

温度變化に伴ふ半無限弾性體の變形

門 脇 関 郎

§1. 緒 言 土地は温度の變化に伴つて變形する。此の模様を明らかにするため以前西村博士⁽¹⁾は温度分布によつて生ずる半無限弾性體の變形の問題を詳しく研究されて居るが時間的の變化は考慮に入れられなかつた。又荒川博士⁽²⁾は温度が時間的に變化する場合の半無限弾性體の變形を取扱つてゐられる。

筆者は特に表面の温度分布が週期的の變化をする場合に就て半無限弾性體の變形及び其の表面の傾斜變化を調べた。

§2. 熱弾性方程式

熱弾性の方程式は

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vartheta - \mu \text{rot rot } \vartheta = a \text{grad } \theta + \rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \dots \dots (1)$$

である。

但し ρ ; 密 度 λ, μ ; ラーメの弾性常數

θ ; 温 度 c ; 體膨脹係數

$$a = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) c \quad \left(\text{一次元の場合は } a = \frac{\lambda + 2\mu}{3} c, \text{ 二次元の} \right.$$

$$\text{場合は } a = \frac{2(\lambda + \mu)}{3} c \left. \right)$$

張合の成分は

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - a\theta & X_y &= Y_x = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - a\theta & X_z &= Z_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ Z_z &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - a\theta & Y_z &= Z_y = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\text{但し } \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

(1) 西村源六郎; 地震研究所彙報 第8巻, 91~142 (1930)

(2) 荒川秀俊; 中央氣象臺彙報 第4巻 297~306 (1931) 及び第5巻 139~146 (1932)

温度の分布を決定する爲には次の熱傳導の方程式を解かなければならない。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \nabla^2 \theta - \operatorname{div} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (3)$$

但し K は熱の擴散率である。

最後の項 $\operatorname{div} \left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$ は普通の熱現象では小さく省略しても良い。

§ 3. 二次元の問題 直角座標 x, y を用ひ座標の原点を半無限彈性體の表面におき、 x 軸を地表面に水平に y 軸を鉛直下方を正にとる。

然るとき熱傳導の方程式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (4)$$

熱彈性の方程式は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial y} &= a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varpi}{\partial x} &= a \frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

但し

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad a = \frac{2(\lambda + \mu)}{3} c$$

$$2\varpi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

初めに表面で正弦的の温度分布が週期的に變化する場合の變形を求め次に夫を一般化する事を考へる。

i 表面の温度變化が

$$\theta_0 = A e^{i\alpha t} \left. \begin{aligned} \cos \\ \sin \end{aligned} \right\} \alpha x$$

なる場合

此の場合の(4)の熱傳導の方程式の解は

$$\theta = A e^{i\alpha t - (\gamma + \beta)y} \left. \begin{aligned} \cos \\ \sin \end{aligned} \right\} \alpha x \dots \dots \dots (6)$$

但し

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \frac{\rho^2}{4K^2}} + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\gamma^2 = \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \frac{p^2}{4K^2}} - \frac{\alpha^2}{2}$$

次に (5) の上下の式を x, y で微分し加減して次の式を得る.

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 \varpi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

(6) 式の如き温度分布の場合の (7) 式の Δ の特殊解は

$$\Delta_1 = \frac{a[(i\gamma + \beta)^2 - \alpha^2] A}{(\lambda + 2\mu)[(i\gamma + \beta)^2 - \alpha^2] + \rho p^2} e^{i\gamma t - (i\gamma + \beta)y} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \alpha x \dots\dots (8)$$

Δ の補解は

$$\Delta_2 = B e^{i\gamma t - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} y} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \alpha x \dots\dots\dots (9)$$

(7) を満す ϖ は

$$\varpi = D e^{i\gamma t - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} y} \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \alpha x \dots\dots\dots (10)$$

(6) 及び (8), (9), (10) を用ひて (5) 式を満足させるやうに變位, u, v を決定する.

Δ_1 より $2\varpi = 0$ を満す變位 u_1, v_1 を求むれば

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{a\alpha A}{(\lambda + 2\mu)[(i\gamma + \beta)^2 - \alpha^2] + \rho p^2} e^{i\gamma t - (i\gamma + \beta)y} \begin{cases} -\sin \\ \cos \end{cases} \alpha x \\ v_1 &= \frac{-a(i\gamma + \beta) A}{(\lambda + 2\mu)[(i\gamma + \beta)^2 - \alpha^2] + \rho p^2} e^{i\gamma t - (i\gamma + \beta)y} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \alpha x \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

Δ_2 より $\varpi = 0$ を満す變位 u_2, v_2 を求むれば

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{-\alpha(\lambda + 2\mu)B}{\rho p^2} e^{i\gamma t - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} y} \begin{cases} -\sin \\ \cos \end{cases} \alpha x \\ v_2 &= \frac{(\lambda + 2\mu) \left(\alpha^2 - \frac{\rho^2 p}{\lambda + 2\mu} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho p^2} B e^{i\gamma t - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} y} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \alpha x \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

ϖ より $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0$ を満す變位 u_3, v_3 を求むれば

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= -\frac{2\mu\left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho p^2} D e^{i p t - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} y} \frac{\sin}{\cos} \alpha x \\ v_3 &= -\frac{2\mu\alpha}{\rho p^2} D e^{i p t - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} y} \frac{\cos}{-\sin} \alpha x \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

故に求むる變位 u, v は

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

然るに上式中の常數 B, D は表面が自由だと云ふ條件から決定される。

張合の式は

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - a\theta \\ Y_y &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - a\theta \\ X_y &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

表面の張合の條件は $y=0 \quad Y_y = X_y = 0$

即ち (14) より

$$\left. \begin{aligned} y=0 \quad \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - a\theta &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

上式に u, v を代入すれば次の關係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho p^2} (\rho p^2 - 2\mu\alpha^2) B \pm \frac{4\mu^2\alpha}{\rho p^2} \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} D \\ = \frac{a(\rho p^2 - 2\mu\alpha^2)}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2 - \alpha^2] + \rho p^2} A \\ \frac{2(\lambda+2\mu)\alpha}{\rho p^2} \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} B \pm \frac{2}{\rho p^2} (\rho p^2 - 2\mu\alpha^2) D \\ = \frac{-2a\alpha(i\gamma+\beta)}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2 - \alpha^2] + \rho p^2} A \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

之より常數 B, D を決定すると

(1) 複號は同順にし變位の項の $\sin \alpha, \cos \alpha$ 等に對應する。

$$\left. \begin{aligned}
 B &= \frac{aA}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]+\rho p^2} \cdot \frac{\rho p^2}{(\lambda+2\mu)} \\
 &\quad \frac{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}(i\gamma+\beta)}{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 D &= \pm \frac{aA\rho p^2}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]+\rho p^2} \\
 &\quad \frac{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)\left[(i\gamma+\beta)-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

故に變位 u, v は

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{a\alpha A}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]+\rho p^2} \left[e^{-(i\gamma+\beta)y} \right. \\
 &\quad \frac{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}(i\gamma+\beta)}{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}y} \\
 &\quad \left. + 2\mu\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right) \frac{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)\left[(i\gamma+\beta)-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot e^{-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}y} \right] e^{i\gamma t} \left. \begin{matrix} -\sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \alpha x \\
 v &= \frac{aA}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]+\rho p^2} \left[-(i\gamma+\beta)e^{-(i\gamma+\beta)y} \right. \\
 &\quad + \left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}(i\gamma+\beta)}{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad \left. \cdot e^{-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}y} - 2\mu\alpha^2 \frac{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)\left[(i\gamma+\beta)-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{(\rho p^2-2\mu\alpha^2)^2-4\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
 &\quad \left. \cdot e^{-\left(\alpha^2-\frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}y} \right] e^{i\gamma t} \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \alpha x
 \end{aligned} \right\} (18)$$

(1) 複號は同順にし變位の項の $\sin\alpha, \cos\alpha$ 等に対応する。

故に地表面の傾斜變化は

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{a\alpha A}{(\lambda+2\mu)[i\gamma+\beta]^2-\alpha^2} + \rho p^2 \left[-(i\gamma+\beta) \right. \\ \left. + \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\rho p^2 - 2\mu\alpha^2)^2 - 4\mu^2\alpha^2 \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} (i\gamma+\beta)}{(\rho p^2 - 2\mu\alpha^2)^2 - 4\mu^2\alpha^2 \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \left. - 2\mu\alpha^2 \frac{(\rho p^2 - 2\mu\alpha^2) \left[(i\gamma+\beta) - \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \right]}{(\rho p^2 - 2\mu\alpha^2)^2 - 4\mu^2\alpha^2 \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha^2 - \frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] e^{i\pi t} \frac{-\sin}{\cos} \alpha x \quad (19)$$

以上の如くして表面で正弦的の溫度分布が週期的に變化する場合に生ずる半無限彈性體の變形及び地表傾斜變化を求める事が出來たが係数が相當複雑なので其の模様が明らかでない。夫故に一日週期の如き相當長い週期の場合に就いて省略計算を行ひ簡単な結果を求めやう。

一日週期の變化の場合には $\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu} \ll \alpha^2$, $\frac{\rho p^2}{\mu} \ll \alpha^2$ である事を考へ $\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu} \frac{\alpha^2}{\alpha^2}$ $\rightarrow 0$, $\frac{\mu}{\alpha^2} \rightarrow 0$ の場合の $\lim u$, 及び $\lim v$ を求める, と次の如く簡單になる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{aA}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]} \left[\alpha e^{-(i\gamma+\beta)y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu\alpha - (\lambda+2\mu)(i\gamma+\beta)}{\lambda+\mu} e^{-\alpha y} + \alpha(i\gamma+\beta-\alpha) y e^{-\alpha y} \right] e^{i\pi t} \frac{-\sin}{\cos} \alpha x \\ v &= \frac{aA}{(\lambda+2\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]} \left[-(i\gamma+\beta) e^{-(i\gamma+\beta)y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda+2\mu)\alpha - \mu(i\gamma+\beta)}{\lambda+\mu} e^{-\alpha y} - \alpha(i\gamma+\beta-\alpha) y e^{-\alpha y} \right] e^{i\pi t} \frac{\cos}{\sin} \alpha x \end{aligned} \right\} (20)$$

(1) $p = \frac{2\pi}{T}$, $\alpha = \frac{2\pi}{l}$, $T = 24 \cdot 60 \cdot 60$ として $\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu} = \alpha^2$, $\frac{\rho p^2}{\mu} = \alpha^2$ なる場合の l を

求めれば $l = 4 \times 10^5$ km, 及び 2.4×10^5 km となる。従つて $\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu} / \alpha^2 \rightarrow 0$,

$\frac{\rho p^2}{\mu} / \alpha^2 \rightarrow 0$ としても $l = 100$ km 程度までは差支へない。

但し $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = 5 \times 10^5$, $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 3 \times 10^5$ として計算した。

従つて地表傾斜は

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{\alpha\alpha A}{(\lambda+\mu)[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2]} (\alpha-\beta-i\gamma) e^{i\mu t} \frac{-\sin}{\cos} \alpha x \quad (21)$$

$[(i\gamma+\beta)^2-\alpha^2] = \frac{i p}{K}$ を代入し (20) 及び (21) の實數部分を取れば實際の變形及び地表傾斜が得られる。其の結果は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\alpha AK}{(\lambda+2\mu)p} \left[\alpha e^{-\beta y} \sin(pt-\gamma y) + \left\{ \frac{\mu\alpha - (\lambda+2\mu)\beta}{\lambda+\mu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha(\beta-\alpha)y \right\} e^{-\alpha y} \sin pt + \left\{ -\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \gamma + \alpha\gamma y \right\} e^{-\alpha y} \cos pt \right] \frac{-\sin}{\cos} \alpha x \\ v &= \frac{-\alpha AK}{(\lambda+2\mu)p} \left[\beta e^{-\beta y} \sin(pt-\gamma y) + \left\{ \frac{\mu\beta - (\lambda+2\mu)\alpha}{\lambda+\mu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha(\beta-\alpha)y \right\} e^{-\alpha y} \sin pt + \left\{ \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \gamma + \alpha\gamma y \right\} e^{-\alpha y} \cos pt \right] \frac{\cos}{\sin} \alpha x \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{\alpha\alpha AK}{(\lambda+\mu)p} \left\{ (\alpha-\beta) \sin pt - \gamma \cos pt \right\} \frac{-\sin}{\cos} \alpha x \quad (23)$$

次に地表傾斜に就いて更に考察して見やう。

地表傾斜の極大及び極小の起る時間 t_m は (23) 式を微分して 0 として求められる。

$$\text{即ち} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{\alpha\alpha AK}{\lambda+\mu} \left\{ (\alpha-\beta) \cos pt_m + \gamma \sin pt_m \right\} \frac{-\sin}{\cos} \alpha x = 0$$

$$\therefore (\alpha-\beta) \cos pt_m + \gamma \sin pt_m = 0$$

$$\text{即} \quad \tan pt_m = \frac{\beta-\alpha}{\gamma} \quad (\beta, \gamma, \text{ を代入して})$$

$$= \frac{2K}{p} \left[\left(\frac{\alpha^4}{4} + \frac{p^2}{4K^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\left\{ \left(\frac{\alpha^4}{4} + \frac{p^2}{4K^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^2}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} - \alpha \right] \quad (24)$$

故に地表傾斜の極大、極小の時間は

$$t_m = \frac{1}{p} \tan^{-1} \frac{2K}{p} \left[\left(\frac{\alpha^4}{4} + \frac{p^2}{4K^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\left\{ \left(\frac{\alpha^4}{4} + \frac{p^2}{4K^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha^2}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} - \alpha \right] \quad (25)$$

然るに地表面の温度は實數部をとれば $A \cos pt \frac{\cos \alpha x}{\sin}$ であるから此の極大、極小は $t = \frac{nT}{2}$ である。但し $p = \frac{2\pi}{T}$ とす。故に極大、極小の位相の遅れ τ は

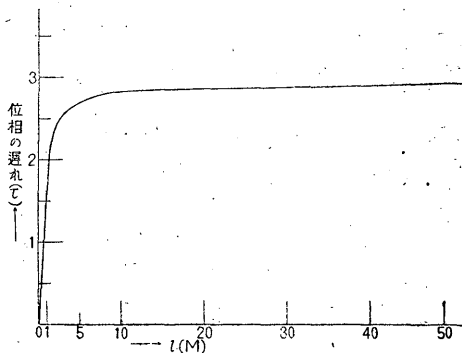
$$\tau = tm - \frac{nT}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (26)$$

(26) により位相の遅れを計算して第1圖に示す。

但し $\alpha = \frac{2\pi}{l}$, $p = \frac{2\pi}{T}$, $K = 5 \times 10^{-3}$, $T = 24 \times 60 \times 60^s$ として計算した。

第1圖で明らかな様に位相の遅れは正弦波的に與へられた表面温度分布の波長 l が増加すると急激に増し極限では3時間となる。

第1圖 位相の遅れ



又 $\sqrt{\frac{p}{2K}}$ に對して α が省略出来る場合は地表傾斜は更に簡單になる

$$\text{即ち } \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{K}{2p}} c \alpha A \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(pt - \frac{\pi}{4} \right) \frac{-\sin}{\cos} \alpha x \dots (27)$$

但し $a = \frac{2}{3}(\lambda + \mu)c$ を代入

此の場合の地表傾斜變化は温度の波長に逆比例し週期の平方根に比例し位相は $\frac{\pi}{4}$ だけ遅くれる。(27) 式によつて $p = \frac{2\pi}{T}$ なる場合に就いて地表傾斜を計算し地表温度と比較し第2圖に示す。

ii 表面温度が $\theta_0 = f(x) e^{ipt}$ なる一般の場合

$f(x)$ をフーリエの級數で展開すれば

$$f(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \cos \left(\frac{n\pi}{l} (x-\lambda) \right) d\lambda \quad (-l < x < l)$$

但し $\epsilon_0 = 2$ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n = 1$

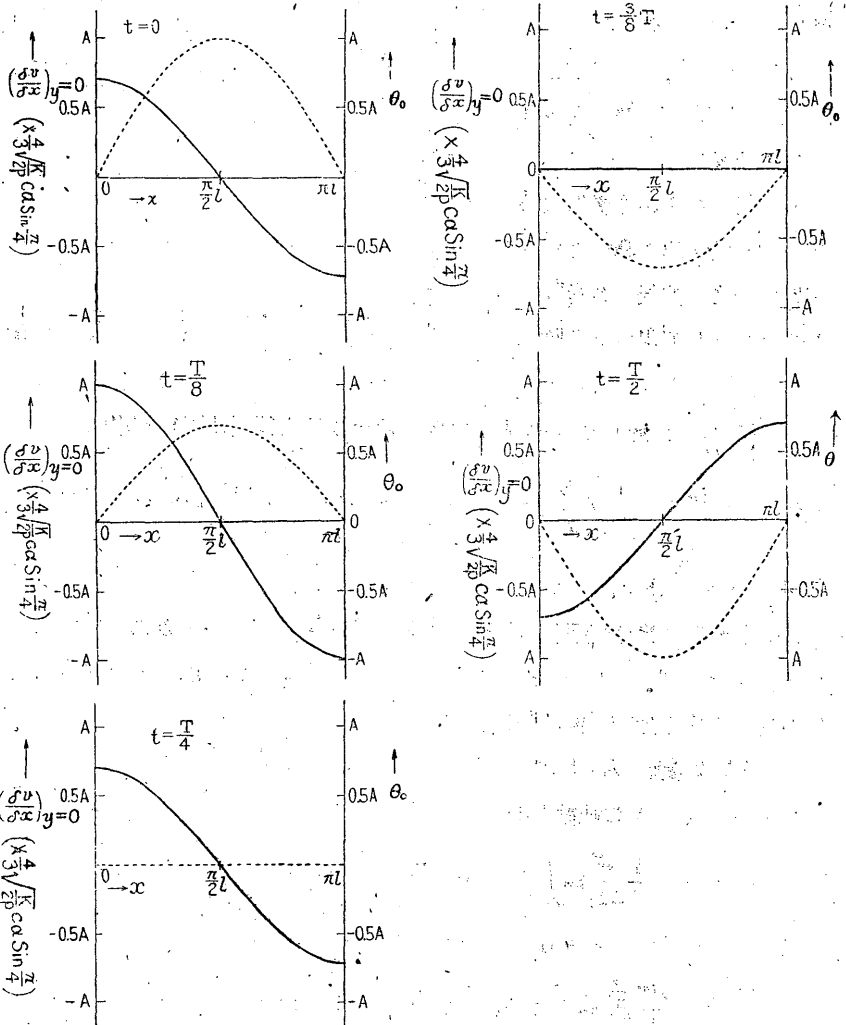
$$\therefore \theta_0 = \frac{e^{ipt}}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \cos \left(\frac{n\pi}{l} (x-\lambda) \right) d\lambda$$

従つて(4)及び表面の温度分布を満す解は

$$\theta = \frac{e^{i\omega t}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\gamma_n + \beta_n)\lambda y} \epsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \dots (28)$$

此の場合も $\frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} \ll \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $\frac{\rho p^2}{\mu} \ll \left(\frac{n\pi}{l^2}\right)^2$ としても 1 日週期の如き長い週期

第 2 圖 — 地表傾斜 ——— 地面温度



の温度変化の場合には一般性を失ふ事がないから (20) 及び (21) の如き省略計算によつて變形及び地表傾斜變化が容易に求められる。即ち

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{-ae^{i\mu t}}{i(\lambda+2\mu)pl} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n\pi}{l} e^{-(i\gamma_n+\beta_n)y} + \frac{\mu \frac{n\pi}{l} - (\lambda+2\mu)(i\gamma_n+\beta_n)}{\lambda+\mu} e^{-\frac{n\pi}{l}y} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n\pi}{l} \left(i\gamma_n+\beta_n - \frac{n\pi}{l} \right) ye^{-\frac{n\pi}{l}y} \right\} \varepsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \\
 v &= \frac{ae^{i\mu t}}{i(\lambda+2\mu)pl} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -(i\gamma_n+\beta_n) e^{-(i\gamma_n+\beta_n)y} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\lambda+2\mu) \frac{n\pi}{l} - \mu(i\gamma_n+\beta_n)}{\lambda+\mu} e^{-\frac{n\pi}{l}y} - \frac{n\pi}{l} \left(i\gamma_n+\beta_n \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{n\pi}{l} \right) ye^{-\frac{n\pi}{l}y} \right\} \varepsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} &= \frac{-ae^{i\mu t}}{i(\lambda+2\mu)pl} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \left(\frac{n\pi}{l} \right. \\
 &\quad \left. - \beta_n - i\gamma_n \right) \varepsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned} \right\} (29)$$

故に實數部分をとれば

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{-aK}{(\lambda+2\mu)pl} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{l} e^{-\beta_n y} \sin(pt-\gamma_n y) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{\mu \frac{n\pi}{l} - (\lambda+2\mu)\beta_n}{\lambda+\mu} + \frac{n\pi}{l} \left(\beta_n - \frac{n\pi}{l} \right) y \right\} e^{-\frac{n\pi}{l}y} \sin pt \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ -\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \gamma_n + \frac{n\pi}{l} \gamma_n y \right\} \cos pt \right] \varepsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \\
 v &= \frac{-aK}{(\lambda+2\mu)pl} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\beta_n e^{-\beta_n y} \sin(pt-\gamma_n y) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{\mu\beta_n - (\lambda+2\mu) \frac{n\pi}{l}}{\lambda+\mu} + \frac{n\pi}{l} \left(\beta_n - \frac{n\pi}{l} \right) y \right\} e^{-\frac{n\pi}{l}y} \sin pt \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \gamma_n + \frac{n\pi}{l} \gamma_n y \right\} \cos pt \right] \varepsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \\
 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} &= \frac{-aK}{(\lambda+2\mu)pl} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \left\{ \left(\frac{n\pi}{l} - \beta_n \right) \sin pt \right.
 \end{aligned} \right\} (31)$$

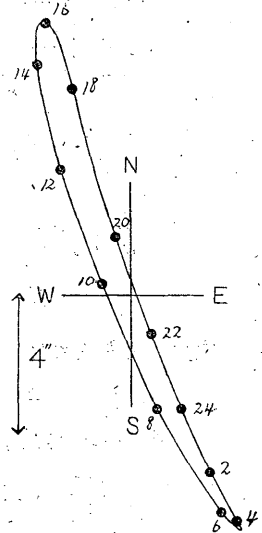
$$-\gamma_n \cos pt \left\{ \varepsilon_n \int_{-l}^l f(\lambda) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-\lambda)\right) d\lambda \dots (32) \right.$$

以上で任意の温度分布の場合の變形及び地表傾斜が級数の形で求められた。

§ 4. 温度變化による地表傾斜變化に就て 土地の高低により、又は建築物の蔭になる等の爲に日射による地面温度が場所によつて異りしかもそれが週期的に變化する場合には地面に僅かながら週期的の傾斜變化の生ずべきことが考へられる。嘗つて柿岡に於ける石本式傾斜計の記録を⁽¹⁾ 崑山博士が調査されたものがあり、晴天の日に就いて調べると傾斜の一日變化が明瞭に現れており同博士は日射による地温の不均一な分布の週期的變化によることを述べられてゐる。同氏により第3圖に7月の傾斜變化のベクトル圖を示す。

筆者は今回行つた熱弾性の理論的研究の結果の應用として此の問題を考へて見る。しかし實際の地面温度分布が如何になつてゐるかは判らないので、こゝでは假に表面の温度はx方面にだけ、しかもxに就いて正弦波的に分布されてゐるとし、地表の傾斜變化を求め定性的に實測結果と比較して見やう。但し温度分布の波長lは100mとしたが之は位相の遅れに關しては10m以上では殆ど變りがないから100mとしたため特別の結果が得られることはない。

第 3 圖
柿岡の7月の傾斜月變化



- i) 位相の遅れ 前記の實測の結果に依れば傾斜日變化の最大の起時は 5-7 時及び 15 時頃である。當時柿岡に於ては地面温度の觀測が行はれて居なかつたが一般に地面温度は日中及び早朝に極があると考へられる。日中の地面温度の極は日射の最も強い日南中時の直後に起るものと考へられる。

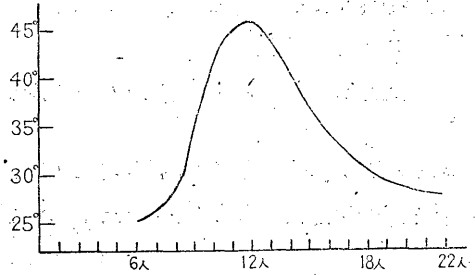
今東京の地面温度の觀測の一例を見ても上記の事が正しい事が裏書される(第4圖參照)⁽²⁾。此の例で最高が正午になつてゐるが之は毎時觀測のため各正時の間の温度が不明な事による。従つて柿岡の場合に於ても晴天の日

(1) 崑山久尙: 驗震時報 第6卷 121~132

(2) 三浦榮五郎: 氣象觀測法講話 36頁

の地面温度の最高が12時であるとするれば地表傾斜の位相の遅れは3時間となる。(27)式或は第1圖からも位相の遅れは3時間と求まる。詳しい比較は出来なかつたが大體は一致してゐる。

第4圖 東京に於ける地面温度の一例
(昭和11年8月30日)



5-7 時の極に對しては地面温度の極の模様が明らかでないのと其の變化の割合が小さいので考察を行はなかつたが3時間位の位相の遅れがあると思はれる。

- ii) 傾斜の振幅 畠山博士は柿岡の地面温度の観測がないので東京の材料より柿岡の推定地面温度の較差を求め之が大體傾斜變化の振幅と平行される事を示したが此の事は(27)式から當然期待される所である。

又傾斜の振幅は7乃至8秒と観測されこゝる。(27)式より $l=100\text{m}$, $K=5 \times 10^{-3}$, $c=0.24 \times 10^{-4}$, $A=10^\circ$ として傾斜の振幅を計算すると $\tan^{-1} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{K}{2p}} c \alpha A = 0.2$ (秒) となり大變小さい値になつたが實際附近の地面温度の分布及びその他の状態が判らないし、又温度分布を正弦波的とし且つ $l=100\text{m}$ とした所に問題があり、實際は温度分布が不連続と云つてよい程急激に變化してゐるとすべきであらう。かくすれば傾斜變化の値はこゝに得た値よりもづつと大きくなる筈である、

§5. 結 語 本調査の主なる結果を次に述べる。

- i) 半無限彈性體の表面の温度が一方向に正弦波的に分布し且つそれが週期的に變化する場合の半無限彈性體の變形及表面の傾斜變化の解を求めた。
- ii) 特に1日週期の變化の場合に就いて省略計算を行ひ簡単な結果を示した。
- iii) 地表傾斜は1日週期の正弦波的の表面温度分布の變化の場合位相の遅れは温度分布の波長 l ($\alpha = \frac{2\pi}{l}$) が大きくなれば急に増大し $l=10\text{m}$ 以上では略一定で約3時間となる。此の様に l が相當大きい場合 ($l > 10\text{m}$) では地表傾斜變化の振幅は地面温度の較差に比例し温度分布の波長 l に逆比

例し、週期の平方根に比例する。

iv) 柿岡に於ける地表傾斜の實測結果と比較して變化の傾向が略々一致してゐることを認めた。

尙三次元の場合に就いては次回に於て論ずる所存である。

終りに臨み終始御懇切なる御指導と御鞭撻を賜つた本多博士並に有益なる御助言を賜つた鷺坂技師及び本間正作氏に深謝の意を表する次第である。

(昭和 16 年 2 月 中央氣象臺に於て)

描針の弧狀軌跡に就て

(記象幾何學の一問題)

森 田 稔

自記記録法を採用する測定器械に於て記録針の記録する圖形が記録の目的とする量と如何なる關係に在るかは一應明瞭にして置く必要のある問題である。

例を地震計に採れば、たとひ重錘支桿の廻轉角 θ が小さく、其運動方程式に於て $\sin \theta \sim \theta$ なる近似が充分の精度を以て行はれ得る場合にも、擴大槓桿を通じて記録がなされる場合には、途中の各部分の廻轉角は必ずしも小さいとは云へない。従つて其間に近似的に直線運動とは見做し得ない様な圓運動乃至類似の運動の存することは否み難い。

之等一種の補正量は多くの場合小さなものであり、又努めて小さくしなければならぬ性質のものであるが、併し器械の構造上止むを得ず此理想が充されない場合がある。例へば機械的記録法に於て簡単に高倍率を得んとせば、擴大の途中に必ず腕長の小なる挺子を用ひねばならず、腕長が小ならば當然圓弧運動を考へねばならぬ如き、又極めて長い記録針を用ひない限り圓弧狀の記象は免れぬ如き；又ドラムの半徑の有限なものを使用する限り針先の軌跡の完全な圓弧との差異は避け得ない如き、何れも其例である。

此種の些細な問題に對して從來特別な研究がなされなかつたのは一應尤もなことではあるが、併し觀測の結果に對し高度の精度が要求される場合には、此