計算しなかつた. 又  $N$  に就いては決める材料が無いから假にこの二例を採つて見た次第である.

第 1 圖



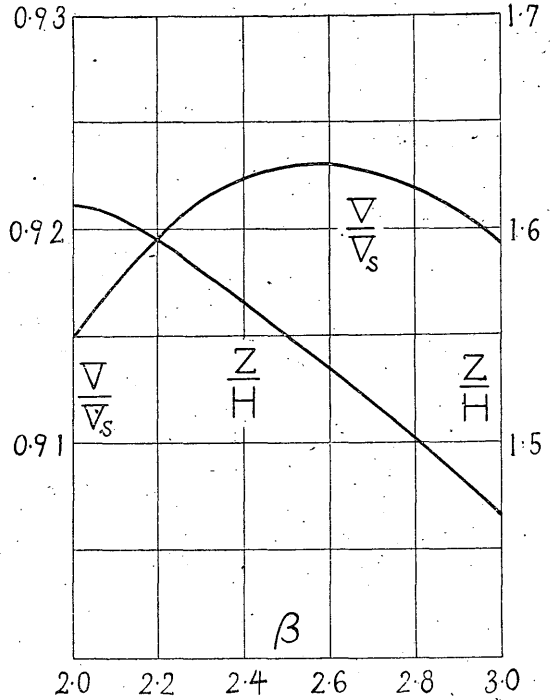
第 3 圖に圖示してある。之等に於て  $Z/H$  とあるは、地表面粒子の描く楕圓軌道の上  
下振幅と水平振幅の比で、レーレー波に於  
ける重要な量である。第 1 表の  $\beta=3.0$  及  
び第 2 表の  $\alpha=3.0$  は何れも  $\lambda=\mu$  なる  
等方體のレーレー波を示すものである。波  
動の速度  $V$  を見ると  $\alpha=3$  の方では  $\beta=$   
 $2.55$  附近に極大値を有し、その兩側では何

れも速度が遅いが、 $\beta=3$  の方では  $\alpha$  と共に  $V$  は増す一方である。 $Z/H$  は上記二種の何れに於  
ても等方體の場合が最も小さい値を採り、異方性が増す程大きく成つて居る。従つて、等方體の時

第 1 表

$\alpha=3, \beta=\gamma$						
$\beta$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\tau$	0.8375	0.8458	0.8506	0.8517	0.8493	0.8453
$V/V_s$	0.915	0.920	0.922	0.923	0.922	0.919
$\xi$	1.279	1.211	1.136	1.054	0.960	0.8475
$\eta$	0.328	0.321	0.322	0.332	0.354	0.393
$\mathcal{A}/A$	0.260	0.302	0.345	0.401	0.473	0.577
$B/A$	0.411	0.473	0.539	0.616	0.711	0.8475
$\mathcal{B}/A$	1.605	1.587	1.565	1.536	1.504	1.468
$Z/H$	1.61	1.595	1.565	1.54	1.50	1.47

第 2 圖  $\alpha=3, \beta=\gamma$



第 2 表

$\beta=\gamma=3$					
$\alpha$	3.0	3.2	3.5	4.0	5.0
$\tau$	0.8453	0.8577	0.8729	0.8931	0.9183
$V/V_s$	0.919	0.926	0.934	0.945	0.958
$\xi$	0.8475	0.968	1.117	1.321	1.654
$\eta$	0.393	0.344	0.299	1.069	1.452
$\mathcal{A}/A$	0.577	0.474	0.381	0.293	0.191
$B/A$	0.848	0.725	0.618	0.515	0.407
$\mathcal{B}/A$	1.468	1.530	1.621	1.762	2.020
$Z/H$	1.47	1.53	1.62	1.76	1.69

$V_s$  は  $S$  波速度,  $\sqrt{\frac{N}{\rho}}$

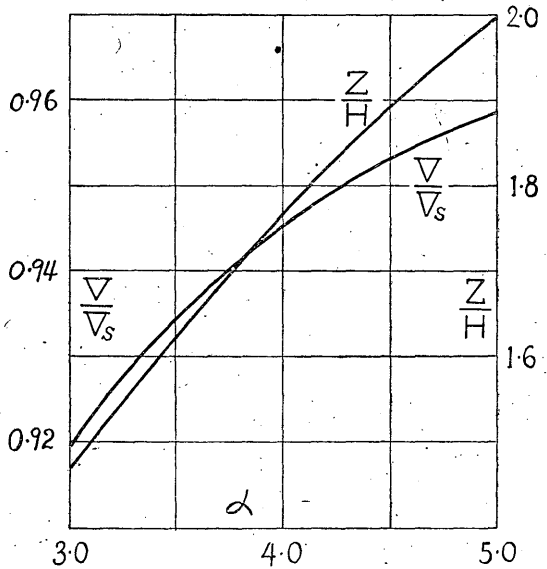
$Z/H$  の値が實測値の平均より大き過ぎると言ふ一般的觀測事實の解釋には、只今の様な異方體を考へる事は寧ろ不適當であるが、元來個々の實測値と云ふものは平均値とは甚だ異り、大小非常に區々な値を採つて居るものであつて、或る場所ではこの様な異方性の爲に  $Z/H$  が大き過ぎて觀測されると云ふ事もあるかもしれないのである。

§4. 特性方程式の根に関する一注意

地球物理學的問題は以上述べた事に一應盡きる様に思はれるが、本節には尙一般彈性學的興味から、(15), (16) 及び (19) 等の特性方程式の根に関する簡単な吟味を行ひ度いと思ふ。如何とならば (19) は  $\tau$  の 3 次式で、上記のレーレー

第 3 圖  $\beta = \gamma = 3$

波の根以外に、尙正の實根を持つ可能性があるからである。嘗つて P. Caloi は等方彈性體に就いて、斯様な正根を二つ求め、彼の驗測に、かゝる長週期表面波の解釋に、應用した事がある<sup>(1)</sup>。然し H. A. Lamb が夙に論じた如く、Caloi の用ひた根は無理方程式を解へに當つて入り來つた無縁根であつて、表面波を表はすものでは無い<sup>(2)</sup>。處が異方性彈性體に於ては、之に相當する根が合理的になる場合が生じ得る様に思ふのである。然し議論は地震學上の問題から大部逸脱する事になるから、茲には例を以て觸れ置くに止め、詳細な吟味は他日適當な誌上に譲り度いと思ふ。



先づ (19) の左邊は  $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$  として  $\tau = 0$  に於て  $-K^2$  (負),  $\tau = 1$  に於て  $\beta(\alpha - 1)$  故正となり、 $\tau = \infty$  で、 $\tau = -\infty$  正で負となるから、0 と 1 の間の正根以外の實根は共に負か、共に正で 0 と 1 の間にあるか、さもなければ共に正で 1 より大きい所にある (第 4 圖)。扱て、

$$\beta - \alpha \gg K, \quad 1 \gg K > 0$$

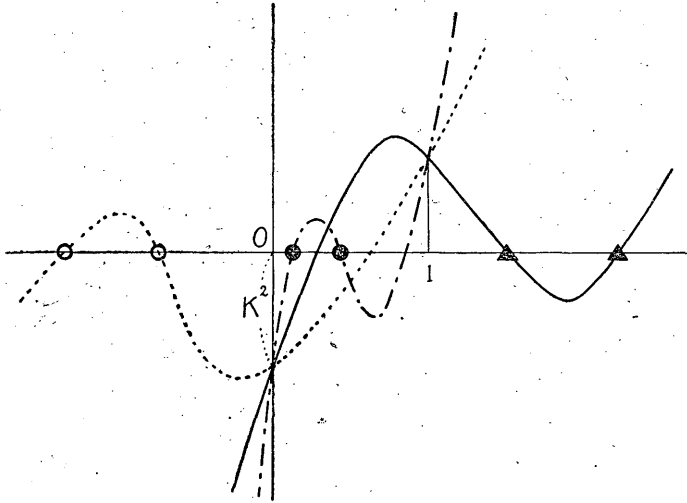
と假定しよう。然らば  $K = 0$  と置いた時 (19) から得られる根  $\tau_0 = \frac{\beta - \alpha}{\beta - 1}$  は普通のレーレー波を與

(1) P. Caloi ; Sur une onde longue oscillant dans le plan principal, Publ. Bur. Centr. Séism. Intern. A 15, (1937), p. 93.

(2) H. A. Lamb ; On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Phil. Trans, A 203, (1904), p. 1.



第 4 圖



へる。従つて  $\alpha > \beta$  ではレーレー波がない。他の根は  $\tau = 0$  の近所にあるから、 $O(K)$  の量と見積り (19) に代入すると  $O(K^2)$  の量は省略して

$$\beta(\beta - \alpha)\tau^2 - 2\beta K\tau + K^2 = 0$$

$$\tau_{1,2} = \frac{K}{\beta(\beta - \alpha)} [\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \beta(\beta - \alpha)}]$$

之等は何れも正の實根であつて 0 と 1 との間に存在する。依つてその資格は  $\tau_0$  と少しも異なる處が無い筈である。

この一例を以つて見ても斯様な弾性體内には別種のレーレー形表面波が存在し得る事は疑ひ無いと思ふものである。

### §5. 結論

水平等方弾性體の表面を傳はるレーレー波の性質を調べ、特にその速度及び上下動と水平動の比を計算した。實際問題としては表面附近だけが強異方性を呈するものと考へられるから、今回の結果を直ちに實用問題に當て嵌める事は恐らく當を得ないであらうが、從來この種の研究を餘り見かけないから、差當つて基本的な場合を取扱つた。其の他の問題も近い中に調べたいと思ふ。又弾性係數の條件次第では、別種のレーレー形表面波が二個存在する場合もある事を例を以つて示した。

(昭和 16 年 11 月 於、中央氣象臺)

〔後記〕 河角博士の御教示により Alfred Rosenblatt “Sur la propagation des ondes de Rayleigh dans les milieux transversalement isotropiques,” Revista de Ciencias, Lima, (1940), pp. 901-916 に同様な事を取扱つてあるのを知る事が出来た。但し之には形式的の解を與へてあるだけで數值的吟味は無い。