験震時報

第11巻　第4號

粘弾性波に就て(第3報)

(レーレー波及びラヴ波に就て)

廣野卓藏

§1. 岩石の彈性に關する實驗的事實は，地震波の理論の根據となるものである．從つて，岩石の其の方面の實驗的研究は，震波の理論にとつて，非常に重要である事は，言ふまでもない．併し，更に大切なる事は，實驗的事實を，適當なる數式を以て，十分に表現する事である．併し乍ら，現在までに諸學者に依つて爲された，斯の如き實驗的研究の結果，判明した岩石の彈性學的性質は，可成に複雜なものであつて，これを適當なる數式で十分に表現すると云ふ事は到底出來なかつたのである．そこで從來の地震波の理論は，實驗に依つて知られた岩石の彈性的性質の第一近似値として完全彈性體即ち應力と變位との關係にフックの法則が成立する樣な物質を考へて來た．併し輓近の定量的に進歩して來た地震學は，地震波の理論の根據となる岩石の彈性的性質として更に高度の近似式を要求する樣な事實に遭遇する樣になつた．例へば「S波の不足」等の諸問題がそうである．

しからば更に高度の近似式とは如何なる式であらうか．それは物體の粘性を考慮に入れた應力變位關係式である．但し此處に云ふ粘性とは物質の彈性運動をしてフックの法則から異らしめる總ての原因を指して云ふものであつて，その特長とする所は物質に加へられた應力の循環作用に依つて物質内に内部仕事を爲さしめる事が出來る事である．而して内部仕事があると云ふ事を解析的に言へば變位の位相が其れに對する應力の位相よりも遅れると云ふ事に外ならな

い.故に彈性體の應力變位關係式のより近似的な式とはフックの法則以外に尙應力と變位の位相差をも考慮に入れた式でなければならない. 然らば此の位相差は如何にして數式的に表はし得るであらうか. それは應力と變位の比例係數を $\sum Cn\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}$ の如く展開する事に依つて目的を達する事が出來る. 但し n は整數で Cn は常數である. 勿論此の場合變位の位相が應力の位相よりも速くないと云ふ事を考慮に入れなければならない.

然らば上の展開式で n が零の時はフックの法則を表はす. n が1の時は固體粘性を表はし, 應力變位關係は $P=\mu\left(E-t_2\dfrac{dE}{dt}\right)$ と書ける. n が -1 の時は彈性體粘性（可塑性）を表はし, 應力變位關係は $P=\mu\left(E-\dfrac{1}{t_1}\int Edt\right)$ と書ける. 即固體粘性と云ひ可塑性と云ふのは事實を說明するほんの第二近似式に過ぎない. 勿論部分的にはフックの法則よりも遙かによく事實に適合させる事が出來るがそれを以て物質の變化の全域に外挿する事は不適當である.

本論文に於ては此の第二近似式を使用して地震波の一部を論じて居るのであるが, 上に述べた理由に依つてその中に假定した物質の定數を用ひて此の式を地震波でない他の現象例へば地殼潮汐（地震に比して週期が遙かに長い）や山脈の荷重問題に適用する時には, 或は全く不自然な結果に達するかも知れない.(1) 併しそれは用ふべき所を得なかつたのであつて, これを以て地震波に對してこの式を用ひた事の不都合である事を結論する事は出來ない.

然らば地震波傳播媒質としての土地の性質を表はすには第二近似式の何れの式を用ひたらよいであらうか. 即固體粘性, 可塑性, 或は此の二つを組合せたもの, 等の式があるがその何れが適當であるかは未だ議論の餘地ある所である. 實際今迄土地の粘性を考慮に入れて地震波を議論した諸氏は土地の粘性として固體粘性を採用した.(2) しかし現在筆者が土地の粘性として假定したものは可塑性即長週期の波に對しては粘性流體の如く働き短週期の波に對しては完全彈性體の如く作用する性質であつてこの性質は飯田氏のパラフィン砂岩等の剛

---

(1) 驗震時報本號揭載拙著「軟地盤の加重による沈下」に於けるかゝる場合の取扱ひ方參照.

(2) 參考迄に固體粘性の概念を一言すれば即, 長週期の波に對しては完全彈性體の如く働き短週期の波に對しては粘性が強くなつて剛體 (rigid body) の如くに作用する. 固體粘性を採用した學者として妹澤, 伊藤(德), 荒川の諸大家が擧げられる.

性に關する實驗の結果に完全に一致するとは云へないが少なく共固體粘性よりもよく一致する爲に採用したものである．尙此の點に就て筆者は他日更に研究を進めたい意向を持つて居る．

仮，筆者は本論文の第2報[1]に於て，地球核が外部より遙かに可塑性強き物質より成ると假定してよくScS波の顯著に出る事及その衝擊形を說明し得たが，此の第3報に於ては，第2報で建てた可塑性の運動方程式を使用し尙可塑性は少ないものとしてそれが如何にレーレー波及びラヴ波に影響するかを，簡單な模型的場合に就て硏究した．使用せる數式等は普通彈性力學の敎科書にあるものと全く同形のものであるが，得られた結果の物理的意味が面白いので，數式の目新しさのない事も省ず敢へてこゝに發表する次第である．

§2. レーレー波[2]

此處で取扱ふのは二次元の問題である．半無限完全可塑性體の表面に沿うて x 軸を取り表面に垂直に內部に向つて y 軸を取る．然る時完全可塑性媒質內の運動の方程式は

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=(\lambda+M)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+M\nabla^2 u\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=(\lambda+M)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+M\nabla^2 v\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

こゝに u, v は變位の x, y 成分で $\propto e^{ipt}$ と置いてある．ρ は密度，$M=\dfrac{\mu p}{p-\mu' i}$ λ, μ; ラーメの常數，$\dot{\mu}'$ は可塑性係數で Δ は $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$ を表はす．こゝで注意したい事は今取扱はんとしてゐるのは考へて居る場に一定の振動數 $p/2\pi$ を以て絕へず波動の勢力を送り込んで狀態が定常になつて居る模型的場合であつて一種の思想實驗に過ぎない．從つて今波動が時間的に減衰する事は考へてゐない．

仮，應力と變位の關係式は

$$\left.\begin{aligned}&X_x=\lambda\Delta+2M\frac{\partial u}{\partial x},\quad Y_y=\lambda\Delta+2M\frac{\partial v}{\partial y},\\ &X_y=M\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

---

(1) 氣象集誌 13, 512 頁 (1935)

(2) 中野 廣, On Rayleigh Wave. Jap. Jour. Astro. Geop. Vol. II (1924) 參照
以下のレーレー波に關する基本の式は總てこれにならつた．

今

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

とおくと(1)より

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2M}{\rho}\nabla^2\Phi, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{M}{\rho}\nabla^2\Psi. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

又 $\Phi, \Psi \propto e^{ipt}$ とおけば

$$(\nabla^2+h^2)\Phi=0, \qquad (\nabla^2+k^2)\Psi=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

こゝに

$$h^2=\frac{p^2\rho}{\lambda+2M}=p^2a^2, \qquad k^2=\frac{P^2\rho}{M}=p^2b^2. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

a, b はそれぞれ可塑性媒質内の縦波，横波の速度の逆數で復素數である．復素數の物理的意味はそれぞれの波動は進行距離と共に減衰する事を表はす．上式により一般に h, k も複素數である．

應力變位關係を Φ, Ψ を以て表はすと

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=M\left(-k^2\Phi-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right),\\
X_y&=M\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-k^2\Psi-2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)\\
Y_y&=M\left(-k^2\Phi-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (7)$$

となる．今

$$\Phi=Ae^{-\alpha y}e^{i(pt+\xi x)}, \qquad \Psi=Be^{-\beta y}e^{i(pt+\xi x)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

を置くと(5)式より

$$\alpha^2=\xi^2-h^2, \qquad \beta^2=\xi^2-k^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

となる．h, k が複素數であるから一般に α, β も複素數であり，從つて Φ, Ψ は y に就て指數函數的に減衰するのみならず圓函數的にも變化する．從つて波動の進行方向が見掛け上，地表面と斜に交はつて居る事が分る．レーレー波は Φ, Ψ の兩成分に分けて考へる事が出來るが，それぞれを縱波，横波成分と呼べば，兩成分は各ゝ異つた角度で地表と交叉して居る事は α, β の値の虚部の相違から明かである．兩角の關係は表面の條件によつて定まる．地表面に於て

は應力が零であるからこれより

$$A=(2K'^2-k^2)C, \qquad B=\pm 2iK'\alpha_1 C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$F(\xi)=(2\xi^2-k^2)^2-4\xi^2\alpha_1\beta_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

こゝに C は任意常數で今簡單の爲實數とする. 又 K' は $F(\xi)=0$ の根の一つである. この K' は μ' を零に近づけた場合には完全彈性體の場合にラムが求めた $F(\xi)=0$ の正の實數根 K に一致する樣な根でなければならない. 又上式の α_1, β_1 は次の關係がある.

$$\alpha_1=\sqrt{K'^2-h^2}, \qquad \beta_1=\sqrt{K'^2-k^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

今 (10) 式の下の符號を取つて Φ, Ψ を求めこれを (3) に入れて變位を出すと

$$\left.\begin{aligned} U&=-iK'\{(2K'^2-k^2)\,e^{-\alpha_1 y}-2\,\alpha_1\beta_1 e^{-\beta_1 y}\}Ce^{i(pt-K'x)}, \\ v&=-\alpha_1\{(2K'^2-k^2)\,e^{-\alpha_1 y}-2K'^2e^{-\beta_1 y}\}Ce^{i(pt-K'x)} \end{aligned}\right\} \cdots(13)$$

(2) に入れて應力を求めると

$$\left.\begin{aligned} X_x&=-M(2K'^2-k^2)[(k^2+2\alpha_1^2)\,e^{-\alpha_1 y}-(2K'^2-k^2)\,e^{-\beta_1 y}]\,Ce^{i(pt-K'x)}, \\ X_y&=M2i(2K'^2-k^2)K'\alpha_1(e^{-\alpha_1 y}-e^{-\beta_1 y})\,Ce^{i(pt-K'x)}, \\ Y_y&=M(2K'^2-k^2)^2(e^{-\alpha_1 y}-e^{-\beta_1 y})\,Ce^{i(pt-K'x)} \end{aligned}\right\} (14)$$

となる. これ迄は教科書にあるレーレ波の解と殆んど同じである.

偖, 問題を簡單にする爲に可塑性係數 μ' は p に比して小數であるとすると

$$M=\mu\left(1+\frac{\mu'}{p}i\right), \qquad K'=K(1-\varepsilon i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

と置くことが出來る. こゝに ε は $\dfrac{\mu'}{p}$ と同じオーダーの小數である. これを (11) に入れると ε を求める式は

$$\left\{8-(2-\delta^2)\left(2+\frac{1}{1-\gamma^2}+\frac{1}{1-\delta^2}\right)\right\}\theta-\left\{4-(2-\delta^2)\left(\frac{2\zeta^4}{1-\gamma^2}+\frac{1}{1-\delta^2}\right)\right\}\frac{\mu'}{p}=0 \quad (16)$$

となる. こゝに $\theta=\dfrac{2\varepsilon}{\delta^2}$, $\gamma=\dfrac{h_1}{K}$, $\delta=\dfrac{k_1}{K}$, $\zeta=\dfrac{\gamma}{\delta}$ である. γ と δ の間には (11) より

$$(2-\delta^2)^4-16(1-\delta^2)(1-\gamma^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

の關係がある. これより γ を出して (16) に入れると

$$\theta=\frac{128(1-\delta^2)^3+64\,\delta^4(1-\delta^2)^2+\delta^8(24-16\,\delta^2+\delta^4)}{8\,\delta^4\{8(1-\delta^2)^2+\delta^4(3-2\,\delta^2)\}}\,\frac{\mu'}{p} \quad \cdots(18)$$

となる．上式から $1>\delta$ なる關係を注意する事により θ は正數であるのみならず $\theta>1$ なる事が證明される．之より（1）ε は常に正數となり，從つて波動は進行距離と共に減衰する．（2）ε は $\dfrac{\mu'}{p}$ に比例するから減衰は可塑性の強い程，又週期の長い程大きい．（3）(K^2-h^2), (K^2-k^2) の虚數部は常に負となるから Φ, Ψ 成分の進行方向は孰れも上方を向き，又虚部 (h^2) < 虚部 (k^2) であるから Φ 成分の傾角の方が Ψ よりも大である．

實際に近い場合として $\lambda=\mu$ とおくと K はラムにより $K=1.087664\cdots\times k_1$ なる關係がある．但し k_1 は k の $\mu'=0$ に於ける値である．これを（15),（16）に入れて K' を求めると

$$K'=1.0877\left(1-0.4773\frac{\mu'}{p}i\right)k_1$$

が得られる．更に（12）より

$$\alpha_1=\left(0.9218-0.9068\frac{\mu'}{p}i\right)k_1$$

$$\beta_1=\left(0.4228-0.1526\frac{\mu'}{p}i\right)k_1$$

の關係が得られる．

此處で直ちに問題になるのは，斯の如く見掛け上斜に進むレーリー波の勢力の流れる方向であるが，地表面に於ては應力は零であるから勿論波動の方向の如何に拘らず勢力は表面に沿うて x の方向に流れて居る．しからば少し內部に這入つた所では如何なる狀態に在るであらうか．これを調べる爲に x 及び y 方向に流れる勢力流 F_x, F_y を計算する．單位時間に單位面積を通過する勢力流は次の式で與へられる．

$$F_x=-\left(X_x\frac{\partial u}{\partial t}+X_y\frac{\partial v}{\partial t}\right).\quad F_y=-\left(X_y\frac{\partial u}{\partial t}+Y_y\frac{\partial v}{\partial t}\right)\cdots\cdots(19)$$

(13),（14）の實數部を取つて上式に入れ更に一週期に就て平均を取ると，少し長い式であるが次の如くになる．

$$F_x=\frac{C^2pQ_1{}^2RU}{2}e^{2R\sin r\cdot x}\Bigg[e^{-2S\cos s\cdot y}\left\{Q_2\cos(m+q'-r)+2S^2\cos(m+r)\right\}$$
$$+e^{-2T\cos t\cdot y}\left\{\frac{Q_1{}^2}{2R^2}\cos(m+r)+\frac{4R^2S^2}{Q_1}\cos(m+q-r)\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-e^{-(S\cos s+T\cos t)y}\Big\{Q_1\cos(m+q-r+\gamma y)+2S^2\cos(m+r+\gamma y)\\
&\qquad+\frac{Q_1Q_2}{2R^2}\cos(m-q+q'+r-\gamma y)+\frac{4R^2S^2}{Q_1}\cos(m+q-r-\gamma y)\Big\}\Big]\\
F_y=\frac{C^2pQ_1{}^2SU}{2}e^{2R\sin\gamma\cdot x}&\Big[e^{-2S\cos s\cdot y}\Big\{2R^2\sin(m+s)+Q_1\sin(m+q-s)\Big\}\\
&+e^{-2T\cos t\cdot y}\Big\{2R^2\sin(m+t)+Q_1\sin(m+q-t)\Big\}\\
&-e^{-(S\cos s+T\cos t)y}\Big\{2R^2\Big(\sin(m+s+\gamma y)+\sin(m+t-\gamma y)\Big)\\
&+Q_1\Big(\sin(m+q-s+\gamma y)+\sin(m+q-t-\gamma y)\Big)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\right\}\quad(20)
$$

となる. 但し, $2K'^2-k^2=Q_1e^{iq}$, $k^2+2\alpha_1{}^2=Q_2e^{iq'}$, $K'=Re^{ir}$,

$\alpha_1=Se^{is}$, $\beta_1=Te^{it}$, $M=Ue^{im}$ 及び $\gamma=S\sin s-T\sin t$ である.

$\lambda=\mu$ とし μ' が小さいとすると

$$
\begin{aligned}
F_x=1.0145\mu'p^8b^7C^2e^{-0.9546\mu'b_1x}&\Big\{4.3988\,e^{-1.8436k_1y}\\
&+3.73226\,e^{-0.8456k_1y}-7.5328\,e^{-1.3446k_1y}\cos\frac{\mu'}{p}(3.8307+0.3393\,k_1\,y)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_y=0.8598\,\mu\mu'\,k_1{}^7C^2e^{-0.9546\mu'b_1x}&(1.9402\,e^{-1.8436k_1y}\\
&+2.1129\,e^{-0.8456k_1y}-4.0531\,e^{-1.3446k_1y}\cos 0.3393\,\mu'b_1y)
\end{aligned}
$$

但し k_1, b_1 は k, b の實數部である. 上式に於て容易に F_x, F_y の値が y の値の如何によらず常に零より大なる事が證明される, 卽勢力は表面近くに於ては表面に沿うて流れ, 少し下方に行くと下方へも流れる. これは勢力が地下に逸散する事を物語るものである. $\lambda=\mu$ の場合に限らず一般にこの事が云へるのであつて次にこれを證明する. 但し勿論 μ' は小さいとする. (20) より F_y は

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{C^2pQ_1{}^2SU}F_y\geqq&\{(2R^2+Q)\,m+Qq\}(e^{-Sy}-e^{-Ty})^2\\
&+(2R^2-Q)(e^{-Sy}-e^{-Ty})\{(m+s)\,e^{-Sy}-(m+t)\,e^{-Ty}\}\cdots\cdots(21)
\end{aligned}
$$

となる. $S>T$, $s<t<0$, $2R^2>Q$ であるから $(2R^2+Q)m+Qq$ が正であること, 書き換へれば $\theta<\left(2+\dfrac{1}{2-\delta^2}\right)\dfrac{\mu'}{p}$, 及び $\theta<2\dfrac{\mu'}{p}$, 結局 $\theta<2\dfrac{\mu'}{p}$ なる事を證明すれば $0<F_y$ となる. (18) より

$$
2\frac{\mu'}{p}-\theta=\frac{-128(1-\delta^2)^3+64\,\delta^4(1-\delta^2)^2+\delta^8(24-16\,\delta^2-\delta^4)}{8\,\delta^4\{8(1-\delta^2)^2+\delta^4(3-2\,\delta^2)\}}\,\frac{\mu'}{p}\cdots(22)
$$

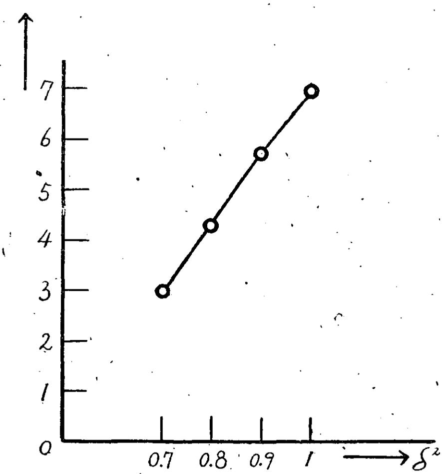
分母は明かに正數であるから分子のみを考へる．その前に δ^2 の變化し得る範圍を考へると (17) で $\dfrac{1}{\delta^2}=1+\delta'$ とおくと δ' は正數で

$$1-8\delta'-24\delta'^2-\delta'^3+16\zeta^2(1+\delta')^2\delta'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

となるから明かに ζ を大にすれば δ' は大になる．故に δ の下限は $\zeta=\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}=\dfrac{1}{2}$ の時でこの時の δ を δ_0 とすると $\delta_0{}^2=0.76479$ となる．又 δ^2 は1より小である，そこで $\delta^2=1$ より $\delta^2=0.7$ までの (22) の分子を圖示すれば第1圖の如くなりこの領域に於ては (31) 式分子は常に正なる事が分る．從つて $\theta<2\dfrac{\mu'}{p}$ であり $F_y>0$ である．證明終り．

第　1　圖

($Y=-126(1-\delta^2)^3+64\delta^4(1-\delta^2)^2+\delta^8(24-16\delta^2-\delta^4)$



見掛けの波動の方向が上方を向いて居るにも拘らず斯の如く波動の勢力はかへつて下方に流れる事は，土地の可塑性による變位と應力の位相差による事は明である．又餘程表面から下ると勢力流下が少くなるのは途中に於て媒質に吸收され熱となつた爲であると解せられる．尙可塑性が強い程，地下に逸散する勢力が多くなる事が判るが，見掛けの波動方向はかへつて立つて來る事は注意に値する事と思ふ．

§3. ラ　ヴ　波

昔ウ ＊ ーヘルトは，表面波を說明する爲に地殼表層下の物質は熔岩より成りその剛性率が小なりと假定した．然し乍ら表層下の物質の剛性率が表層より小であると云ふ考はラヴの表面波の理論が一度出るに及んで全く拋棄しなければならなくなつた．然しそれかと云つて表層下熔岩說を全然捨てる理由は無いのであつて，石本博士の思想の如く，熔岩層は高壓の下に可塑性の強い而もそれ

程剛性率の小さくない彈性體に成つて居ると考へる事が出來る．從つて條件に依つては勿論表層にラヴ波は存在し得るのである．

筆者は §2 に於て大地が可塑性を有るものとしてこの表面を傳播するレーリー波に就て論じたが今ラヴ波を論ずるに當つても勿論表層は可塑性的粘性を有するものであらう．然し前述の如く下層は熔岩層であると云ふ考へにより下層物質は上層よりかなり強い可塑的粘性を有すると假定するから，上層の可塑性は下層の可塑性に比較して無視し得るものとする．本論文はこの見地に據り上層は完全彈性體であるとし，層の下は簡單の爲下方に無限に廣がる完全可塑性體より成るとし，此の場に絕えず一定の週期と勢力を持つた波を送り込んだ時の狀態を考へる．今問題を二次元に限る．厚さ T なる層の下面に，x 軸を波動の進行方向に取り垂直上方に z 軸を取る．y 軸に平行な變位を v とす．上層，層下の密度及剛性率をそれぞれ $\rho_1, \rho_2; \mu_1, \mu_2$ とし層下の可塑性係數を μ_2' とする．又波動の波長と週期は $\dfrac{2\pi}{f}$, $\dfrac{2\pi}{p}$ であり波型は單振動であるとする．然る時は先ず層の中の運動方程式は

$$(\nabla^2+K_1^2)\,v=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

こゝに $\quad K_1^2=p^2\rho_1/\mu_1 \qquad \cdots\cdots(2)$

(1) の解は $\quad v=(A\cos s_1z+B\sin s_1z)\,e^{i(pt-fx)} \qquad \cdots\cdots(3)$

こゝに $\quad s_1^2=K_1^2-f^2 \qquad \cdots\cdots(4)$

層の下では $\quad (\nabla^2+K_2^2)\,v=0 \qquad \cdots\cdots(5)$

こゝに $\quad K_2^2=p^2\rho_2/M \qquad \cdots\cdots(6)$

で $\quad M=\mu_2\left(1-\dfrac{\mu_2'}{p}i\right)^{-1} \qquad \cdots\cdots(7)$

である．然る時層下では

$$v=Ce^{s_2z}\,e^{i(pt-fx)} \qquad \cdots\cdots(8)$$

こゝに $\quad s_2^2=f^2-K_2^2 \qquad \cdots\cdots(9)$

$z=0$ で應力と變位が連續で $z=T$ で應力が零になる條件を入れると $A=C$, $\mu_1s_1B=\mu_2s_2C$, $-A\sin s_1T+B\cos s_1T=0$ でこれより A, B, C を消すと $\operatorname{tg} s_1T=\dfrac{Ms_2}{\mu_1s_1}$ 或は

$$\operatorname{tg}\sqrt{K_1^2-f^2}\cdot T=\frac{M\sqrt{f^2-K_2^2}}{\mu_1\sqrt{K_1^2-f^2}} \qquad \cdots\cdots(10)$$

ラヴ波の議論は（10）式の根の吟味に盡きる．併し乍らその根に關する一般的議論は複雜，且難解でこれをなす事は到底不可能である．

そこでまず層下の可塑性が比較的小さいと假定すると $M=\mu_2\left(1+\frac{\mu_2'}{p}i\right)$, $K_2^2=\frac{p^2\rho_2}{\mu_2}\left(1-\frac{\mu_2'}{\rho}i\right)$, $f=f_0(1-\varepsilon i)$ と置く事が出來る．これ等の式を（10）に入れて $\frac{\mu'_2}{p}$ ε の級數に展開して二乘以上を無視すると ε を求める式は

$$\left\{M_1 T\sec^2\sqrt{K_1^2-f_0^2}\cdot T+\frac{(K_1^2-K_2'^2)\mu_2}{(K_1^2-f_0^2)\sqrt{f_0^2-K_2'^2}}\right\}\varepsilon=\frac{\mu_2(2f_0^2-K_2'^2)\mu_2'}{2f_0^2\sqrt{f_0^2-K_2'^2}\,p} \quad (11)$$

となる．こゝに $K_2'^2=\frac{p^2\rho_2}{\mu_2}$ である．今の假定ではラヴ波が存在する時には $K_2'^2<f_0^2<K^2$ であるから（11）式より ε は正である事が分る．即波動は層の下に於ても又完全彈性體と考へた表層に於ても x と共に減衰する事が分る．物理的に考へて層下の可塑性の強度如何に拘らずこの事が常に成立しなければならないと考へられるからラヴ波の存在し得る限り（10）式を滿足する f の虛數部はアプリオリに負である事が推察される．

そこで次に一般の場合を考へ $f=f_0(1-\varepsilon i)$ とすると表層では

$$s_1=\sqrt{K_1^2-f^2}=\sqrt{K_1^2-f_0^2(1-\varepsilon^2)+2f_0^2\varepsilon i}\equiv s_{11}+s_{12}i \quad \cdots\cdots(12)$$

$\varepsilon\to0$ の時完全彈性體の場合と一致しなければならないからその爲には

$$K_1^2-f_0^2(1-\varepsilon^2)>0 \quad \cdots\cdots(13)$$

となる．又（12）式の實數部 s_{11} が正であるとすれば[(1)] ε が正であるから明かに（12）式の虛數部 s_{12} は正となる．層の下では

$$K_2^2=\frac{p^2\rho_2}{M}=\frac{p^2\rho_2}{\mu_2}\left(1-\frac{\mu_2'}{p}i\right)=K_{21}^2-K_{21}^2\frac{\mu_2'}{p}i$$

$$\sqrt{f^2-K_2^2}=\sqrt{f_0^2(1-\varepsilon^2)-K_{21}^2-\left(2f_0^2\varepsilon-K_{21}^2\frac{\mu_2'}{p}\right)i}=s_{21}+s_{22}i \quad (14)$$

$z\to\infty$ のとき波動の振幅が 0 になる爲には

$$f_0^2(1-\varepsilon^2)-K_{21}^2>0 \quad \cdots\cdots(15)$$

又（14）式の虛數部 s_{22} は實數部 s_{21} 及び ε が正であるから此れも正となる．即層下の波動は見掛け上上方に進む．

（15）式より ε が次第に大になると波長の存在し得る領域が値の小なる方に

(1) s_{11} は正であつても負であつても境界條件を入れると上層の運動は一義的に定まるから今此れを正として計算する．

ずれ，波速度が遅くなり，$\varepsilon \geqq 1$ なる範圍で最早ラヴ波は存在し得ない．(11)式より可塑性が小なる限り可塑性の強さと ε とは比例する．若し可塑性が強くなる程波動の減衰が大になると云ふ假定が許されるならば[1]可塑性が大になると ε も大になり從つて或る程度以上可塑性が強くなるとラヴ波は存在し得なくなる．

(3) 式に A, B の關係を入れると上層を傳はる波は

$$v=\frac{C\cos(z-T)s_1}{\cos Ts_1}e^{i(pt-fx)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$s_1=s_{11}+s_{12}i$ とおくと上式の實數部は

$$v=\frac{Ce^{-f_0\varepsilon x}}{4(\cos^2 s_{11}T+\sinh^2 s_{12}T)}\Big[\cos\{\gamma-s_{11}(2T-z)\}e^{-s_{12}Z}$$
$$+\cos\{\gamma+s_{11}(2T-z)\}e^{s_{12}Z}+\cos(\gamma-s_{11}z)e^{s_{12}(2T-Z)}$$
$$+\cos(\gamma+s_{11}z)e^{s_{12}(2T-Z)}\Big]$$

こゝに $\gamma=pt-f_0x$ である．又 s_{11} 及 s_{12} は正であるから上式より表層を傳はる波は上方に進むものと下方に進むものとを組合せたものより成りその有樣は複雜になる．尙波動は x と共に減衰する．

下層を傳はる波は

$$v=Ce^{s_2Z}e^{i(p-fx)}$$

實數部を取ると

$$v=Ce^{s_{21}Z-f_0\varepsilon x}e^{i(pt-f_0x+s_{22}Z)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

となり波動は下に降る．

次に上層に於ける勢力流の z 成分 F_z を出す．

卽
$$F_z=-(Z_x\dot{u}+Z_y\cdot\dot{v}+Z_z\cdot\dot{w})=-\mu v\frac{\partial v}{\partial z}$$

(16) 式の v の値を上式に入れて一週期の間の積分を求めると

$$F_z=-\frac{C^2p}{8}e^{-2f_0\varepsilon x}\Big\{s_{11}\sinh 2s_{11}(T-z)+s_{12}\sin_2 s_{12}(T-z)\Big\}$$
$$\times\Big\{\cos 2s_{11}T+\cosh 2s_{12}T\Big\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

然るに $s_{11}>s_{12}$, $\quad\therefore\ \sinh 2s_{11}(T-z)>\sin 2s_{12}(T-z)$

$$\cos 2s_{11}T+\cosh 2s_{12}T>0$$ であるから

(1) かく假定し得る根據は第2報で述べた如く可塑性媒質内で應力の1サイクルの間になされる内部仕事は可塑性係數（強さ）に比例する．從つて可塑性の強い媒質程その中で波動は速に減衰する．

$F_z<0$ となり波動の勢力は下方に下る. $z=0$ に於ても上式が成立するから此れより上層の勢は絶えず層下に流れ去る. 上層が完全彈性體と考へたにも拘らずその中を傳播する波動の振幅が距離と共に減衰するのは斯の如くその勢力の一部が絶えず下方に逸散する爲である.

層下の勢力の z 方向の分流 F_z' を次に求める. $F_z'=-Mv\dfrac{\partial v}{\partial z}$ より一週期の間に流れる勢力流は, (17) より

$$F_z'=-\frac{C^2p}{2}|M|\,e^{2(s_{21}Z-f_0\varepsilon x)}\,(s_{21}\sin m+s_{22}\cos m)$$

但し $M=|M|e^{im}$ である. s_{21}, s_{22} 共に正であるから $F_z'<0$ となる. 即下層に於ても勢力は下方に流れて居る事を知る. 又 $z=0$ では (18) を參考し容易に $F_z=F_z'$ を證する事が出來る. 即上層の勢力は連續的に下層に流れ込み下方に行く程流量は減少する. 此の意味は途中媒質に依つてその勢力が吸收され熱に變換して居る事を示すものである.

結　　論

半無限完全可塑性體の表面を傳はる定常的レーレー波をまず論じた. その結果は

(1) 振幅は距離と共に減衰する. 速度は完全彈性體の場合よりも遲い.

(2) 波動は見掛け上幾分下方から上方に向つて進行する,

(3) 波勢力は一部分逆に上方から下方に向つて流れる. 之は途中熱エネルギーとなり乍ら遂に消失する.

次に表層が完全彈性體, その下部が完全可塑性體とした時の表層の定常的ラヴ波を論じた. その結果は,

(1) 振幅は距離と共に減衰する. 下部が完全彈性體とした時よりも速度が遲くなる.

(2) 表層では見掛け上上昇波と下降波とを組合せたものが傳はり, 結果に於て, 勢力が下面を通して下方に流出する様になる. 此の爲に完全彈性體と考へた表層でも波が減衰する.

(昭和 16 年 1 月 31 日　於中央氣象臺)