

地盤沈下に關する一假説

森 田 稔

1. 緒言 東京並に大阪に於ける地盤沈下は宮部 (1), 北澤 (2), 渡邊 (3) 和達諸博士並に廣野氏 (4) 等によつて漸次解明せられ, 終に和達博士 (5) の努力は精密なる觀測に據る最も信すべき主原因論の確立に成功した. 地下水位を地盤沈下と結び付け, 更にその人爲的效果に注目したのは北澤博士の慧眼であるが, 豊富なる例證を擧げて地下水壓主原因論を確立し, 人爲的效果の存在を決定的たらしめたのは, 和達博士の偉大なる業績である.

本文の著者 (6) は曩に一深井の水位を調査せる縁りを以て, 爾來水位低下と地盤沈下との聯關に想を潜め, 之等二つの現象の間に必ずや重要な因果關係のあるべきを信するに至つた. 今や和達博士により此二現象間の連鎖は瞭かにせられ, 水壓主原因論はこゝに確立した. 著者は此機會に於て著者が抱懷する沈下機構觀を述べ, 之をモデルに托して計算を行ひ, 和達博士の觀測結果と對比して其の當否を驗せんと思ふ.

2. 沈下機構假説とそのモデル表現 廣野氏並に和達博士は沈下原因諸説を逐一検討して其當否を定め (4, 55 頁), 和達博士は其の中妥當と考へられる少數のものに就き更に検討を加へた (5, 39 頁). 又和達博士は別に地盤沈下の機構に就き一の模型を與へて論じた (5, 29 頁, 41 頁). 之等を要するに, 和達博士の機構説は, 水壓の低下に伴ひ地層内に脫水起り, 地層が壓密加速されるといふに在る. 其他多少の影響ありとして考慮される原因諸説も, 多くは表層の壓密加速に歸せしめ得るといふ.

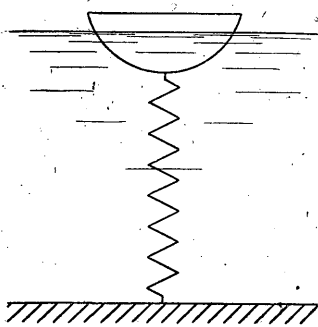
著者は之に對し異論を唱へるものではない. 併し見掛上は異なる一の假説を提供する. 沈下機構に關する著者の假説は, 力の基本因子として浮力と地盤の彈性力の二つを採る. 而して浮力は廣野氏並に和達博士によつて一旦排棄された因子である (4, 51 頁). 然し乍ら其の同じ力が今は異なる意味に於て著者の機構觀に示現されてゐることに注意を拂つて頂き度い. 著者の假説に於ける浮力は

和達博士の所謂水壓に當る。著者には和達博士の所謂水壓は結局其の作用に於て浮力と同一と解せられ、其以外の解釋は出來ないのである。

著者の假説に於ては、地層内の地下水は集められて一の水體を作り、水を除きたる他の部分は集められて一の彈性ある物體を作る。其物體は一方に於て上述の水體の浮力を受け、一方に於て彈性體としての伸縮をなす。而して之等の二作用は各々獨立に抽出し得るものなるが故に、今更に此一物體を考への上で剛體と彈性體の二部分に分ち、彈性體としての性質を抽象して一のバネを以て表現せしめる。かくて到達する分化の窮極は之を第 1 圖の如きモデルを以て表現せしめることが出来る。

即ち無限の擴がりを有する靜水中に一個の浮標がある。浮標はバネを介して

第 1 圖



不動の水底と繋つてゐる。浮標は相當の比重を有し、バネの弾力は常に之を押上げる向きに働いてゐる。

水位が低下すれば如何なる結果を生ずるであらうか。浮標は漸次下降するであらう。これは即ち地盤沈下である。浮標の上端と水面との差は漸次増大するであらう。これ見掛上の水位低下である、浮力は漸次減少しバネの弾力は漸次増大するが故

に、水位の低下に伴ふ浮標の降下率は漸次減少するであらう。これは實際の沈下現象の見透しと一致する。水位が終に浮標の下端に達した時、浮標の降下は止むであらう。これ沈下現象の終局である。下方に考へた浮標の降下量は上方のよりは小である。これは深淺二地層の沈下量の關係と一致する。不動の水底は即ち沈下なき基盤に當る。

かくして定性的には、此モデルは地盤沈下の實際をよく表現する様に見える。吾々は更に之を計算によつて確かめて見よう。次章には先づ此様なモデルから靜力學的に導かれる結果が示される。此基礎的考察は、沈下の實際よりは、其の根本的問題に對して、より多くの示唆を與へるであらう。

I. 靜力學的考察

3. 一般の形の浮標 先づ一般の形の浮標に就て調べて見よう。

水底に座標の原点 O を、上方に向つて x 軸をとり、この座標軸に對して浮標上端の高さを x 、下端を x' 、水面の高さを H とする。浮標の質量を M 、水中に在る部分の體積を V 、バネの弾力を F とすれば、浮標の靜力學的平衡の條件は

$$F + \rho g V - Mg = 0, \dots\dots(1)$$

但し ρ は液の比重で、水の場合は 1 である。バネの弾力 F は、 k をバネの彈性常數、 l をその自然の長さとするれば、

$$F = k(1 - x'/l) \dots\dots(2)$$

又、浮標の水中の體積 V は、 $H - x' = \xi$ とし、浮標の任意の個所の水平斷面積を S とおけば、

$$V = \int S d\xi \dots\dots(3)$$

である。

(1) を H に就て微分すれば

$$\frac{dF}{dH} + \rho g \frac{dV}{dH} = 0 \dots\dots(4)$$

(2) 及び (3) より

$$\frac{dF}{dH} = -\frac{k}{l} \frac{dx'}{dH}, \quad \frac{dV}{dH} = S \left(1 - \frac{dx'}{dH}\right) \dots\dots(5)$$

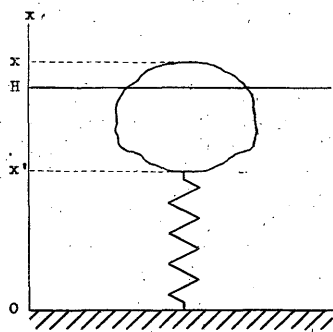
(5) を (4) に代入すれば、水位の變化に伴ふ浮標の昇降率 dx/dH として

$$\frac{dx}{dH} = \frac{dx'}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho g S} \left(\frac{k}{l}\right)} \dots\dots(6)$$

を得る。右邊は浮標の形狀とバネの常數とが與へられれば計算し得る量で、如何なる形の浮標に於ても常に $dx/dH < 1$ 、即ち浮標の沈下量は常に水位の低下量よりも小である。

浮標の中、 $d^2x/dH^2 > 0$ の如き結果を與へるものは、沈下に從ひ沈下率が次

第 2 圖



第に小さくなつて行くもので、安定な浮標である。(1) 反対に $d^2x/dH^2 < 0$ の如き結果を與へるものは不安定な浮標である。此の判定をなすため、(6) を更に微分すれば、

$$\frac{d^2x}{dH^2} = \frac{k}{\rho g l} \frac{(dx/dH)^2}{S^2} \left(1 - \frac{dx}{dH} \right) \frac{dS}{d\xi} \dots\dots\dots(7)$$

$dx/dH < 1$ なる故、 d^2x/dH^2 の符號は $dS/d\xi$ によつて定まる。即ち

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dS}{d\xi} > 0 \text{ ならば安定,} \\ \frac{dS}{d\xi} < 0 \text{ ならば不安定.} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

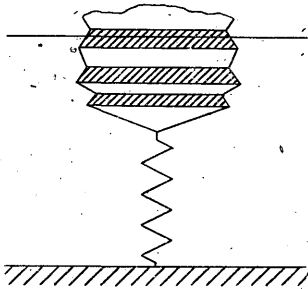
之を換言すれば、

下部に至る程斷面積の小なる浮標は安定である。

下部に至る程斷面積の大なる浮標は不安定である。

此關係は複雑な形の浮標にも適用されるが、その様な浮標では水面附近の形状で安定になつたり不安定になつたりする。例へば第3圖の如き浮標では水面

第 3 圖



が斜線を施せる部分に來た時は浮標は不安定となり、其他の部分に在る時は安定となる。即ち安定沈下と不安定沈下とを交互に繰返すのである。

常に不安定な浮標は地盤沈下のモデルに適しない。

4. 特殊な形の浮標 次に特殊な形の浮標を有する數種のモデルに就て實際の計算

を行つて見よう。

(1) 切口の一樣な浮標 (第 4 圖) 浮標の切口を S とすれば

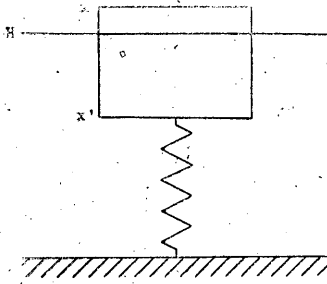
$$V = S(H - x'), \quad \frac{dx}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho g S} \left(\frac{k}{l} \right)}$$

(1) 安定な沈下をなす浮標といふ意味である。

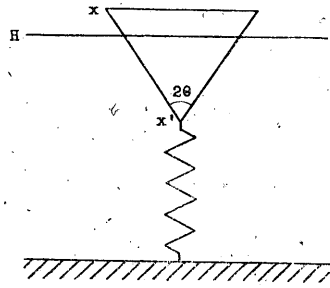
即ち此モデルでは水位の低下に伴ふ地盤の沈下率は一定である。

2) 頂点を下にする圓錐形の浮標 (第 5 圖)

第 4 圖



第 5 圖



圓錐の半頂角を θ とすれば

$$V = \frac{1}{3} \pi \tan^2 \theta (H - x')^3, \quad \frac{dx}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi \rho g \tan^2 \theta (H - x')^2} \left(\frac{k}{l} \right)}$$

(8) に従ひ此浮標は安定である。

3) 球面を下にする半球形の浮標 (第 6 圖)

水中の部分が球面をなしてさへ居れば充分で、半球の代りに 1/3 球でも 1/4 球でもよい。

球の半径を a とすれば

$$V = \pi (H - x')^2 \{ a - (H - x') / 3 \}$$

$$\frac{dx}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi \rho g (H - x') \{ 2a - (H - x') \}} \left(\frac{k}{l} \right)}$$

(8) に従ひ此浮標も亦安定である。

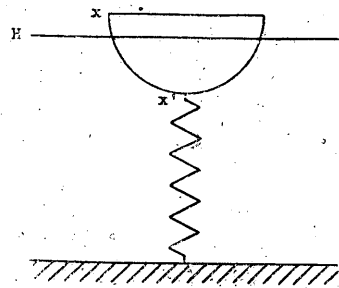
4) 頂点を上にする圓錐形の浮標 (第 7 圖)

圓錐體の全體積を V_0 とすれば

$$V = V_0 - \frac{1}{3} \pi \tan^2 \theta (H - x)^3$$

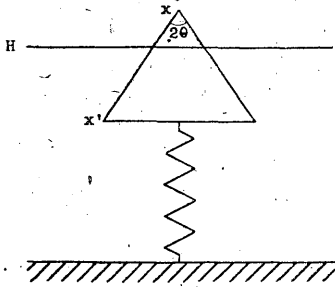
$$\frac{dx}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi \rho g \tan^2 \theta (H - x)^2} \left(\frac{k}{l} \right)}$$

第 6 圖

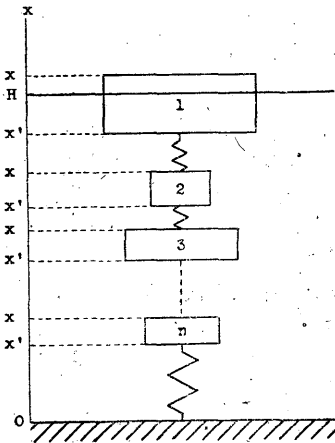


(8) に従ひ此モデルは常に不安定であつて、實際に適しない。前例の浮標を逆

第 7 圖



第 8 圖



立したモデルも亦同様である。

5) バネを以て連結せられた多數の浮標 (第 8 圖)

圖の如く n 個の浮標がバネで連結せられてゐる場合を調べて見よう。水上に現れてゐる第 1 の浮標のみが形状と關係し、他は形状に無關係なことは計算の結果直に解る。こゝでは便宜第 1 浮標に切口の一樣なもの撰んだが、他の形のものに就ても結果は同様である。

釣合の條件式は第 1 浮標に就て

$$F_1 + \rho g S(H - x'_1) - M_1 g = 0, \dots (9)$$

第 2 浮標以下第 n 浮標に就て

$$F_i - F'_{i-1} + \rho g V_i - M_i g = 0 \dots (10)$$

($i = 2, 3, \dots, n$)

但し F'_i は第 $i+1$ 浮標に及ぼす上方のバネの弾力である。 F 及び F' は次の如く表される。

$$\left. \begin{aligned} F_i &= k_i \{1 - (x'_i - x_{i-1})/l_i\}, & F'_i &= F_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ F_n &= k_n (1 - x'_n/l_n) \end{aligned} \right\} (11)$$

従て各浮標の釣合の條件式は

$$\left. \begin{aligned} k_1 \{1 - (x'_1 - x_2)/l_1\} + \rho g S(H - x'_1) - M_1 g &= 0 \\ k_i \{1 - (x'_i - x_{i+1})/l_i\} - k_i \{1 - (x'_{i-1} - x_i)/l_{i-1}\} + \rho g V_i - M_i g &= 0, \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \\ k_n (1 - x'_n/l_n) - k_{n-1} \{1 - (x'_{n-1} - x_n)/l_{n-1}\} + \rho g V_n - M_n g &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

之等 n 個の式を夫々 x'_1, x'_2, \dots, x'_n に就て微分すれば、次の n 個の等式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1}{l_1} \left(1 - \frac{dx_2}{dx_1'} \right) &= \rho g S \left(\frac{dH}{dx_1} - 1 \right) \\ - \frac{k_2}{l_2} \left(\frac{dx_3}{dx_2'} - 1 \right) &= \frac{k_1}{l_1} \left(\frac{dx_1}{dx_2'} - 1 \right) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{k_n}{l_n} &= \frac{k_{n-1}}{l_{n-1}} \left(\frac{dx_{n-1}}{dx_n'} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

第 2 式の兩邊に dx_2/dx_1' を, 第 3 式の兩邊に dx_3/dx_2' を, 順次かくして第 n 式の兩邊に dx_n/dx_{n-1}' を乗じ, 且つ一般に

$$\frac{dx_{i-1}}{dx_i'} = \frac{dx_{i-1}}{dx_i}$$

なることを考慮すれば, 其結果は次の如くなる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1}{l_1} \left(1 - \frac{dx_2}{dx_1} \right) &= \rho g S \left(\frac{dH}{dx_1} - 1 \right) \\ \frac{k_2}{l_2} \left(1 - \frac{dx_3}{dx_2} \right) \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{k_1}{l_1} \left(1 - \frac{dx_2}{dx_1} \right) \\ \frac{k_3}{l_3} \left(1 - \frac{dx_4}{dx_3} \right) \frac{dx_3}{dx_2} &= \frac{k_2}{l_2} \left(1 - \frac{dx_3}{dx_2} \right) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{k_n}{l_n} \frac{dx_n}{dx_{n-1}} &= \frac{k_{n-1}}{l_{n-1}} \left(1 - \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

之等を邊々相乗すれば

$$\frac{k_i}{l_i} \left(\frac{dx_i}{dx_1} - \frac{dx_{i+1}}{dx_1} \right) = \rho g S \left(\frac{dH}{dx_1} - 1 \right), \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (15)$$

$$\frac{k_n}{l_n} \frac{dx_n}{dx_1} = \rho g S \left(\frac{dH}{dx_1} - 1 \right) \dots \dots \dots (16)$$

等の關係を得る.

今特に

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = k_n = k, \quad l_1 = l_2 = \dots = l_{n-1} = l_n = l \dots \dots \dots (17)$$

なるときは, (15) の形の $n-1$ 個の式と (16) とを邊々相加へると

$$\frac{k}{l} = n \rho g S \left(\frac{dH}{dx_1} - 1 \right)$$

となり, 之より水位の低下に伴ふ表面沈下率

$$\frac{dx_1}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho g S} \left(\frac{k}{nl} \right)} \dots \dots \dots (18)$$

が得られる。又表面と内部との沈下の比として

$$\frac{dx_i}{dx_1} = 1 - \frac{i}{n}, \dots \dots \dots (19)$$

更に (18) と (19) とより、水位の低下に伴ふ表面と内部との沈下率の差は

$$\frac{dx_1}{dH} - \frac{dx_i}{dH} = \frac{i/n}{1 + \frac{1}{\rho g S} \left(\frac{k}{nl} \right)} \dots \dots \dots (20)$$

と求まる。

(17) の如き特別な関係が存在しない時は、(13) 又は (14) の上の式より順次 dx_2/dx_1 , dx_3/dx_2 , $\dots \dots$ を消去して行き、 dH/dx_1 従て dx_1/dH を求めることが出来るが、其結果は複雑な連分數となるので、一般式の表示が困難である。

例) 今簡単な一例として、浮標が

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$$

の如く自然長が等しく、

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 4$$

の如く弾性係数が下位のもの程大きい 4 本のバネによつて支へられてゐる場合⁽¹⁾ を計算して見ると、次の如き結果を得る。

$$\frac{dx_1}{dH} = \frac{1}{1 + \frac{12}{25 \rho g S l}}$$

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 = 25 : 13 : 7 : 3 = 1 : 0.52 : 0.28 : 0.12$$

即ち、表層の沈下即全沈下量に對し第 2 層は其約 5 割、第 3 層は約 3 割、第 4 層は約 1 割の沈下をなすことになる。尙ほ比較のため各バネの壓縮率の比をとると

$$1/k_1 : 1/k_2 : 1/k_3 : 1/k_4 = 1 : 0.50 : 0.33 : 0.25$$

で、沈下量の比程開きがないことが解る。

(1) これは大阪の地層になぞらへたものである。(4, 11 頁)

さて (18) を見るに、之は浮標が 1 個のみの時の l の代りに單に nl と置いたものに等しい。このことから吾々は水中の浮標間を連結するバネを、之等の浮標を無視して繋ぎ合はせれば、直に一つの浮標の場合に引直せることを知る。又 (14) より明なる如く、一般に k_i や k_{ii} が等しくない場合にも、沈下率に關する限り、得られる結果は内部の浮標の形狀・質量等に無關係である。従つて浮標の形狀による各種モデルの差異は單に一個の浮標を有するものに就て吟味して置けば充分であることを知る。

II. 動力學的考察

次に問題を平衡の狀態から運動の狀態に移して見よう。實際との比較は本章に於て始めて行はれるが、其處で吾々は極めて満足すべき結果に到達するであらう。本章では先づ、近似計算により、和達博士の與へられた實驗公式を導き、次で博士の注意されなかつた沈下速度曲線の特性を導き、最後に、嚴密なる解法により、前の近似計算の正しいことを證明する。

5. 沈下速度公式の誘導 前章第 1 例のモデルを擇び、座標軸も前と同様にとつて、浮標の運動方程式を作れば

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + \alpha \frac{dx'}{dt} = F + \rho g S (H - x') - Mg + f. \dots\dots\dots (21)$$

左邊第二項は粘性抵抗を表し、 f は擾亂を表す項である。

此力學系が平衡に在つた時を $t=0$ とし、其時の x', x, H, f の値を夫々脚符 0 を附したるものを以て表せば、運動方程式は (2) を考慮し

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + \alpha \frac{dx'}{dt} = \frac{k}{l} (x'_0 - x') + \rho g S \{ (H - H_0) + (x'_0 - x') \} + f - f_0,$$

或は

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} = -\rho g S (H_0 - H) + \left(\frac{k}{l} + \rho g S \right) (x_0 - x) + f - f_0, \quad (22)$$

又は

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{l} + \rho g S \right) x = \rho g S H + f + \frac{k}{l} x_0 + \rho g S (x'_0 - H_0) - f_0 \dots\dots\dots (23)$$

となる。

こゝで若し地層の粘弾性を考慮に入れるならば、モデルのバネの弾力には (2) の代りに

$$F = k \left(1 - \frac{x'}{l} \right) - \frac{k'}{l} \frac{dx'}{dt} \quad (2')$$

なる式を與へればよい。其時には (22) は

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\alpha + \frac{k'}{l} \right) \frac{dx}{dt} = -\rho g S (H_0 - H) + \left(\frac{k}{l} + \rho g S \right) \times (x_0 - x) + f - f_0 \dots \dots \dots (22')$$

となる。これは (22) の α の代りに $\alpha + \frac{k'}{l}$ と置いたものに等しく、式の形に於ては根本的な差異を生じない。即ち (22) はバネが粘弾性を有すると否とに拘らず成立つ。従つて (22) の α の中には最初から粘弾性の影響も含まれてゐると解釋してもよい。

H 及び f を t のみの函数とすれば、 x は二次線型微分方程式 (23) の解として與へられる。此解は後に述べることとし、今特に (22) に於て左邊第二項と右邊第一項のみが大きき、他は之等に比して無視出来る場合には

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{\rho g S}{\alpha} (H_0 - H) \dots \dots \dots (24)$$

即ち和達博士の求められた沈下速度公式 (5, 28 頁 (3))

$$-\frac{dH}{dt} = k(p_0 - p) \dots \dots \dots (24')$$

と同じ意味を表す式が得られる。これによれば沈下速度は地下水位に比例することとなる。

6. 沈下量公式の誘導 次に吾々は (22) より和達博士が沈下曲線に對して與へられた公式 (5, 13 頁 (1), S : 沈下量)

$$S = at + F(t) \dots \dots \dots (25)$$

を導き、尙かくして導かれる $F(t)$ の形が實際 (5, 12 頁, 第 9 圖) と合ふか否かを調べて見よう。

(22) の右邊を第二項迄採れば

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\rho g S}{\alpha} (H_0 - H) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{k}{l} + \rho g S \right) (x_0 - x) \dots \dots \dots (26)$$

之は

$$\left. \begin{aligned} \rho g S / \alpha &= k_1, & (k/l + \rho g S) / \alpha &= k_2, \\ [-\rho g S H_0 + (k/l + \rho g S) x_0] / \alpha &= -k_1 H_0 + k_2 x_0 = A \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

と置くことにより

$$\frac{dx}{dt} = k_1 H - k_2 x + A \dots\dots\dots (28)$$

と表される。之を解けば

$$x = e^{-k_2 t} \{ \int e^{k_2 t} (k_1 H + A) dt + B \}, \dots\dots\dots (29)$$

但し B は初期条件によつて定まる積分常數である。

今、九條小公園の鑿井管水位の觀測結果 (5, 22 頁, 第 15 圖) を見るに、水位は略々直線的減少の上に正弦型年變化の重合した變化をなす故、

$$H = H_0 - ct + H_m \sin 2\pi t/T, \quad c: \text{常數} \dots\dots\dots (30)$$

とおいて (29) に代入し、少しく計算すれば、

$$x = x_0 + B e^{-k_2 t} - \frac{ck_1}{k_2} \left(t - \frac{1}{k_2} \right) + \frac{k_1 H_m}{\sqrt{p^2 + k_2^2}} \sin(pt - \theta), \dots\dots (31)$$

但し

$$p = 2\pi/T, \quad \tan \theta = p/k_2.$$

又 $t=0$ に於て $x=x_0$ なる故、積分常數 B は

$$B = k_1 \left(\frac{c}{k_2^2} - \frac{pH_m}{p^2 + k_2^2} \right). \dots\dots\dots (32)$$

(31) を書直せば

$$\begin{aligned} x = & -\frac{k_1 c}{k_2} t + \left[x_0 + \frac{k_1 c}{k_2} + \frac{k_1 H_m}{\sqrt{p^2 + k_2^2}} \sin(pt - \theta) \right. \\ & \left. + k_1 \left(\frac{c}{k_2^2} - \frac{pH_m}{p^2 + k_2^2} \right) e^{-k_2 t} \right]. \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

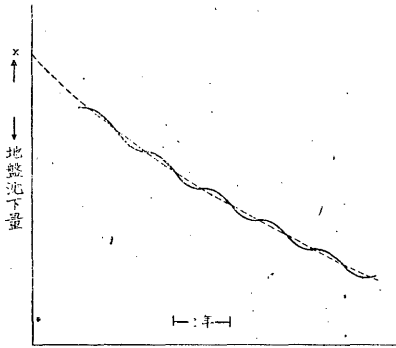
之は (25) と同一の内容を有し

$$\begin{aligned} -\frac{k_1}{k_2} c = a, \quad x_0 + \frac{k_1 c}{k_2} + \frac{k_1 H_m}{\sqrt{p^2 + k_2^2}} \sin(pt - \theta) \\ + k_1 \left(\frac{c}{k_2^2} - \frac{pH_m}{p^2 + k_2^2} \right) e^{-k_2 t} = F(t)^{(1)} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

(1) $F(t)$ に就ては和達博士の詳しい検討があるが、こゝでは主として年週期的大變化のみを考へる。

と置けば、両者は全く等しくなる。而して (27) より明なる如く $k_1 < k_2$ なる

第 9 圖



故、 $|a| < |c|$ (a と c の符號の相違は S と x のセンスの相違に由る) なることは明かである。又 $F(t)$ は最後の項を除いて考へれば、水位と同一週期の變化をなし、其振幅は水位の振幅の $k_1/\sqrt{p^2+k_2^2}$ (<1) 倍、位相は水位の方より θ 丈遅れてゐる。

第 9 圖は此結果を表す模式圖である。之を和達博士の實測曲線

(5, 12 頁, 第 9 圖) と比較するに、傾向としてはよく一致する。今試みに九條小公園の實測材料により數值的算定を行つて見ると、永年變化では

$$a = 8.12 \text{ cm/年}, \quad c = 50 \text{ cm/年}$$

程度であつて、之より

$$k_1/k_2 = 0.16$$

を得る。又年變化の材料よりは

$$k_1 H_m / \sqrt{p^2 + k_2^2} = 0.7 \text{ cm}, \quad H_m = 100 \text{ cm (580 尺管)}$$

程度であつて、 θ は 2~3 ケ月と認められる。水位變化の週期を 1 年とし、 $p = 1.96 \times 10^{-7} \text{ 秒}^{-1}$ として上の値を組合はせ、 k_1, k_2 を求めて見ると

$$k_1 = 1.4 \times 10^{-9} \text{ 秒}^{-1}, \quad k_2 = 0.86 \times 10^{-8} \text{ 秒}^{-1} \dots\dots\dots (35)$$

となる。之等の値に就ては後に觸れる。

(33) は沈下量の變化を表す式ではあるが、水位の變化型式 (30) によつて如何様にもなるものであるから、和達博士の注意 (5, 39 頁) の如く、夫自身は將來の見透しに對して殆ど何の力も有たない、水位の變化型式こそ更に根本的な因子である。

7. 沈下速度曲線特性の誘導 (24) は (22) 式右邊第一項のみを採つた場合導かれる式であるが、吾々は更に同式右邊第二項迄考へた式 (26) によつて

(1) 和達博士の算定による (5, 13 頁)。

和達博士の言及されなかつた今一つの著しい事實が説明されることをここに示さう。

年變化の如き比較的短期間の水位變化に對しては (30) の代りに、年平均水位を H_1 とし

$$H = H_1 + H_m \sin 2\pi t/T \dots\dots\dots (36)$$

と表してもさして不都合ではないであらう。(36) を (29)' に代入して微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{pk_1}{p^2+k_2^2} \{p(H-H_1) + k_2 H_m \cos pt\} - k_2 B e^{-k_2 t} \dots\dots\dots (37)$$

或は

$$= \frac{pk_1}{p^2+k_2^2} \{p(H-H_1) \pm k_2 \sqrt{H_m^2 - (H-H_1)^2}\} - k_2 B e^{-k_2 t} \dots (38)$$

但し B は (32) とは異なる積分常數となる。

今
$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_3$$

とし

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{p^2 k_1}{p^2+k_2^2} (H-H_1) \dots\dots\dots (39)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \pm \frac{pk_1 k_2}{p^2+k_2^2} \sqrt{H_m^2 - (H-H_1)^2} \dots\dots\dots (40)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = -k_2 B e^{-k_2 t} \dots\dots\dots (41)$$

と置けば、第一項は H に比例し、第二項は H と共に

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)_2^2}{\left(\frac{pk_1 k_2}{p^2+k_2^2} H_m\right)^2} + \frac{(H-H_1)^2}{H_m^2} = 1 \dots\dots\dots (42)$$

によつて定まる楕圓的變化をなし、第三項は時間と共に消失する。今 t が相當大にして、第三項が消失した場合を考へ、上式によつて與へられる沈下速度と水位との關係を圖示すれば第 10 圖右方の曲線の如くなる。圖に於て直線は (39) を、左方の楕圓は (40) を表す。其位相は (36) によつて與へられる H

の正弦型年變化の位相と一致し、實際の場合には之に月日を對應せしめることが出来る。今、和達博士の第 15 圖により、水位變化の大約の位相を月日を以て定めて見ると

極大: 2月1日 極小: 8月1日
 中間: 11月1日 (漸増)
 5月1日 (漸減)

となる。従つて橢圓上の位相は記入の如くなり、曲線の位相も亦同様となる。矢印は dx/dt の時間的變化の方向を示す。

こゝに得られた曲線は和達博士の第 19 圖 100 尺管の觀測結果と傾向に於てよく一致する。計算曲線は H に對し (36) の如き近似的表示を採

つて誘導されたものであるから、實測曲線の細部迄表現しないのは勿論であつて、若し H の實測値を直接 t の函數として (29) に代入するならば、結果は更に良好であらう。

次に九條小公園の觀測材料により、前節の如き數值的算定を行つて見よう。580 尺管の觀測結果は上の理論から導かれる所と若干の差異があるので、算定は 100 尺管の場合に就てのみ行ふ。先づ曲線の平均の傾斜から、(39) の係數として

$$p^2 k_1 / (p^2 + k_2^2) = 3.8 \times 10^{-5} \text{日}^{-1} = 4.4 \times 10^{-10} \text{秒}^{-1} \quad (1)$$

を得る。次に曲線の形から、(42) なる橢圓の長短兩軸の長さとして夫々

$$H_m = 2.0 \text{ m}, \quad p k_1 k_2 H_m / (p^2 + k_2^2) = 0.010 \text{ mm/日}$$

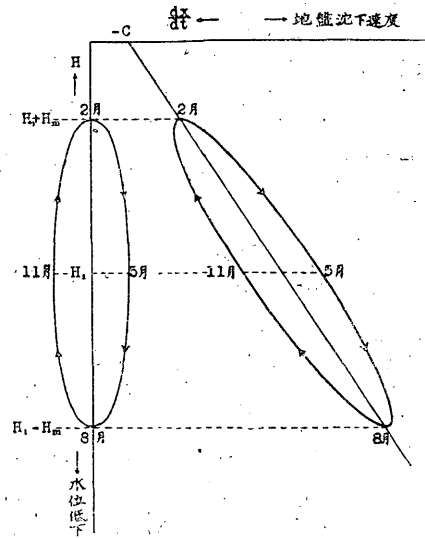
ととり、之より

$$p k_1 k_2 / (p^2 + k_2^2) = 0.58 \times 10^{-10} \text{秒}^{-1}$$

を得る。之等を組合せ、 k_1 、 k_2 を求めると

(1) 和達博士の算定による。(5, 29 頁)

第 10 圖



$$k_1 = 0.45 \times 10^{-9} \text{ 秒}^{-1}, \quad k_2 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ 秒}^{-1} \dots\dots\dots (43)$$

なる結果が得られる。

此結果を (35) と比較して見ると、 k_1 は (35) の約 $1/3$ 、 k_2 は約 3 倍となつてゐるが、(35) と (43) とでは、

前者は 580 尺管の材料により、後者は 100 尺管の材料によつたのであるから、材料に若干の相違があるに拘らず、全く別な方法で求めた之等二組の値が此程度に一致することは注目すべきであらう、

次に吾々は k_1, k_2 として假りに (35) を採用するとき、モデルの基本的な量が如何に定まるかを (27) に立返つて調べて見よう。(27), (35) より直ちに

$$S/\alpha = k_1/\rho g = 14 \times 10^{-12} \text{ C.G.S.}$$

(但し $\rho = 1$ とす)

$$k_2/l\alpha = k_2 - k_1 = 0.72 \times 10^{-8} \text{ C.G.S.}$$

之より

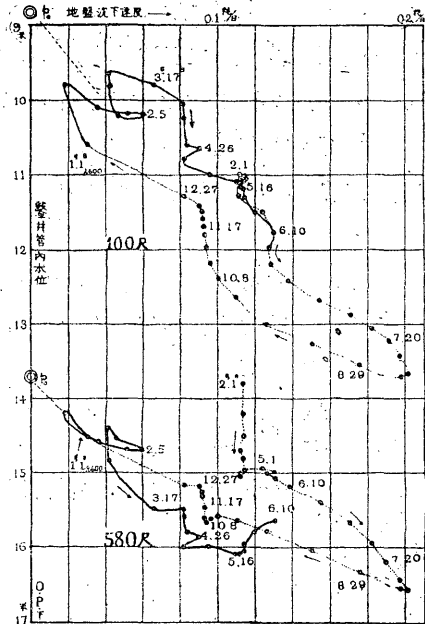
$$Sl/k = 1.0 \times 10^{-4} \text{ C.G.S.}$$

となる。飯田氏 (7) の東京丸ノ内の土を材料とせる弾性常數測定結果によれば、同所表層土のヤング率は大體 $10^7 \sim 10^9$ C.G.S. 程度である。仍つて今モデルのバネの弾性常數 k を假りに 1×10^9 C.G.S. とれば

$$Sl = 1.0 \times 10^5 \text{ cm}^3$$

を得る。故にバネの自然長 $l = 100 \text{ m}$ のモデルを擇べば $S = 10 \text{ cm}^2$ 、 $l = 10 \text{ m}$ のモデルを擇べば $S = 100 \text{ cm}^2$ とればよいことを知る。夫等の場合 α は夫々 0.72×10^{13} C.G.S. 或は 0.72×10^{14} C.G.S. となる。 α がかゝる大なる値をとることは地下水が土砂質の中を流動するための流動粘性、或はこの場合には考へな

第 11 圖



第 11 圖 地下水壓と地盤沈下速度との關係；點線：昭和 14 年，實線：昭和 15 年（九條小公園）(和産博士に於て)

かつた土とパイプとの間の摩擦を考へることによつて説明されるであらう。

8. 沈下方程式の完全なる解 吾々は前節に於て沈下方程式 (22) の各項間に極めて大膽な輕重の假定を行ひ、それによりて導かれる結果を實測と比較して其一致を論ずる危険を敢てした。之は要するに、本文が元々極めて大膽なる假定の上に立つ一大假説であつて、要は如何なる假定を受容れても、實測と一致する結果を導來すれば足る性質のものであるからである。如何なる近似計算を行ふ共、先づ實測に合ふことが要求されたからに外ならない。

こゝで吾々は元に戻り、(23) の完全なる解を求め、上の如き近似計算が果して許容されるか否かを調べて見よう。

今

$$\left. \begin{aligned} \alpha/M = 2\varepsilon, \quad (k/l + \rho g S)/M = n^2, \\ [\rho g S H + f + \{k x_0/l + \rho g S(x_0 - H_0) - f_0\}]/M = \Phi(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (44)$$

と置けば、(23) は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx}{dt} + n^2 x = \Phi(t) \dots\dots\dots (45)$$

となる。これは外力の下に在る地震計振子の運動方程式と全く同一であつて、

其解は⁽¹⁾

$$\begin{aligned} x = e^{-\varepsilon t} [C \cos \gamma t + S \sin \gamma t] \\ + \frac{1}{\gamma} e^{-\varepsilon t} [-\cos \gamma t \int e^{\varepsilon t} \sin \gamma t \cdot \Phi(t) dt + \sin \gamma t \int e^{\varepsilon t} \cos \gamma t \cdot \Phi(t) dt]. \end{aligned} \quad (46)$$

但し

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2},$$

C 及び S は初期條件によつて定まる積分常數である。

今、更に

$$\rho g S/M = K_1, \quad 1/M = K_2, \quad [k x_0/l + \rho g S(x_0 - H_0) - f_0]/M = K_3 \quad (47)$$

と置けば

$$\Phi(t) = K_1 H(t) + K_2 f(t) + K_3 \dots\dots\dots (48)$$

(1) 例へば F. B. Galitzin: Vorlesungen über Seismometrie 1914, p. 257.

寺澤寛一; 數學概論 298~299 頁 其他

仍つて

$$\begin{aligned}
 x = & e^{-\epsilon t} [C \cos \gamma t + S \sin \gamma t] \\
 & + \frac{e^{-\epsilon t}}{\gamma} [-\cos \gamma t \{K_1 \int e^{\epsilon t} \sin \gamma t \cdot H(t) dt + K_2 \int e^{\epsilon t} \sin \gamma t \cdot f(t) dt\} \\
 & + \sin \gamma t \{K_1 \int e^{\epsilon t} \cos \gamma t \cdot H(t) dt + K_2 \int e^{\epsilon t} \cos \gamma t \cdot f(t) dt\}] + \frac{K_3}{n_2}. \quad (49)
 \end{aligned}$$

と表され、 $H(t)$ 及び $f(t)$ が実際に與へられれば計算される。

今、特に

$$\left. \begin{aligned}
 H(t) &= H_m \sin pt \\
 f(t) &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

と置けば、前節で議論された様な場合となる。此様な場合の解は既によく知れてゐる如く

$$x = e^{-\epsilon t} [C \cos \gamma t + S \sin \gamma t] + \frac{K_1 H_m \sin(pt - \delta)}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} + \frac{K_3}{n^2} \dots \dots (51)$$

又、但し $\tan \delta = \frac{2\epsilon p}{n^2 - p^2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = & e^{-\epsilon t} [(\gamma S - \epsilon C) \cos \gamma t - (\epsilon S + \gamma C) \sin \gamma t] \\
 & + \frac{pK_1 H_m \cos(pt - \delta)}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} \dots \dots \dots (52)
 \end{aligned}$$

t が相當大ならば最初の自由振動の項は消失する。今吾々は其様な状態に在る地盤沈下を考へるものとすれば、

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \frac{K_1 H_m \sin(pt - \delta)}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} + \frac{K_3}{n^2}, \\
 \frac{dx}{dt} &= \frac{pK_1 H_m \cos(pt - \delta)}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

なる故

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{pK_1 H_m}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} (\cos pt \cos \delta + \sin pt \sin \delta) \\
 &= \frac{pK_1 H_m}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} [\sin pt \sin \delta + \cot \delta \{\sin pt \cos \delta - \sin(pt - \delta)\}]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{pK_1 \operatorname{cosec} \delta}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} H - p \cot \delta \left(x - \frac{K_a}{n_2} \right).$$

然るに

$$\operatorname{cosec} \delta = \frac{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}}{2\epsilon p}, \quad \cot \delta = \frac{n^2 - p^2}{2\epsilon p}$$

なる故

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K_1}{2\epsilon} H - \frac{n^2 - p^2}{2\epsilon} x + \frac{n^2 - p^2}{2\epsilon k^2} K_a \dots \dots \dots (54)$$

(27), (44), (47) を参照して此式を書換へると

$$\frac{dx}{dt} = k_1 H - k_2 \left(1 - \frac{p^2}{n^2} \right) x + \left(1 - \frac{p^2}{n^2} \right) A \dots \dots \dots (55)$$

之を(28)と比較するに、右邊第二、三項の括弧内が何れも1となつた場合が(28)である。然るに實際上 $p \ll n$ なる故、 p^2/n^2 は1に比して遙に小さく、無視しても差支ない。即ち(28)式は(50)の如き條件を與へる限りに於て、嚴密な解に十分近い關係式であつて、従つてそれより導かれた前二節の結果は十分信用し得るものであることがこゝに確かめられた。

9. 結 語 地下水の浮力と地層の弾性とを地盤沈下に興かる二大力と考へて地盤沈下の機構に関する一假説を提出し、此假説を簡単なモデルに托して計算を行ひ、其妥當性を驗した。

先づ靜力學的計算によつて、地盤沈下の實際と合致するモデルと然らざるモデルとを判別し、次に動力學的計算によつて、此假説から和達博士の實測諸結果を導くことに成功し、假説の眞實性を裏付けた。

此モデルの成果は和達博士の確立せる地下水壓主要原因論を側面的に支持するものと考へる。

終に臨み、拙稿を丹念に御検討下され、種々有益な御忠言と示唆に富む御批判を賜つた藤原先生に深甚の感謝を捧げ、又圖の轉載を快諾された和達先生、種々有益な助言を與へ、代讀の勞を厭はれなかつた廣野氏等にも深謝する。

(昭和15年11月、仙臺地方氣象臺にて)

文 獻

1. 宮 部 直 己, 地震研究所彙報 **10** (1932) 844-857, **13** (1935) 587-591, 763-771, **15** (1937) 102-108, **16** (1938) 721-756, **17** (1939) 723-732, **18** (1940) 57-77. 帝國學士院記事 **7** (1931) 344-347, **8** (1932) 417-420, **9** (1933) 588-591. 地震 **11** (1939) 414-424, **12** (1940) 59-64.
2. 北 澤 五 郎, 建築雜誌 **49** (1930) 建築大會論文集 **9** (1938) 187-194, **13** (1939) 275-282. 地震 **11** (1939) 260-264.
3. 渡 邊 貫, 地震 **9** (1937) 143-158.
4. 廣 野 卓 藏, 和 達 清 夫, 災害科學研究所報告 **2** (1939) 1-57.
5. 和 達 清 夫, 災害科學研究所報告 **3** (1940) 1-41. 科學 **10** (1935) 316-318, 360-361.
6. 森 田 稔, 地震 **7** (1935) 395-419.
7. 飯 田 汲 事, 地震研究所彙報 **15** (1937) 828-836, **18** (1940) 78-101.