或る内部歪核に依る半無限彈性體の變形に就て

副　田　勝　利

1936 年に F. J. W. Whipple 氏[1]は特殊の內部歪核による，半無限彈性體の變形に關する理論的研究を行ひ，地震學に對する應用に就て述べる所があつた。同氏の研究したのは表面の變形が象限型の方位的分布を示す場合である。筆者は大體同氏と同樣な方法に依り，半無限彈性體の內部に歪核として

$$\Delta=A\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n}\frac{1}{r}\quad（但し r は核からの距離）$$

なる場合を取り，特に $n=1,\ \theta=\frac{\pi}{2}$ の場合を取り扱ふ。即ち

$$\Delta=A\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=-A\frac{z}{r^3}$$

なる場合であるが，これは第一及二圖で示す樣に核を中心とした半徑 a なる球面上の歪力が夫々

$$\begin{cases}\widehat{rr}=A\dfrac{\mu}{a^2}(3\cos\theta+4\cos^3\theta)\\[2ex]\widehat{r\theta}=A\dfrac{\mu}{a^2}(\sin\theta+2\sin^3\theta)\\[2ex]\widehat{r\phi}=0\end{cases}$$

なる場合である，更にこれはその極限として，內部の一點に，謂はゞ下向きに垂直なる，靜的の力が働く場合に相當すると考へる事が出來る。

1）彈性體の平衡方程式の解　直角座標 x, y, z 方向の變位を夫々 u, v, w とすると，平衡方程式は

(1) F. J. W. Whipple: "On the Theory of the Strains in an Elastic Solid bounded by a Plane when there is a Nucleus of Strains at an Internal Point, and on the Relation of the Theory to Seismology." Month. Not. Geopobys. Supp. 3, (1936)

$$(1)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0 \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=0 \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=0 \end{cases}$$

(λ, μ は Lamé の常數)

$$(2)\quad \Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

である，但し z 軸は下向きに取ることゝする。

$$(3)\quad \Delta=\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=-\frac{z}{r^3} \qquad r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

(但し A はしばらく 1 として置く)

を(1)式に代入して，(u, v, w) を求めると，

$$(4)\quad \begin{cases} u=\dfrac{q}{2}\dfrac{xz}{r^3} \\ v=\dfrac{q}{2}\dfrac{yz}{r^3} \\ w=\dfrac{q}{2}\left(\dfrac{z^2}{r^3}+\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r} \end{cases} \qquad 但し\ q=\frac{\lambda+\mu}{\mu}$$

を得る。これに依る歪力は

$$(5)\quad \begin{cases} \widehat{xx}=\lambda\Delta+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \widehat{yz}=\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \widehat{yy}=\lambda\Delta+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} & \widehat{zx}=\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \widehat{zz}=\lambda\Delta+2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} & \widehat{xy}=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

に依つて

$$(6)\quad \begin{cases} \widehat{xx}=-\lambda\dfrac{z}{r^3}+\mu q\left\{\dfrac{z}{r^3}-3\dfrac{x^2z}{r^5}\right\} \\ \widehat{yy}=-\lambda\dfrac{z}{r^3}+\mu q\left\{\dfrac{z}{r^3}-3\dfrac{y^2z}{r^5}\right\} \\ \widehat{zz}=-\lambda\dfrac{z}{r^3}+\mu q\left\{\dfrac{z}{r^3}-3\dfrac{z^3}{r^5}\right\}-2\mu\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\widehat{yz}=\mu\left(-3q\dfrac{yz^2}{r^5}-\dfrac{y}{r^3}\right)\\
\widehat{zx}=\mu\left(-3q\dfrac{xz^2}{r^5}-\dfrac{x}{r^3}\right)\\
\widehat{xy}=\mu\left(-3q\dfrac{xyz}{r^5}\right)
\end{cases}
$$

今この歪核が $(0, 0, b)$ に在るとすると，それに依る變位及び歪力は(4)，(6)に依つて

$$
(7)\qquad
\begin{cases}
u=\dfrac{q}{2}\dfrac{x(z-b)}{r_1^{\,3}}\\
v=\dfrac{q}{2}\dfrac{y(z-b)}{r_1^{\,3}}\\
w=\dfrac{q}{2}\left\{\dfrac{(z-b)^2}{r_1^{\,3}}+\dfrac{1}{r_1}\right\}+\dfrac{1}{r_1}
\end{cases}
$$

$$
(8)\qquad
\begin{cases}
\widehat{xx}=-\lambda\dfrac{z-b}{r_1^{\,3}}+\mu q\left\{\dfrac{z-b}{r_1^{\,3}}-3\dfrac{x^2(z-b)}{r_1^{\,5}}\right\}\\
\widehat{yy}=-\lambda\dfrac{z-b}{r_1^{\,3}}+\mu q\left\{\dfrac{z-b}{r_1^{\,3}}-3\dfrac{y^2(z-b)}{r_1^{\,5}}\right\}\\
\widehat{zz}=-\lambda\dfrac{z-b}{r_1^{\,3}}+\mu q\left\{\dfrac{z-b}{r_1^{\,3}}-3\dfrac{(z-b)^3}{r_1^{\,5}}\right\}-2\mu\dfrac{z-b}{z_1^{\,3}}\\
\widehat{zy}=\mu\left(-3q\dfrac{y(z-b)^2}{r_1^{\,5}}-\dfrac{y}{r_1^{\,3}}\right)\\
\widehat{zx}=\mu\left(-3q\dfrac{x(z-b)^2}{r_1^{\,5}}-\dfrac{x}{r_1^{\,3}}\right)\\
\widehat{xy}=\mu\left(-3q\dfrac{xy(z-b)}{r_1^{\,5}}\right)\quad \text{但し}\ r_1=(x^2+y^2+(z-b)^2)^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
$$

從つて表面に於ては（$\circ$ は表面に於ける値を示すものとする）

$$
(9)\qquad
\begin{cases}
U_0'=-\dfrac{q}{2}\dfrac{bx}{R^3}\\
V_0'=-\dfrac{q}{2}\dfrac{by}{R^3}\\
W_0'=\dfrac{q}{2}\left\{\dfrac{b^2}{R^3}+\dfrac{1}{R}\right\}+\dfrac{1}{R}\quad \text{但し}\ R=(x^2+y^2+b^2)^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
$$

$$
(10)\quad \begin{cases} (\widehat{zz})_0=\lambda\dfrac{b}{R^3}+\mu q\left\{3\dfrac{b^3}{R^5}-\dfrac{b}{R^3}\right\}+2\mu\dfrac{b}{R^3} \\ (\widehat{yz})_0=-\mu\left\{3q\dfrac{b^2y}{R^5}+\dfrac{y}{R^3}\right\} \\ (\widehat{xz})_0=-\mu\left\{3q\dfrac{b^2x}{R^5}+\dfrac{x}{R^3}\right\} \end{cases}
$$

これで一般の解は得られた。

2) 然るに表面は自由であると云ふ條件に依つて，表面に於ける歪力が零になる樣に考へなければならない。先づ $(0,0,-b)$ に先の歪核と全く同樣な歪核を逆向きに置いて考へるならば，表面に於て $\widehat{yz}=\widehat{xz}=0$ となり $\widehat{zz}$ は二倍になる。且變位は U_0', 及 V_0' は二倍になり W_0' は零になる。そこで我々は更に $\widehat{zz}$ が消える樣にする爲に表面に於て，

$$
\begin{cases} \widehat{yz}=\widehat{xz}=0 \\ Z=-2(\widehat{zz})_0=-2\mu\dfrac{b}{R^3}-6\mu q\dfrac{b^3}{R^5} \end{cases}
$$

が働く場合の變位を求めて加へれば良い。

3) 表面に Z のみが働く場合の解[1] 先づ表面に X, Y, Z が働く場合の變位は

$$
(11)\quad \begin{cases} u=\dfrac{1}{2\pi\mu}\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial H}{\partial x}+\dfrac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}-\dfrac{1}{4\pi\mu}z\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ v=\dfrac{1}{2\pi\mu}\dfrac{\partial G}{\partial z}-\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial H}{\partial y}+\dfrac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}-\dfrac{1}{4\pi\mu}z\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ w=-\left(\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial H}{\partial z}+\dfrac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\psi-\dfrac{1}{4\pi\mu}z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right) \end{cases}
$$

にて與へられる。

こゝに

$$
F=\iint X\chi\,dxdy \quad G=\iint Y\chi\,dxdy \quad H=\iint Z\chi\,dxdy
$$

$$
\psi=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z} \quad \psi_1=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial G_1}{\partial y}+\frac{\partial H_1}{\partial z}
$$

(1) Love; The Mathmatical Theory of Elasticity p. 241.

且つ $\dfrac{\partial F_1}{\partial z}=F \quad \dfrac{\partial G_1}{\partial z}=G \quad \dfrac{\partial H_1}{\partial z}=H \quad \therefore \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z}=\psi$

である。又 F, G, H は調和函數で $z=0$ では

$$X=\lim_{z=+0}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad Y=\lim_{z=+0}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \quad Z=\lim_{z=+0}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

で χ は $z=0$ で $\dfrac{\partial \chi}{\partial z}=\dfrac{1}{r}$ である。

今 $X=Y=0$ で Z のみ作用する時は

$$F=G=0 \quad F_1=G_1=0 \quad \psi_1=\frac{\partial H_1}{\partial z}=H \quad \psi=\frac{\partial H}{\partial z}$$

となる故に

$$(12)\quad \begin{cases} u=-\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial H}{\partial x}+\dfrac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{\partial H}{\partial x}-\dfrac{1}{4\pi\mu}z\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\partial z} \\ \quad =-\dfrac{1}{4\pi\mu}\left(z\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ v=-\dfrac{1}{4\pi\mu}\left(z\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\dfrac{\partial H}{\partial y} \\ w=-\left(\dfrac{1}{4\pi\mu}\dfrac{\partial H}{\partial z}+\dfrac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\dfrac{\partial H}{\partial z}-\dfrac{1}{4\pi\mu}z\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right) \\ \quad =+\dfrac{1}{4\pi\mu}\left(z\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\dfrac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

こゝに H は次式を滿足する

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)_0=Z$$

次に $Z=-2\mu\dfrac{b}{R^3}-6\mu q\dfrac{b^3}{R^5}$ に依る表面に於ける變位 (U_0'', V_0'', W_0'') を求める

先づ $-\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\partial^2 H'}{\partial z^2}\right)_0=-6\mu q\dfrac{b^3}{R^5}$ として,

$$\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial z^2}\right)_0=12\pi\mu g\frac{b^3}{R^5} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2}=12\pi\mu q b^2\frac{z+b}{r_2^5} \quad r_2=(x^2+y^2+(z+b)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial H'}{\partial z}=-4\pi\mu q b^2\frac{1}{r_2^3} \qquad \therefore \quad H'=-4\pi\mu q b^2\int_z^\infty \frac{1}{r_2^3}dz$$

然るに

$$z+b=\omega\cot\theta,\quad r_2=\omega\mathrm{sosec}\theta$$

と置換すると

$$\int_z^\infty\frac{1}{r_2{}^3}dz=\frac{1}{\omega^2}\int_\theta^0(-\sin\theta)d\theta=\frac{1-\cos\theta}{\omega^2}=\frac{1-\dfrac{z+b}{r_2}}{x^2+y^2}=\frac{1}{r_2(r_2+z+b)}$$

故に

$$H'=-4\pi\mu qb^2\frac{1}{r_2(r_2+z+b)}$$ 且つ H' は調和函數である。

$$(13)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial H'}{\partial x}=\dfrac{x(r_2+z+b)+xr_2}{r_2{}^3(r_2+z+b)^2}\times4\pi\mu qb^2\\[2ex]\dfrac{\partial H'}{\partial y}=\dfrac{y(r_2+z+b)+yr_2}{r_2{}^3(r_2+z+b)^2}\times4\pi\mu qb^2\\[2ex]\dfrac{\partial H'}{\partial z}=-4\pi\mu qb^2\dfrac{1}{r_2{}^3}\end{cases}$$

次に

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2H''}{\partial z^2}\right)_0=-2\mu\frac{b}{R^3}$$

から，同様にして

$$(14)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial H''}{\partial x}=4\pi\mu\dfrac{x}{r_2(r_2+z+b)}\\[2ex]\dfrac{\partial H''}{\partial y}=4\pi\mu\dfrac{y}{r_2(r_2+z+b)}\\[2ex]\dfrac{\partial H''}{\partial z}=-4\pi\mu\dfrac{1}{r_2}\end{cases}$$

從つて表面に於ける變位は

$$(15)\quad\begin{cases}U_0''=-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{qb^2\dfrac{x(R+b)+xR}{R^3(R+b)^2}+\dfrac{x}{R(R+b)}\right\}\\[2ex]V_0''=-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{qb^2\dfrac{y(R+b)+yR}{R_3(R+b)^2}+\dfrac{y}{R(R+b)}\right\}\\[2ex]W_0''=+\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left\{qb^2\dfrac{1}{R^3}+\dfrac{1}{R}\right\}\end{cases}$$

4) 以上に依つて表面に於ける歪力が零であると云ふ條件を滿足する時の表面に於ける變位は

$$(16)\quad \begin{cases} U_0=-A\left\{q\dfrac{bx}{R^3}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left(qb^2\dfrac{x(R+b)+xR}{R^3(R+b)^2}+\dfrac{x}{R(R+b)}\right)\right\} \\ V_0=-A\left\{q\dfrac{by}{R^3}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left(qb^2\dfrac{y(R+b)+yR}{R^3(R+b)^2}+\dfrac{y}{R(R+b)}\right)\right\} \\ W_0=A\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left\{qb^2\dfrac{1}{R^3}+\dfrac{1}{R}\right\} \end{cases}$$

$q=\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}$ と置き換へて

$$\begin{cases} U_0=-A\left\{\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{bx}{R^3}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{x}{R(R+b)}+b^2\dfrac{x(R+b)+xR}{R^3(R+b)^2}\right\} \\ V_0=-A\left\{\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{by}{R^3}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{y}{R(R+b)}+b^2\dfrac{y(R+b)+yR}{R^3(R+b)^2}\right\} \\ W_0=A\left\{\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\times\dfrac{1}{R}+\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\dfrac{b^2}{R^3}\right\} \end{cases}$$

今水平變位を考へるに表面に於ける極座標にて表はすと

動徑方向の變位 $U_r=-A\left[\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{b}{R^3}+\dfrac{b^2(2R+b)}{R^3(R+b)^2}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{1}{R(R+b)}\right]$
$\times\sqrt{R^2-b^2},$

切線 〃 $U_\theta=0$

である，然るに U_r は R, b は常に正で且つ $R\geqq b$ なる故に常に負である且 $U_\theta=0$ であるから水平變位は常に中心に向き，$R=b$ で變位$=0$, $R\to\infty$ になるときは變位$\to0$ となる事が解る。

垂直變位は

$$W_0=A\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{b^2}{R^3}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{R}\right\}$$

で常に正なる故に下方に向ふ事がわかり，且 $R=b$ で最大で $R\to\infty$ になるとき $W_0\to0$ となる。

更に $\lambda=\mu$ としたときの歪力及變位を計算して見ると，歪力は（歪核を中心とした半徑 a なる球面上で）

$$
\begin{cases}
\widehat{rr}=A\dfrac{\mu}{a^2}(3\cos\theta+4\cos^3\theta) \\
\widehat{r\theta}=A\dfrac{\mu}{a^2}(\sin\theta+2\sin^3\theta) \\
\widehat{r\phi}=0
\end{cases}
$$

變位は

$$
\begin{cases}
U_r=-A\left(\dfrac{2b}{R^3}+\dfrac{1}{2(R+b)R}+\dfrac{b^2(2R+b)}{R^3(R+b)^2}\right)\sqrt{R^2-b^2} \\
W_\theta=A\left(\dfrac{3b^2}{R^3}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{R}\right)
\end{cases}
$$

U_r の最大なる所を求めるに，今 $\dfrac{R}{b}=x$ と置くと

$$
U_r=-A\frac{1}{b}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{2x(x+1)}+\frac{2x+1}{x^3(x+1)^2}\right)\sqrt{x^2-1}
$$

$\dfrac{dU_r}{dx}=0$ から

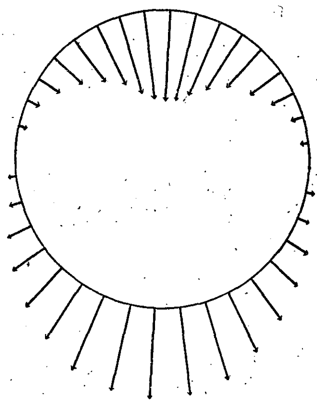
$$
x^7+10x^6+43x^5+55x^4-20x^3-95x^2-72x-18=0
$$

この方程式の根は $x\fallingdotseq 1.2$ で，その他 $x\geqq 1$ なる範圍內に於て正根を有せざる事は「スツルムの定理」に依つて證明される。即ち $R=1.2b$ の所で水平變位が最大となる。今 $\lambda=\mu$ とした場合の變位と，歪力の計算の結果を表と圖に示す。

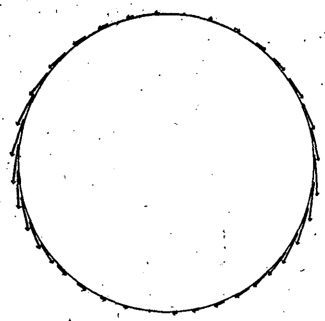
第 1 表

θ	$\widehat{rr}$	$\widehat{r\theta}$	θ	$\widehat{rr}$	$\widehat{r\theta}$
0°	$7.000A\frac{u}{a^2}$	$0.000A\frac{u}{a^2}$	100	$-0.542A\frac{u}{a^2}$	$2.895A\frac{u}{a^2}$
10°	6.775	0.184	110	−1.186	2.599
20	6.238	0.422	120	−2.000	2.165
30	5.196	0.750	130	−2.991	1.665
40	4.096	1.174	140	−4.096	1.174
50	2.991	1.665	150	−5.196	0.750
60	2.000	2.165	160	−6.238	0.422
70	1.186	2.599	170	−6.775	0.184
80	0.542	2.895	180	−7.000	0.000
90	0.000	3.000			

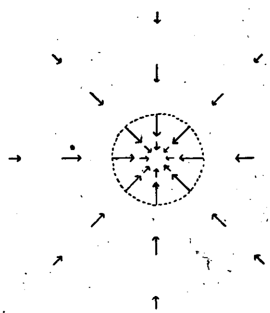
第 1 圖 $\widehat{rr}$

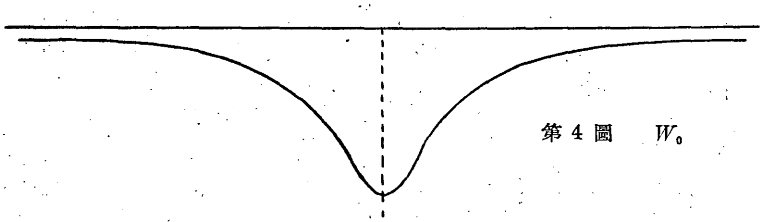


第 2 圖 $\widehat{r\theta}$



第 3 圖 U_r (點線は最大となる所)





第 4 圖 W_0

第　2　表

R/b	U_r	W_0	R/b	U_r	W_0
1.0	$0.00\,A\frac{1}{b}$	$4.50\,A\frac{1}{b}$	3.2	$0.34\,A\frac{1}{b}$	$0.56\,A\frac{1}{b}$
1.2	1.16	2.90	3.4	0.31	0.52
1.4	1.10	2.17	3.6	0.27	0.48
1.6	0.95	1.67	3.8	0.26	0.45
1.8	0.81	1.35	4.0	0.24	0.42
2.0	0.70	1.13	4.2	0.22	0.40
2.2	0.61	0.96	4.4	0.21	0.38
2.4	0.53	0.81	4.6	0.19	0.36
2.6	0.47	0.75	4.8	0.18	0.34
2.8	0.41	0.67	5.0	0.17	0.32
3.0	0.37	0.61			

終りに種々，御教示下さいました本多技師に厚く御禮申上げます。