地震計の摩擦に就て

森田　稔

1. 地震計の振動部分に働く固體摩擦は普通振動部分の變位には無關係なものとされてゐるが，地震計の自己振動記象の中には此種の摩擦や殘留制振作用だけでは說明し難い樣な形をなすものがある。即ち之等の二つの作用丈けでは記象上の振幅は指數曲線的に減少しなければならない筈であるが，實際には振幅の大きい所では之よりも比較的急で，振幅の小さい所では緩やかな傾斜をなすものが屢々見出される（第1圖參照）。此樣な場合を說明するため，筆者は本文で變位に比例する樣な一種の摩擦力を假定し，其際の記象の形に就き少しく調べて見た。

此樣な摩擦力が存在する場合の一例は松澤博士[(1)]によつて示されてゐる。松澤先生に依つて示されたのは先生の自作に成る新型强震計に於ける特殊な場合であつて，一般の地震計に於ても此樣な力を意味附け得るかどうかは疑問であるが，本文では其問題には立入らないことゝする。但し此樣な力は實際に働いてゐなくても，結果に於て見掛上の力として振動方程式中に入れてもよい樣な場合は有るかも知れない。本文の議論にはそれでも構はないのである。

2. 摩擦力を $F=\pm mka$ とする。こゝに m は振子の質量の描針當量，k は常數，a は地震計針先の變位である。$\pm$ の複號は次の如く擇ばねばならない：

$$a>0,\ \dot{a}>0 \text{ 及び } a<0,\ \dot{a}<0 \text{ の時は } -;$$

$$a>0,\ \dot{a}<0 \text{ 及び } a<0,\ \dot{a}>0 \text{ の時は } +$$

然る時は，描針が自力で記象上一つの極大（又は極小）a_1 より次の極小（又は極大）a_2 に達する場合，兩極値に於ける運動のエネルギーは 0 なる故，兩

(1) T. Matuzawa, Ein langperiodiger Seismograph für starke Beben. Journ. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Section II, V, 59-67 (1938). 本文中の結果は松澤先生の結果と一部分合致重複する所もあるが，全然別な立場から論じたものである。

極値間の位置のエネルギーの差は其間に摩擦力のために費された仕事に等しいことより

$$\int_{a_1}^{-a_2} mn^2 a da = \int_{a_1}^{0} mkada + \int_{0}^{-a_2} (-mka) da \quad (\dot{a}<0), \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\int_{-a_1}^{a_2} mn^2 a da = \int_{-a_1}^{0} mkada + \int_{0}^{a_2} (-mka) da \quad (\dot{a}>0). \cdots\cdots\cdots(1')$$

但し $n=2\pi/T_0$（T_0 は自己週期）である。

積分の結果は（1）（1′）共に $\frac{1}{2}n^2(a_1{}^2-a_2{}^2)=\frac{1}{2}k(a_1{}^2+a_2{}^2)$・

之より

$$\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{\frac{n^2+k}{n^2-k}}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

即ち相次ぐ振幅の比が一定となる。

今 $k/n^2=\alpha$ とおけば

$$\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

即ち α が大なる程相次ぐ振幅の比は大きい。α が 1 に比し充分小なる時は近似的に

$$a_1/a_2=1+\alpha. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又，振動の週期を T_a とすれば

$$T_a=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)=\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\right)$$

α が 1 に比し充分小なる時は

$$T_a=\frac{2\pi}{n}\left(1+\frac{3}{8}\alpha^2\right)=T_0\left(1+\frac{3}{8}\alpha^2\right). \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此種の摩擦力が働く場合の自己週期は然らざる時よりも若干長いことが此式より解る。

3. 變位に無關係な摩擦力と變位に比例する摩擦力とが同時に働く場合には（1）（1′）に相當する關係式は

$$\int_{a_1}^{-a_2} mn^2 a\ddot{a}\,da = \int_{a_1}^{-a_2} R\,da + \int_{a_1}^{0} mka\,da + \int_{0}^{-a_2} (-mka)\,da \qquad (\dot{a}<0), \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\int_{-a_1}^{a_2} mn^2 a\,da = \int_{-a_1}^{a_2} (-R)\,da + \int_{-a_1}^{0} mka\,da + \int_{0}^{a_2} (-mka)\,da \qquad (\dot{a}>0). \quad \cdots(6')$$

但し R は針先に引直した變位に無關係な摩擦力である。積分の結果は何れも

$$\frac{n^2}{2}(a_1^2-a_2^2) = \frac{R}{m}(a_1+a_2) + \frac{k}{2}(a_1^2+a_2^2)$$

或は $R/mn^2=r$（摩擦値）を用ひて表はせば

$$2r(a_1+a_2)+\alpha(a_1^2+a_2^2)-(a_1^2-a_2^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる。記象上相次ぐ振幅を a_1, a_2, a_3 …… とすれば，r 及び α は（7）の如き形の聯立方程式を解き，次の如き行列式に依つて計算し得る：

$$r = \frac{\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1^2-a_2^2 \\ a_2^2+a_3^2 & a_2^2-a_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1+a_2 \\ a_2^2+a_3^2 & a_2+a_3 \end{vmatrix}}, \quad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} a_1^2-a_2^2 & a_1+a_2 \\ a_2^2-a_3^2 & a_2+a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1+a_2 \\ a_2^2+a_3^2 & a_2+a_3 \end{vmatrix}}. \quad \cdots\cdots(8)$$

4. （7）は又

$$a_1-a_2=2r+\alpha\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{2r(a_1+a_2)}{(1-\alpha)a_2^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left\{\frac{r}{a_2}+\sqrt{\left(1+\frac{r}{a_2}\right)^2-\alpha\left(\alpha+\frac{2r}{a_2}\right)}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{a_1-r}{a_2+r}=\sqrt{1+\alpha\frac{a_1^2+a_2^2}{(a_2+r)^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

等の形に書ける。（9）式右邊第 2 項（10）式右邊根號內の第 2 項及び（12）式右邊根號內の第 2 項は簡單な形ではないが，何れも正で，夫々摩擦力が一定の場合及び之れが變位に比例する場合の結果に相補はるべき項である。

（3）によれば，變位に比例する摩擦力のみが働く場合には，自己振動の振幅は一見殘留制振作用のあるときと同樣の減衰形式を示す。仍つて斯の如き場合には殘留制振作用との區別が事實上不可能である。併し變位に無關係な摩擦力も同樣に働いてゐる場合には殘留制振作用との區別が可能である。それは次の

如くして證明される：

即ち若し變位に無關係な摩擦力と殘留制振作用とのみ働いてゐる場合には

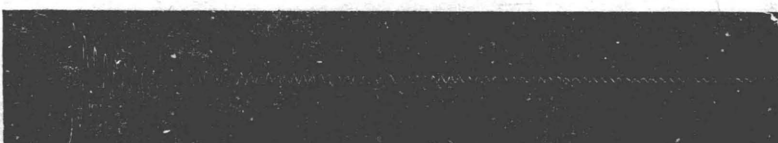
$$\frac{a_1 - r}{a_2 + r} = 一定 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

でなければならない。即ち（12）に於て右邊根號内の第 2 項が振幅に無關係な常數でなければ，殘留制振作用による場合との區別が出來る譯である。然るに

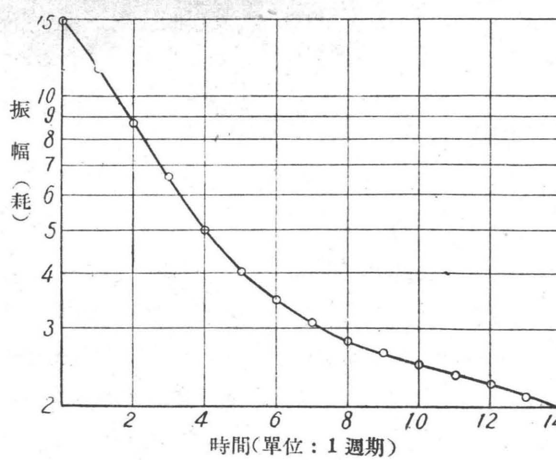
$$\frac{a_1{}^2 + a_2{}^2}{(a_2 + r)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{r}{a_1}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{a_2}\right)^2}$$

であつて，a_1 が極めて小さい所では比較的小さい値をとるが，a_1 が大きくなると a_2/a_1 は小さくなるか少く共大きくは成らず，r/a_1 及び r/a_2 は何れも小さく成るから，第 1 項第 2 項共に a_1 と共に大きくなる。即ち（12）式右邊第 2 項は a_1 と共に增大する。依つて $(a_1 - r)/(a_2 + r)$ は一定ではない。即ち此樣な

第　1　圖



第　2　圖



二種類の摩擦力が同時に働く場合には振幅の極値を結ぶ曲線は殘留制振作用のある場合の如く指數曲線とはならないで，靜止線に對する傾斜が振幅の大なる所では比較的急で，小なる所では逆に緩やかな一つの曲線となる。

第 1 圖は中央氣象臺

型一倍強震計上下動の自己振動記象で，かゝる場合の一例として揭げた。今此記象の上半部のみの相次ぐ振幅の對數を縦軸に，時間を横軸にとつて振幅變化の模様を調べて見ると第2圖の如き曲線となる。若し記象上の振幅が殘留制振作用ある場合の如く對數曲線的に減衰するとすれば，此曲線は略々直線となる筈である（記象の尾部の模様より摩擦値 r は小なることが確認されるので）が，實際には常に横軸に對し凸曲してゐて，而も曲線の傾斜は時間と共に減じてゐる。即ち上述の傾向と合致してゐるのである。

5\. 併し實際問題として（8）式を實際の記象に適用して r 及び α の値を計算する時は，餘り良好な結果は得られないことを筆者は數多の實地計算の結果知つた。尤も α に就ては多くの場合に於て 0.2 前後の値が得られ，一つの記象上で振幅の異る個所に就て行つた計算の結果が比較的によく合致したが，r に就ては一つの記象上でも場所によつて全く異つた値が得られ，桁數に於てさへ一致しないことが多いのである。これは（8）式の如き方法を用ひて r 及び α を計算する以上止むを得ないことであつて，同式を一見すれば明らかな如く，讀取値の最後の桁が結果を左右するのであるから，讀取の僅かの誤差も結果に極めて大きく利いて來るのである。

結局 r 及び α の値を精確に定めるためには（7）式の如き觀測方程式を多數作つて最小自乘法にかけるか，或は他にもつと巧妙な方法を發見するより他はない。本文では唯此樣な問題を提示するに止める。

（昭和 14 年 3 月　中央氣象臺にて）