例し，週期の平方根に比例する．

iv) 柿岡に於ける地表傾斜の實測結果と比較して變化の傾向が略々一致してゐることを認めた．

尚三次元の場合に就いては次回に於て論ずる所存である．

終りに臨み終始御懇切なる御指導と御鞭撻を賜つた本多博士並に有益なる御助言を賜つた鷺坂技師及び本間正作氏に深謝の意を表する次第である．

（昭和 16 年 2 月　中央氣象臺に於て）

描針の弧狀軌跡に就て

（記象幾何學の一問題）

森　田　稔

自記記錄法を採用する測定器械に於て記錄針の記錄する圖形が記錄の目的とする量と如何なる關係に在るかは一應明瞭にして置く必要のある問題である．

例を地震計に採れば，たとひ重錘支桿の廻轉角 θ が小さく，其運動方程式に於て $\sin\theta\sim\theta$ なる近似が充分の精度を以て行はれ得る場合にも，擴大槓桿を通じて記錄がなされる場合には，途中の各部分の廻轉角は必ずしも小さいとは云へない．從つて其間に近似的に直線運動とは見做し得ない樣な圓運動乃至類似の運動の存することは否み難い．

之等一種の補正量は多くの場合小さなものであり，又努めて小さくしなければならない性質のものであるが，併し器械の構造上止むを得ず此理想が充されない場合がある．例へば機械的記錄法に於て簡單に高倍率を得んとせば，擴大の途中に必ず腕長の小なる挺子を用ひねばならず，腕長が小ならば當然圓弧運動を考へねばならぬ如き，又極めて長い記錄針を用ひない限り圓弧狀の記象は免れぬ如き，又ドラムの半徑の有限なものを使用する限り針先の軌跡の完全な圓弧との差異は避け得ない如き，何れも其例である．

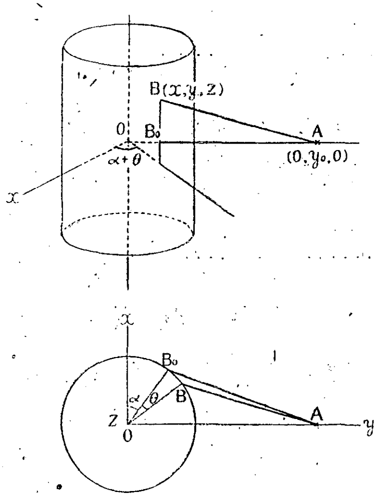
此種の些細な問題に對して從來特別な研究がなされなかつたのは一應尤もなことではあるが，併し觀測の結果に對し高度の精度が要求される場合には，此

等の微小量も一應明かにされてゐなければならない．こゝに於て，一般に記錄器械に於て被測定量と測定結果表示量との關係を幾何學的に闡明するための記象幾何學或は記錄幾何學とも謂ふべきものが必要となる．本文は其一問題として，特にドラム記錄法に於ける描針の軌跡に就て調べたものである．

I. ウィーヘルト式地震計の如き場合[1]

ドラムの軸を z 軸にとり，描針の廻轉軸 A を通りドラムの軸に直角に y 軸を，之等に直角に x 軸をとる．OA の長さを y_0 とすれば，A 點の座標は $0, y_0, 0$ となる．針先 B の座標を x, y, z とする．ドラムの半徑を a，描針の長さを l とすれば，針先の描く空間曲線は

第 1 圖



$$x^2+y^2=a^2, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+(y_0-y)^2+z^2=l^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

を以て表される．之等より x を消去すれば，

$$z^2=2y_0y+l^2-(a^2+y_0^2). \quad\cdots(3)$$

針先が xy 面と一致する場合の位置を B_0 とし，OB_0 が x 軸となす角を α，OB の xy 面上の射影が x 軸となす角を $\alpha+\theta$ とすれば，(3) は又

$$z^2=2y_0(y-a\sin\alpha) \quad\cdots\cdots(4)$$

$$=2y_0a\{\sin(\alpha+\theta)-\sin\alpha\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

等と表される．

ドラムが靜止せる場合を考へ，B_0 を原點とし，xy 面内に於てドラムの表面に沿ふて測つた長さを η とすれば，$\eta=a\theta$ なる故

$$z^2=2y_0a\left\{\sin\left(\alpha+\frac{\eta}{a}\right)-\sin\alpha\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$=4y_0a\sin\frac{\eta}{2a}\cos\left(\alpha+\frac{\eta}{2a}\right). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

---

(1) ウィヘルト式地震計の記錄方式は嚴密には II 節で取扱ふ場合の一種であるが，こゝでは其特徴である所の記錄ペンの極めて長い點を理想化し，ウィーヘルト方式描針の上下廻轉軸が水平廻轉軸と一致せる如き場合を取扱つた．

これが記象紙上に於て針先の軌跡を表す式である.

多くの場合, 描針は位置 AB_0 に於てドラムに切する様に設置されてゐる. 此様な場合には(7)は

$$z^2 = 4a\sin\frac{\eta}{2a}\left(l\cos\frac{\eta}{2a} a\sin\frac{\eta}{2a}\right), \quad\cdots\cdots(8)$$

或は

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{l}{a}\sin\frac{\eta}{a}+\cos\frac{\eta}{a}-1\right) \quad\cdots\cdots(9)$$

となる. 之を η に關して解けば

$$\eta = a\sin^{-1}\frac{\rho\left(1+\frac{\zeta^2}{2}\right)\pm\sqrt{\rho^2-\zeta^2\left(1+\frac{\zeta^2}{4}\right)}}{1+\rho^2}, \quad\cdots\cdots(10)$$

但し $\zeta=z/a$, $\rho=l/a$ である. 此式により z の種々の値に對する η を計算することが出來る. 右邊±の複號は適宜とるべきこと勿論である,

(9) の右邊を η/a の羃級數に展開すれば

$$z^2 = 2l\eta-\eta^2-\frac{al}{3}\left(\frac{\eta}{a}\right)^3+ \quad\cdots\cdots(11)$$

右邊第2項迄を採れば之は平面の記象紙（マインカ式上下動の如き場合）上の針先の軌跡である所の圓を表してゐる. 第3項以下がドラム上の記錄の特色で, 完全な圓からの喰違を示すものである. 第3項の符號は負であるから, 此曲線は第2項迄によつて表される圓の內側に入ることが解る.

ドラムが一様な速さ v で廻轉してゐる時には, η を記象紙上の時間軸の長さにとり, 空間固定座標軸に對しては η の代りに

$$\eta-vt=\eta' \quad\cdots\cdots(12) \qquad t: \text{ 時間}$$

なる η' を用ふれば, 上述の諸結果は其儘成立つ譯である.

今, 運動 $z=z(t)$ が與へられた場合を考へて見よう. 之を $t=t(z)$ の形に直して (12) に代入すれば,

$$\eta-vt(z)=\eta'. \quad\cdots\cdots(13)$$

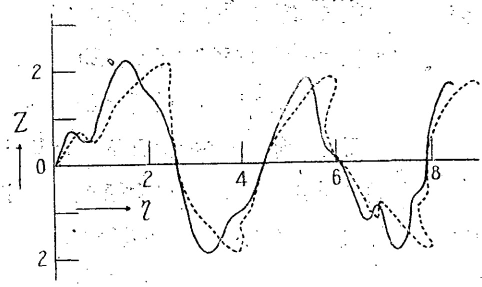
然るに η' は (10) の如く $\eta'=\eta'(z)$ と表されるから

$$\eta=vt(z)+\eta'(z) \quad\cdots\cdots(14)$$

と z のみの函數として表し得る. これが即ちドラムが廻つてゐる時の記象の

形を表す式であつて，第一項は記録の曲率の影響のない眞の運動の記象，第 2 項は曲率の影響を示す項である．之等は互に additive に這入つてゐるから，ドラムの廻轉のために特別な複雑性は生じない．第 2 圖は描針の長さ $l=3$ なる場合に，眞の運動の記象と描針の描くべき記象とを示したものである（$a=\infty$ とする）

第 2 圖　實線：實動　點線：記象
（$l=3$ の場合）



逆に記象が與へられた場合の眞の地動は

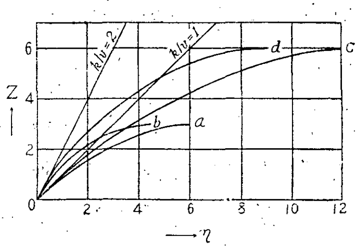
$$t=\frac{1}{v}\{\eta(z)-\eta'(z)\} \qquad (15)$$

であることも容易に解る．

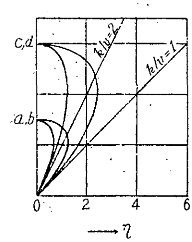
上の如くして，「ドラムが廻つてゐる時の記象は眞の運動の記象にドラムが靜止せる場合の弧狀補正を加へたもの，眞の運動は記象から弧狀補正を差引いたものである」ことが示される．

簡單な一例として，一樣な速度 v で移行する平面の記象紙上で（ドラムとすると複雑となるので）描かるべき $z=kt$（k: 常數）なる運動に對する記象（第 3 圖）と，其上に描かれた $z=k\eta$ なる記象に對する眞の運動（第 4 圖）とを示して置く．兩圖は $l=3$ 及び 6, $k/v=1$ 及び 2 の場合の結果を示すもので，a, b, c, d の四端を夫々つなぐと二組の楕圓（半分のみ）が得られることが解る．之等の楕圓は解析的方法によつても容易に導くことが出來る．

第 3 圖



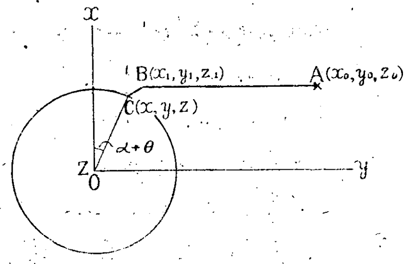
第 4 圖



II. 地動計の如き場合

描針 AB が直接ドラムに接せず，ペン BC を介して記録がなされる場合であ

第　5　圖



る.

座標軸のとり方は，x 軸及び z 軸に就ては前の場合と同様であるが，y 軸は描針に平行に且つ描針 AB がドラムの軸に直角な位置をとる時 xy 面内に含まれる様にとる．此座標軸に關する A, B, C の座標を夫々圖の如く約束すれば，C 點の軌跡を與へる條件式として次の5つが成立つ，

$$x_1=x_0, \quad\cdots\cdots(16)$$

$$(y_0-y_1)^2+z_1^2=l^2, \quad\cdots\cdots(17)$$

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=p^2, \qquad p\text{: ペンの長さ} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$x^2+y^2=a^2, \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{y_0-y}{y_0-y_1}=\frac{z}{z_1}. \quad\cdots\cdots(20)$$

最後の條件式は面 ABC が常に x 軸に平行なことを表す式である．

之等より y, z を殘して他の變數を消去すれば

$$z^2+(y_0-y)^2=\left\{l+\sqrt{p^2-(x_0-\sqrt{a^2-y^2})^2}\right\}^2. \quad\cdots\cdots(21)$$

$\sqrt{a^2-y^2}$ を補正項と考へれば之は $y=y_0$ を通り x 軸に平行な直線を軸とする圓壔の方程式である．其半徑は上式より解る如く，y の增加に伴ひ減少する．$y>a$ なる y に對しては半徑は虚數となり，記象の實在しないことを示す．但し此式はペンの描針となす角が鈍角の場合にのみ適用されるものである．こゝでは其角が鋭角となる場合，即ちペンの表側で記象する様な場合は取扱はなかつた．

(21) を z に關して解けば

$$z=\pm\sqrt{\{l+\sqrt{p^2-(x_0-\sqrt{a^2-y^2})^2}\}^2-(y_0-y)^2}. \quad\cdots\cdots(22)$$

y は記象紙の時間線に沿ふて測つた長さ η と

$$y=a\sin\left(\alpha+\frac{\eta}{a}\right) \quad\cdots\cdots(23)$$

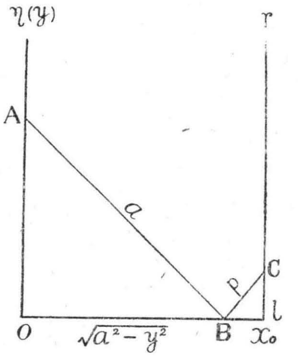
の關係に在るから，之を (22) に代入すれば，求めるペン先の軌跡が得られる．

多くの器械では $z=0$ に於て $y=0$ となる如く裝置されてゐるから，$\alpha=0$ で，ペン先の軌跡は

$$z=\pm\sqrt{\left\{l+\sqrt{p^2-\left(x_0-a\cos\frac{\eta}{a}\right)^2}\right\}^2-\left(y_0-a\sin\frac{\eta}{a}\right)^2}\quad\cdots\cdots(24)$$

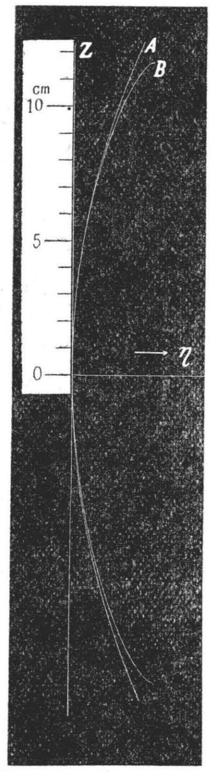
此式によつて軌跡曲線を計算するのは相當面倒である．既設の地震計等では勿論實際に針先を動かして見ればよい譯であるが，第6圖に示す如き圖計算によれば，左程勞力を要せずして大體の曲線を描くことが出來る．圖に於て η 軸は實は y 軸であるが，(23) の關係に從ふ函數尺の目盛を施して置き，η 軸として使用する．橫軸上に $\overline{OO'}=x_0$ に等しい點 O' をとり，O' から更に縱軸 r を立て，その原點 O' を $r=l$ の所にとつて r 軸上の目盛を附して置く．然る時は $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=p$ なる條件の下に $A—B—C$ の順序で定めた點 C の座標 $r=r_C$ は $\eta=\eta_A$ に對する圓弧の半徑を與へる．此圖では縱橫三軸上の長さは何れも同一の縮尺にとることが必要である．

第 6 圖



第 7 圖

B: ドラム上のペン先の軌跡
A: 平面上のペン先の軌跡



上述の曲線の一つの實例として，仙臺地方氣象臺の大森式地動計南北動の場合を第7圖に示す．圖に於て B は實際のペン先の軌跡，A は (25) 式によつて示される圓弧である．此地震計に於ける上述諸種の常數は次の如くで，之等の常數を與へ第6圖の方法により描いた曲線と B 曲線とは全く一致することを檢べた．

$x_0=12.3,\ y_0=30.8,\ a=11.8,\ l=29.6,\ p=0.95$ (以上單位cm), $\alpha\sim 0$

此種の記錄方式に於てはペン先の軌跡が圓弧と異る結果，描針の同一廻轉角に對し振幅が圓弧の場合と何の程度に異るかを計算して見よう．ペンの先端を通り yz 面に平行な平面を考へ，ペンの先端が此平面上を動く樣に拘束するも

のとすれば，先端の軌跡は

$$z=\pm\sqrt{\{l+\sqrt{p^2-(x_0-a)^2}\}^2-(y_0-y)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

の如き完全な圓弧となる．此場合の y, z を夫々 y_p, z_p と表し，ドラムの場合を y_a, z_a と表せば，描針の廻轉角が φ の時，z_p と z_a との間には

$$z_p-z_a=\tan\varphi\,(y_a-y_p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

なる差がある．一方 $\tan\varphi=\dfrac{z_p}{y_0-y_p}=\dfrac{z_a}{y_0-y_a} \cdots\cdots\cdots\cdots (27)$

なる關係があるから，此式中の z_p に (25) を，z_a に(23)を夫々代入すれば，y_p 及び y_a を各々 φ の函數として表すことが出來る．今其等の函數を夫々

$$y_p=f_p(\varphi), \qquad y_a=f_a(\varphi).$$

と表せば

$$z_p-z_a=\tan\varphi\{f_a(\varphi)-f_p(\varphi)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

となり，右邊は φ のみの函數となる．即ち之等二つの場合に於ける振幅の差が描針の廻轉角の函數として與へられたのである．併し實際には計算に手數を要し，面も此差は補正量であつて大した精度を必要としないから，圖式的に求める方が簡便である．

次表には上述の地動計の場合に就き z の種々の値に對する A·B 兩曲線の η の値 η_p·η_a と其等の差，及び描針の同一廻轉角に對する B 曲線の縱座標（ペン先の變位）z_a と A 曲線の縱座標 z_p の値並びに其等の差を揭げる．單位はすべてmm である．

終りに臨み，製圖の勞をとられた八木恒介氏，其他助力を得た當臺諸氏に御禮申上る。

z	η_p	η_a	$\eta_a-\eta_p$	z_a	z_p	z_p-z_a
0	0.0	0.0	0.0	0	0.00	0.00
10	0.2	0.2	0.0	10	10.00	0.00
20	0.7	0.8	0.1	20	20.01	0.01
30	1.5	1.6	0.1	30	30.01	0.01
40	2.7	2.8	0.1	40	40.01	0.01
50	4.2	4.4	0.2	50	50.03	0.03
60	6.1	6.4	0.3	60	60.06	0.06
70	8.3	8.8	0.5	70	70.12	0.12
80	10.9	11.7	0.8	80	80.22	0.22
90	13.8	15.2	1.4	90	90.44	0.44
100	17.1	19.5	2.4	100	100.86	0.86
110	20.8	25.1	4.3	110	111.72	1.72
113.1	22.1	29.5	7.4	113.1	116.19	3.09

（昭和 15 年 7 月　仙臺地方氣象臺にて）