震波線の最深點を求める方法に就て

本　間　正　作*

1. 緒　言

1932 年に L. B. Slichter [1] は平面で境された地表の内部に於ける弾性波の速度が深さと共に變化する場合，觀測された走時曲線の形から震波線の通る最深點の深さ (Scheiteltiefe) を求める爲の Wiechert-Herglotz の解析法を更に一般化して，地下に速度の急變面や急變層がある爲に走時曲線に三重點が現はれる場合にも利用し得る方式を考へ，之を證明した．Slichter は地表を平面としたが，球面であつても同じ事が成り立つ事に就いては，昭和 10 年 (1935 年) 河角博士[2]が積分方程式を避けた初等的方法で證明され，之とは獨立に吉山理學士[3]も解析的方法で美事に證明された[4]

茲に述べようと思ふのは (i) Slichter の結果から球狀の場合に直接變換する方法と (ii) 一般に平面層でも球面層でも無く，もつと異つた形の層をなす場合の最深點の求め方に就てであり，(i) は上記諸氏の結果がある今日，餘り興味は無いが，結果の出し方が極めて簡單だから一つの別法として敢へて記する次第である．

2. Slichter の方法の擴張

複素數 $z=x+iy$ の平面で y 軸を地表とし，$x<0$ の區間を地中とし，原點 0 に震央があり，$y=0$ と $y=2\pi$ の間に澤山の觀測點があるとすれば震央距離は y となるから，$y=Y$ なる點に入射する震波線の最深點は Slichter の結果に從へば

$$-x_1=\frac{1}{\pi}\int_0^Y \cosh^{-1}\left(\frac{\sin i_{0,y}}{\sin i_{0,Y}}\right)dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

となる．但し $i_{0,y}$ は震央距離 y なる點に於て，震波線が地表に入射する角であり，$i_{0,Y}$ は $y=Y$ に於けるその値である．

次に

$$w=e^z \text{ 又は } z=\log w \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

なる變換で z 面を w 面に等角寫像すると，w を極座標で

---

* 中央氣象臺

(1) L. B. Slichter ; Physics, 3, (1932), p. 273.

(2) 河角廣，本間正作；地震，9，(昭和 12 年) p. 59. 尙ほこの論文には走時曲線解析法に就き綜合的報告がなされて居る．

(3) 吉山良一；地震，8，(昭和 11 年) p. 325.

(4) 尙ほ之等の結果を應用して不連續面の存否の確定度を吟味する事の實例に就ては筆者：地震，8，(昭和 11 年)，p. 592 參照．

と書いた時

$$x+iy=z=\log w=\log r+i\theta \quad \cdots\cdots(4)$$

となるから

$$x=\log r,\quad y=\theta \quad (2\pi>\theta\geqq 0) \quad \cdots\cdots(5)$$

である.

而して z 面上の $x=\text{constant}$ 即ち等速度面は, w 面上では $r=\text{constant}$ 即ち同心圓となり, 前者の震央距離 y は後者では震央角距離 θ に等しい. 依つて半徑1の圓を考へて之を地球と見做せば θ は長で測つた震央距離と考へてもよい. 次に震波線も寫像されるがその時等角寫像の性質により等速度面となす角度 i は不變である. 故に (5) を (1) に代入した時,

$$\log\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta}\cosh^{-1}\left(\frac{\sin i_{0,\theta}}{\sin i_{0,\Theta}}\right)d\theta \quad (6)$$

となる. 但し $\Theta=Y$ である. 之即ち球狀地球の場合の最深點の式に他ならぬ.

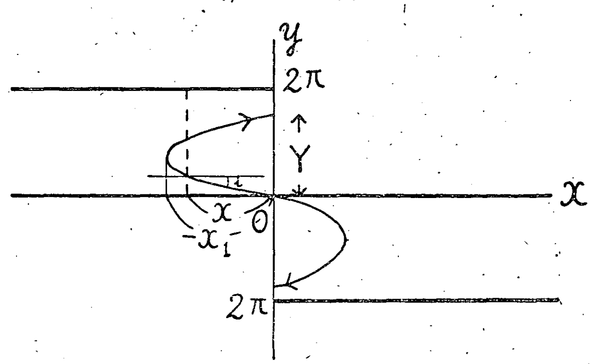
次に速度分布の方を考へるに Slichter の場合の震波線の法則は

$$\frac{\sin i}{V(x)}=\frac{\sin i_0}{V_0} \quad \cdots\cdots(7)$$

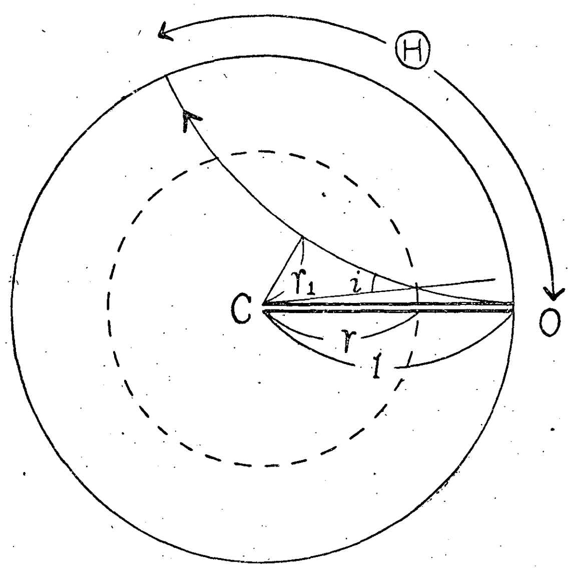
但し $V(x)$ は或る深さ $|x|$ に於ける層の速度の値, i はその層での震波線の入射角, 0 を附けたのは地表の値である. 一方球狀の時の法則は,

$$r\frac{\sin i}{v(r)}=\frac{\sin i_0}{v_0} \quad \cdots\cdots(8)$$

第 1 圖



第 2 圖



となる. 地表に於ける速度は何れの場合も同じで $V_0=v_0$ だから, 對應する震波線の最深點 $i=\frac{\pi}{2}$ に於ける關係から

$$\frac{1}{V(x)}=\frac{r}{v(r)}$$

又は (5) に依つて

$$V(x)=v(e^{x})\cdot e^{-x} \text{ 又は } (r)=rV(\log r) \quad \cdots\cdots(9)$$

である．從つて $V(x)$ なる速度分布に就て Slichter の議論が成立する場合に，而してその場合に限り球狀地狀の場合速度分布が $u(r)$ である時の議論が成立するのである．例へば Wiechert-Herglotz の方法が適用し得る條件

$$\frac{dV(x)}{dx}<0$$

即ち深さが深い程速度が增すと云ふ條件は，球の場合には

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dr}{dx}\cdot\frac{dV}{dr}=r\frac{d}{dr}\left\{\frac{v(r)}{r}\right\}=r\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r^2}\right\}=\frac{du}{dr}-\frac{v}{r}$$

に依り

$$\frac{dv(r)}{dr}<\frac{v(r)}{r}$$

と云ふ條件に相當するものである．從つて假令速度が深さと共に減つて居ても適用不能とは限らないわけである．

以上の事は Slichter が論じた樣に，或る深さに速度の急增する不連續面があつたり，速度の增し方が甚だ急であつたりして走時曲線に三重點が出來る場合にあつても成立する事は明らかな事で說明の便宜上普通の場合に就いて述べたに過ぎない．

茲に注意すべき事は Slichter の場合の速度一樣な有限幅の層は，球狀の時に速度一樣な層には對應しない事である．その事は (9) を見ればうなづける．從つて前者で直線狀の震波線でも後者では直線狀になるとは限らない筈である．

上述の方法と同じ樣にすると地球を取り卷く大氣中を傳播する音波の走時曲線から上空の音速分布を求める式も出る．この時は (2) の代りに

$$w=e^{-z} \text{ 又は } z=\log\frac{1}{w} \quad \cdots\cdots(10)$$

と置く．故に

$$x=\log\frac{1}{r},\quad y=-\theta \quad (2\theta>\theta\geqq 0) \quad \cdots\cdots(11)$$

地表が平面の時（第 1 圖で $x>0$ の區間を考へる），

$$x_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{-Y}\cosh^{-1}\left(\frac{\sin i_{0,-y}}{\sin i_{0,-Y}}\right)dy \quad \cdots\cdots(12)$$

が成立するから，前と同樣に

$$\log r_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta}\cosh^{-1}\left(\frac{\sin i_{0,\theta}}{\sin i_{0,\Theta}}\right)d\theta \quad \cdots\cdots(13)$$

となる.（地球の半徑は勿論 1 としてある.）この場合には

$$V(x)=v(e^{-x})\cdot e^{x},$$

なる速度分布に就き Slichter の議論が成立すれば，球狀大氣についても $v(r)$ と云ふ速度分布で成立するのである．W·echert-Herglotz の公式の適用條件可能の條件は

$$\frac{dV(x)}{dr}>0^{(1)}$$

であるから球の場合には

$$\frac{dv(r)}{dr}>\frac{v(r)}{r}$$

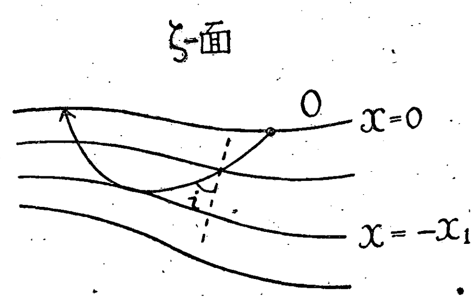
となる．即ち假令上空程音波速度が增す共．その增し方が或る程度以上大きくなければ Wiechert-Herglotz の解析法は適用出來ないと云ふ意味である．

3. 任意の等速度層に於ける最深點の求め方

前節に述べた事から容易に思ひ浮ぶ事は一般に z 面を任意の正則函數で等角寫像した時に得られる等速度層の配列がある時，或る震波線が通過した最も高速の層はどの位の深さにあるかを見る方法である．

今 z 面を ζ 面（第 3 圖）に變換した時の $x=\text{constant}$ 即ち等速度面の形が豫察出來るとすれば，この ζ 面を逆に z 面に戻す事に依り地表の觀測點の位置は總て z 面上の對應點に示す事が出來るから，ζ 面に對する走時曲線から z 面に對する走時曲線を慥へる事が出來る．從つて (1) の樣な積分で各震波の最深點の位置が分る．この最深點は再び ζ 面上のどの點に對應するか見る事が出來るから，ζ 面に於て或る觀測點に到達した波の通つた最高速度の層が及び，その層と接した地點の位置が求まる（その位置を假に最深點と稱しておく）．

第 3 圖



尤も遺憾な事には等速度面が水平平面層をなす場合や同心球形をなす場合以外では一般に (7) や (8) に相當する震波線の法則と云ふものが簡單には求まらないものであるから．最深點は求まつても，其處に於ける速度を決定する事は困難である．然し例へば速度の不連續面の位置を知ると云ふ樣な要求に對しては，走時曲線の模樣が急に變つた所に相當する震波線の最深點を知れば十分であるから應用地震學的には必ずしも不用では無いと思はれる．

最後に製圖して頂いた高見孃にお禮申上げます．　（昭和 16 年 9 月，於．中央氣象臺）

(1) $x>0$ を大氣中と考へれば，上空に行く程音波速度大と云ふ意味であり，$x>0$ を地中と考へれば地中深くなる程地震波速度大と云ふ意味と考へてよろしい．