不均質彈性體の表面を傳はる ラブ型表面波に就て

本 間 正 作

1. 標題の様な表面波に就ては，愛知博士や E. Meissner の十數年も前の研究があり[(1)]，近頃では，妹澤教授が彈性 μ の深さ z に對して linear に增す場合の解式を E. W. Barnes の Confluent hypergeometric function の形で出され[(2)]，且つ其の分散式の數値計算迄遂行された。夫によると，得られた表面波の位相速度が，自由表面に於ける S 波の速度より小さく，約 7 割程度に當つてゐる。所が其後，櫻庭信一氏は，從來比較的曖昧にされ勝ちであつた解の存在性の吟味を特殊な例題に就て實行され，吾々に深い反省を促された。夫に依ると $\mu=\mu_0\,(1+\sigma z)^2$ の場合に，振動數を p，自由表面に於ける S 波の速度を b_0 とすると $\frac{1}{4}-\frac{p^2}{b_0{}^2\sigma^2}>, <0$ に應じ，波動が存在せぬ場合と，波動が存在して，夫は無數の節平面を持ち得る場合に分れる。

私は櫻庭氏の行はれた樣な解の存在性の吟味を幾らか異れる見方で，且つ，稍々一般的に調べてみた。又若干，關係事項も附け加へた。

2. 彈性方程式について

彈性方程式を圓壔座標 (r, θ, z) で表はすと，

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=-\frac{2\mu}{r}\cdot\frac{\partial \varpi_z}{\partial\theta}+2\frac{\partial(\mu\varpi_\theta)}{\partial z},\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=-2\frac{\partial(\mu\varpi_r)}{\partial z}+2\mu\frac{\partial\varpi_z}{\partial r}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

但し (u, v) は夫々 (r, θ) 方向の變位成分で，z 方向の變位及び $div\,(u, v)$ は零となる解を求める。又

(1) K. Aichi; Proc. Phys.-Math. Soc. [3], **4** (1922), E. Meissner; Verh. 2 Int. Kongr. f. Tech. Mech. (Zürich, 1926).

(2) K. Sezawa; Bull. Earthq. Res. Inst., **9**, (1931), p. 310.

(3) 櫻庭信一; 驗震時報, **9**, (昭和十年), p. 278, 或は Geophys. Mag., **9**, (1935), p. 211.

$$2\varpi_r = -\frac{\partial v}{\partial z},\ 2\varpi_\theta = \frac{\partial u}{\partial z},\ 2\varpi_z = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial (rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

μ が z だけの函數で，ρ は一定の解は，[1]

$$u = \pm\frac{2im}{k^2}\phi(z)\cdot\frac{C_m(kr)}{r}\cdot e^{\pm im\theta + ipt},$$

$$v = -\frac{2}{k^2}\phi(\ )\cdot\frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}\cdot e^{\pm im\theta + ipt}.$$

但し C_m は m 次の圓壔函數，ϕ は次の微分方程式の解である。

$$\frac{d}{dz}\left\{\mu\frac{d\phi}{dz}\right\} + \{p^2\rho - k^2\mu\}\phi = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

この方程式は ρ が μ と共に z の函數であつても全く同様に成立する。何故かと云ふと，先づ (1) を ρ で割つた上で兩邊の Rotation を採ると，

$$\frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial \varpi_z}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varpi_z}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial \theta^2}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \varpi_r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\mu\varpi_r)}{\partial z} - \mu\frac{\partial \varpi_z}{\partial r}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \varpi_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\mu\varpi_\theta)}{\partial z} - \frac{\mu}{r}\cdot\frac{\partial \varpi_z}{\partial \theta}\right)\right\}.$$

第一の式は ρ が常數の場合と全く同様で，

$$\varpi_z = \phi(z).\ C_m(kr).\ e^{\pm im\theta + ipt}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

第二，第三の式に於て

$$\varpi_r = \psi(z).\ \frac{\partial C_m(kr)}{\partial r}.\ e^{\pm im\theta + ipt},\ \varpi_\theta = \pm i\chi(z)\frac{C_m(kr)}{r}e^{\pm im\theta + ipt} \cdots (5)$$

と置いてみると ψ, χ の滿足すべき方程式は，

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d(\mu\psi)}{dz}\right\} + p^2\psi = \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu\phi}{\rho}\right),\ \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d(\mu\chi)}{dz}\right\} + p^2\chi = m\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu\phi}{\rho}\right).$$

となる。然るに (3) を ρ で割り，z で微分すると，

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{d\phi}{dz}\right)\right\} + p^2\frac{d\phi}{dz} = k^2\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu\phi}{\rho}\right).$$

故に $\mathrm{div}\,\varpi = 0$ を考慮して，$\psi = \dfrac{1}{k^2}\dfrac{d\phi}{dz}$, $\chi = \dfrac{m}{k^2}\cdot\dfrac{d\phi}{dz}$ を得る。(4), (5) より

(1) K. Sezawa; loc. cit.

u, v を積分すると，上記の結果が得られる。

一體，斯樣な事柄は μ 及び ρ が中心距離 r だけの函數である場合の球座標の問題でも成立する事を，序でに示して置く。

θ を餘緯度，φ を經度とし，夫々の方向の變位を v, w とすると，

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=\frac{2}{r}\frac{\partial(\mu r\varpi_\varphi)}{\partial r}-\frac{2\mu}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\varpi_r}{\partial\varphi},\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{2\mu}{r}\cdot\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r}\frac{\partial(\mu r\varpi_\theta)}{\partial r}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&2\varpi_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(w\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right\},\ 2\varpi_\theta=\frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial(wr)}{\partial r},\\ &2\varpi_\varphi=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(vr)}{\partial r}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

(6) を ρ で割つた上で，兩邊の Rotation を採ると，

$$\frac{\partial^2\varpi_r}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu\frac{\partial(r^2\varpi_r)}{\partial r}\right]+\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$
$$\left.\left(\sin\theta\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}\right)+\frac{\mu}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\varpi_r}{\partial\varphi^2}\right\},$$

$$\frac{\partial^2\varpi_\theta}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\mu r\varpi_\theta)}{\partial r}\right\}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}\right),$$

$$\frac{\partial^2\varpi_\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\mu r\varpi_\varphi)}{\partial r}\right\}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\varpi_r}{\partial\varphi}\right)$$

此の第一式の特解は球函數 $P_n^m(\cos\theta)$ を用ひて，

$$\varpi_r=\phi(r)P_n^m(\cos\theta).\ e^{\pm im\varphi+ipt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となり，$\phi(r)$ は ρ が r の函數である場合にも，常數の場合と同一の微分方程式

$$\frac{d}{dr}\left\{\mu\frac{d}{dr}(r^2\phi)\right\}+\left\{r^2\rho p^2-n(n+1)\mu\right\}\phi=0.\ \cdots\cdots\cdots(9)$$

の解として與へられる。

第二，第三式では，

$$\varpi_\theta=\frac{1}{n(n+1)}\psi(r)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{\pm im\varphi+ipt},$$

$$\varpi_\varphi=\frac{\pm i}{n(n+1)}\chi(r)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}e^{\pm im\varphi+ipt}.$$

と置けば ψ, χ の滿足すべき方程式は,

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dr}(\mu r\psi)\right\}+r^2p^2\psi=n\cdot(n+1)\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu\phi}{\rho}\right),$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dr}(\mu r\chi)\right\}+r^2p^2\chi=m\cdot n\cdot(n+1)\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu\phi}{\rho}\right).$$

となるが, (9) を ρ で割つて, r で微分すると,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}\left\{\mu\frac{d}{dr}(r^2\phi)\right\}+r^2p^2\phi\right]=n\cdot(n+1)\frac{d}{dr}\left(\mu\frac{\phi}{\rho}\right)$$

故に $\operatorname{div}\varpi=0$ を考慮して, $\psi=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\phi)$, $\chi=\frac{m}{r}\frac{d}{dr}(r^2\phi)$. (7) に入れて積分すると,

$$v=\frac{\pm 2im}{n(n+1)}r\phi\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}.\ e^{\pm im\varphi+ipt},$$

$$w=\frac{-2}{n(n+1)}r\phi\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}e^{\pm im\varphi+ipt}.$$

以上の如き事は分り切つた樣な事であるが, 實際さう云ふ場合の表面波を調べると, 實用上は兎も角として, 理論上では多少變つた場合も生じ得るので, 念のため附け加へた。

3. 吟 味

便宜上次の樣に置く。

$$V\equiv\frac{p}{k},\quad b\equiv\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\quad\cdots\cdots(10)$$

V, b は夫々求むる波動の位相速度及び S 波の速度である。然る時は (3) を變形して,

$$\frac{d}{dz}\left\{\mu\frac{d\phi}{dz}\right\}+p^2\mu\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right\}\phi=0\quad\cdots\cdots(3')$$

更に, $$\zeta\equiv\int_0^z\frac{dz}{\mu},\quad\cdots\cdots(11)$$

なる ζ を導き入れると, $\mu>0$ 故, z と ζ は一對一に對應し, 自由表面 $z=0$ は $\zeta=0$ で表はされ, 又 $z\to\infty$ の時 $\zeta\to\zeta_\infty$ とすると, ζ_∞ は有限値又は ∞ と

なる。

(3′) は

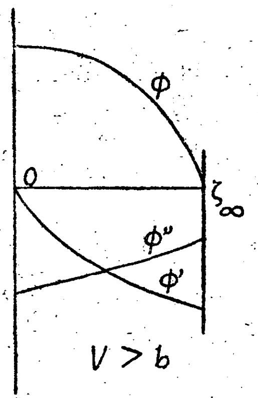
$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}+p^2\mu^2\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right\}\phi=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

境界條件は，

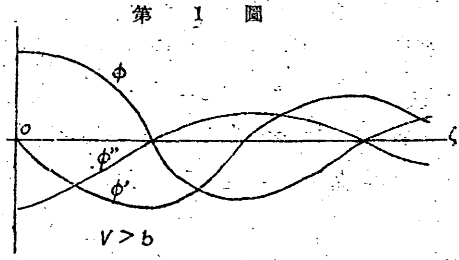
1. $\zeta\to\zeta_\infty$ で $\phi=0$,

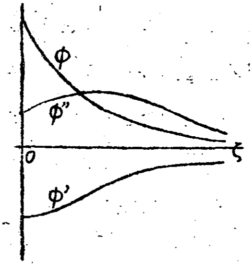
2. $\zeta=0$ で $\dfrac{d\phi}{d\zeta}=\mu\dfrac{d\phi}{dz}=0$,

扨て，考へる變域中のある ζ に對し，$\dfrac{d^2\phi}{d\zeta^2}=0$が成立したとする。其處で $\phi\neq 0$ なら (12) により $\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{V^2}$ も亦 0 となり，その符號を變ずる。故に $\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{V^2}$ が ζ の變域到る處で符號を變ぜぬとすれば，夫は上記の點で同時に $\phi=0$ が成立し，その附近で $\dfrac{d^2\phi}{d\zeta^2}$ と ϕ とが必ず逆符號を有し，從つて $\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{V^2}>0$ 即ち $V>b$ の成立する場合か，或ひは到る處 $\dfrac{d^2\phi}{d\zeta^2}\neq 0$ の場合かに限る(第1圖參照)。後者は $\dfrac{d^2\phi}{d\zeta^2}/\phi<0$, 從つて $V>b$ の場合と，$\dfrac{d^2\phi}{d\zeta^2}/\phi>0$, 從つて $V<b$ の



第 1 圖





場合に分れるが，[1] $V<b$ の方は必ず境界條件 2 に反する。換言すれば，

“彈性體內到る處で $b>V$ なる波動は表面波として存在し得ない。”

通例，問題となる様に，b が深さと共に増大する

(1) $\zeta_\infty\to\infty$ の時，この場合は生じない。

様な場合には，上の事柄を"表面に於ける S 波速度より遅い位相速度のラブ型表面波動は存在しない"と言ひ換へる事が出來る。之は前節に述べた妹澤教授の結果と矛盾するやうに見えるので，その理由を調べて見やう。

境界條件 1 に就て解は $e^{kz}\cdot{}_1F_1(\alpha;1;-2kz)$ となるから[1]，之が $z\to\infty$ で 0 に收斂する事を要する。但し ${}_1F_1$ は E. W. Barnes の記號に依る Confluent Hypergeometric Function の一種で，

$$ {}_1F_1(\alpha;1;-2kz)=1-\frac{\alpha}{1.1}(2kz)+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2\cdot1.2}(2kz)^2-+-\cdots\cdots $$

又 α は $\mu=cz$, $2\alpha=1+\dfrac{\rho p^2}{kc}$ と云ふ意味をもつ。

所が之は $R(kz)>0$ の範圍で，次の漸近展開をもつ[2]。

$$ {}_1F_1(\alpha;1;-2kz)\sim\frac{(2kz)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,{}_2F_0\left(\alpha,\alpha;\frac{1}{2kz}\right), $$

但し，${}_2F_0(\alpha,\alpha;\chi)=1+\dfrac{\alpha^2}{1}\cdot\chi+\dfrac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{1.2}\cdot\chi^2+\cdots\cdots$。

之は α が 1 或ひは夫以上の整數値を採る場合を除けば，e^{kz} を乘ずる事により，必ず無限大となる。只今考へてゐるのは α の比較的小さい場合だから確かに發散であり，又例へば $\alpha=1$ では上記の冪級數より ${}_1F_1(\alpha;1;-2kz)=e^{-2kz}$ となり，$z\to\infty$ で收斂するが，此時は特性方程式に根がない事が容易に云へる。尙此の問題に就ては後の機會に調べ直す積りである。

本題に立戻りて，先に考へた様な $V<b$ なる解は表面波としては成立しないが，表面で適當な應力が殘る事を許される場合には，應力を含んだ境界條件の與へ方に應じて解が存在し，且つその解は ϕ が單調に零に向つて近迫する性質のものである。

次に $V>b$ の方は b に上限がある場合にのみ生じ得る。先づ $\zeta_\infty\to\infty$ となる時には $\dfrac{d^2\phi}{d\zeta^2}=0$ の點で，$\phi=0$ が成立する様な場合に限るわけであるが，この様な彎曲點が無數に存在しないと，條件 1 が滿足されない。而して (12) の ϕ の係數が有限の値を採る様な ζ の部分區間に ϕ の零點が集積する事は出來ないから，通例の如くこの係數が $\zeta\to\zeta_\infty$ に從ひ，∞ に增大する場合には，この彎

(1) K. Sezawa; loc. cit.

(2) E. W. Barnes; Phil. Trans. Roy. Soc., A. Vol. 206, p. 292.

曲點即ち水平節平面が，どんな深い場所にも及んで居る事になる。夫に反し，ζ_∞ が有限なら必ずしも無限個の節平面を要しない。但し無限個存在する時には，上述と同理により，(12) の ϕ の係數が ∞ となる點に集積する事になり，從つて通例の場合は，どんな深い場所にも水平節平面が及んでゐるものである。而して著しい事は，波動が生じ得る場合にも一般に，位相速度と波長の間に定つた關係が無く，與へた位相速度に對して總ての波長の波動が生じ得る。詳しい判定は困難なので簡單な例を擧げて調べて見よう。

〔例 1〕　$\mu=\mu_0\,(1+\sigma z)^{\alpha}$,　$b=$一定[1]

先づ $1>\alpha>0$ とすると $\zeta_\infty>\infty$ の場合に相當し，

$$s\equiv(1-\alpha)\,\sigma\mu_0,\qquad \beta^2\equiv p^2\mu_0{}^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right)$$

とおくと，

$$\zeta=\frac{1}{s}\{1+\sigma z\}^{1-\alpha}-1\}\,;\quad \mu=\mu_0\{1+s\zeta\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

となり，(12) は

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}+\beta^2\{1+s\zeta\}^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\phi=0.$$

Bessel 函數を用ひ，A, B を積分常數として，

$$\phi=\sqrt{1+s\zeta}\cdot\left\{AJ_{\frac{1-\alpha}{2}}\left[\frac{\beta(1-\alpha)}{s}\{1+s\zeta\}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\right.$$
$$\left.+BJ_{-\frac{1-\alpha}{2}}\left[\frac{\beta(1-\alpha)}{s}\{1+s\zeta\}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\right\},$$

$\zeta\to\infty$ で J は $\dfrac{1}{(1+s\zeta)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}}$ の程度となる。之に $\sqrt{1+s\zeta}$ が掛ると，

$\dfrac{1}{(1+s\zeta)^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}}$ の程度となるから，0 に收斂する。又

$$\frac{B}{A}=\frac{-\left[\dfrac{d}{d\zeta}\left\{\sqrt{1+s\zeta}\cdot J_{\frac{1-\alpha}{2}}\left[\dfrac{\beta(1-\alpha)}{s}(1+s\zeta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\right\}\right]_{\zeta=0}}{\left[\dfrac{d}{d\zeta}\left\{\sqrt{1+s\zeta}\cdot J_{-\frac{1-\alpha}{2}}\left[\dfrac{\beta(1-\alpha)}{s}(1+s\zeta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\right\}\right]_{\zeta=0}}$$

なる A, B の組合ひを擇べば，表面條件を滿す。或ひは A, B の組合ひが與へられて居る時，上式より β が定まると言ふ見方をすれば，波動の發生の形

(1) ρ の變化が μ の變化に比例する場合。

式，從つて $\frac{B}{A}$ の與へ方に應じて，β が定まり $\beta^2=p^2\mu_0^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right)$ 從つて，$\left(\frac{V}{b}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\pi^2\mu_0^2}L^2+1$ なる分散曲線が得られるものと解釋される。一般に一つの $\frac{B}{A}$ の指定に對し，β 從つて分散曲線は無數に，且つ互に分離して (discrete) 得られる。之等は基本振動と陪振動に相當する性質のものと考へられる。

又 J は無數の互に分離した零點を有するから ϕ も亦無數の互に分離した水平節平面が必要である。[1]

次に $\alpha>1$ とすると，ζ_∞ は有限にして，

$$\zeta=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{1}{(1+\sigma z)^{\alpha-1}}\right\},\quad \mu=\mu_0\frac{1}{(1-s\zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}},\quad \zeta_\infty=\frac{1}{s}.$$

但し此度は　$s\equiv(\alpha-1)\cdot\sigma\mu_0$ である。

(12) は，$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}+\beta^2\{1-s\zeta\}^{-\frac{2\alpha}{\alpha-1}}\cdot\phi=0$$

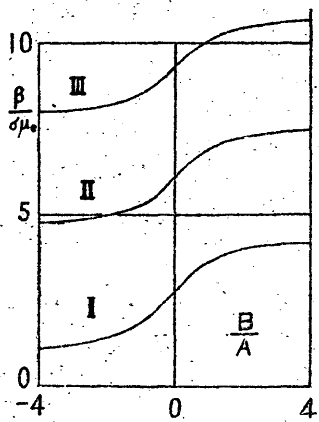
從つて，$$\phi=\sqrt{1-s\zeta}\cdot\left\{AJ_{-\frac{\alpha-1}{2}}\left[\frac{\beta(\alpha-1)}{s}(1-s\zeta)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right]+BJ_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[\frac{\beta(\alpha-1)}{s}(1-s\zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right]\right\}$$

但し，$\frac{\alpha-1}{2}$ が整數の時は第一項の代りに $Y_{\frac{\alpha-1}{2}}$ を用ふ。先の場合と全く同様に $\zeta=\frac{1}{s}$ で $\phi=0$ の事以下，總てが成立する。一例として $\alpha=2$ の場合の振幅の關係と，低次の分散曲線との對應を掲げる。(第2圖及び第3圖)。但し是處では，

$$\phi=\sqrt{1-s\zeta}\left\{AJ_{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\beta}{s(1-s\zeta)}\right]+BJ_{\frac{1}{2}}\left[\frac{\beta}{s(1-s\zeta)}\right]\right\}$$

となる。

第 2 圖



(1) 櫻庭氏の例題 (前揭) で無數の水平節平面が "生じてもよい" と云ふのとは事情が異る。

上の例は無數の陪振動が可能にして，又その各々に對して無數の節平面が必ず生ずるものであつたが，次に然らざる例を擧げて見る。

〔例 2〕 $\mu=\mu_0 e^{2\varepsilon z}$, $b=$一定。

$$n^2\equiv p^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right),$$

と置くと，(3')は次の如く振子の方程式となる。

$$\frac{d^2\phi}{dz^2}+2\varepsilon\frac{d\phi}{dz}+n^2\phi=0.$$

$n>\varepsilon$ とすると，

$$\phi=Ae^{-\varepsilon z}\cos(\sqrt{n^2-\varepsilon^2}.z)$$
$$+Be^{-\varepsilon z}\sin(\sqrt{n^2-\varepsilon^2}.z)$$

但し $\dfrac{B}{A}=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n^2-\varepsilon^2}}$

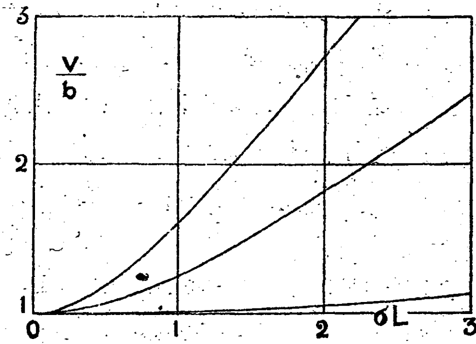
この場合にも波長，速度の任意の組合ひ（$n>\varepsilon$ の範圍で）に對して，無數の水平節平面が深部迄及ぶ如き解が成立する事，前例と同樣である。然し，前例と全く異る點は，波動の發生形式即ち $\dfrac{B}{A}$ を與へた場合，分散曲線が只一つに定まり，陪振動に相當する解を伴はぬ事である。

$n=\varepsilon$ 及び $n<\varepsilon$ の時は，夫々

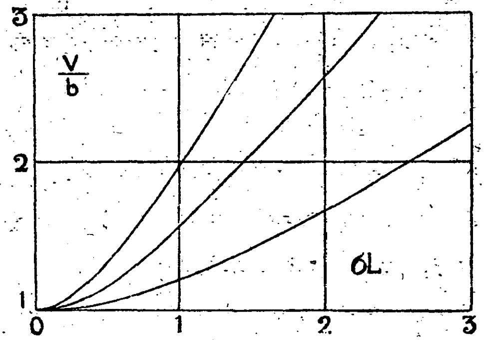
$$\phi=(C-Dz)e^{-\varepsilon z},$$

$$\frac{D}{C}=-\varepsilon,\quad (n=\varepsilon)$$

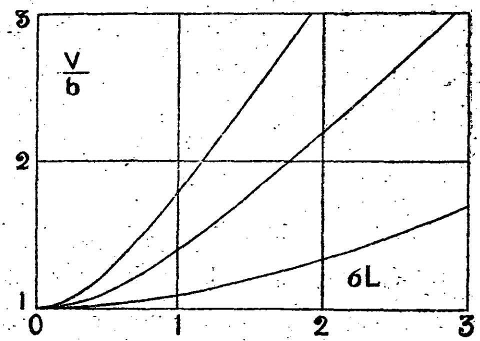
第 3 圖 (A) $\dfrac{B}{A}=-4$



第 3 圖 (B) $\dfrac{B}{A}=0$



第 3 圖 (C) $\dfrac{B}{A}=4$



$$\phi = E\,e^{-(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-n^2})z} + F\,e^{-(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-n^2})z},\quad \frac{F}{E} = -\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-n^2}}{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-n^2}},\quad (n<\varepsilon)$$

となり，前者では彈性分布，從つて ε の指定により振動形式が指定され，後者では $\frac{F}{E}$ の任意の指示に應じて，只一つの n が決り，何れの場合も分散曲線は只一個に定まるが，$n>\varepsilon$ の場合と異つて水平節平面を一つも持たないで，深さに對して單調に振幅が減少する。

分散の形式は $\left(\frac{V}{b^2}\right)^2 = \frac{n^2}{4\pi^2}L^2+1$ で與へられ，その曲線の性質は例1と同樣である。

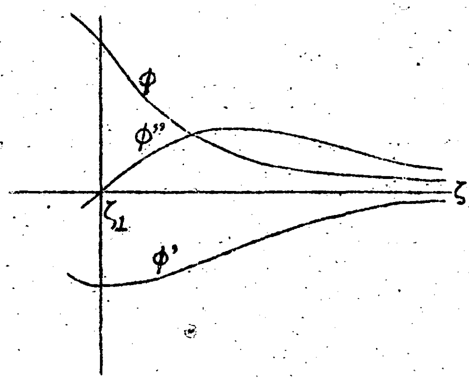
今までの例では b を一定としたが，b が一定でなく共，通例の如く b の變化が單調である場合を假定すると，z の十分大きい値では b が一定値に漸近しなければ $V \geqq b$ は滿足されないから事柄の大勢は相似たものに成つて仕舞ふ。

最後に V が b の最大値と最小値の中間の値を取る解を調べる。事を簡單にする爲に b が z と共に單調に增大するものと考へる。而る時は V に任意の或る値を指定する毎に，

$$V = b(\zeta_1)$$

なる ζ の値，ζ_1 が一つに定まり，$\zeta>\zeta_1$ の範圍では到る處 $V<b$ が成立し，$\zeta<\zeta_1$ の範圍では到る處で $V>b$ が成立する。其處で $\zeta>\zeta_1$ の範圍で，ζ_∞ にて $\phi=0$ なる樣な解が成立する場合には，(12) 式で p を任意に指定する毎に $\zeta=\zeta_1$ に於ける $\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi$ が負の値に定まる。（第4圖）

第 4 圖



しかるに $\zeta>\zeta_1$ の範圍では $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}\right]_{\zeta=0}=0$, $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_1}=$（負の一定値）と云ふ條件の下に（12）を解く事は，彈性及び密度の變化する有限長の棒の捩れ振動の議論に出て來る，Liouville-Sturm の固有問題に歸着する。而して（12）の ϕ の係數が有界であり，又，Green 函數は一次式故，振動を表はす積分方程式の核は有界で，完全對稱核であるから，固有値は無數にあり，盡く實數で

ある。[1] 又 $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_1}$ =（負）であると，夫等固有値は盡く正である。何故かと云ふと，n 番目の固有値 λ_n に屬する固有函數を $\phi_n(\zeta)$ とすると，(12) より

$$\frac{d^2\phi_n}{d\zeta^2}+\lambda_n.\mu^2\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right\}\phi_n=0.$$

$$\therefore\quad \lambda_n\int_0^{\zeta_1}\mu^2\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right\}\phi_n{}^2d\zeta=-\int_0^{\zeta_1}\phi_n\frac{d^2\phi_n}{d\zeta^2}d\zeta$$

$$=-\left[\phi_n.\frac{d\phi_n}{d\zeta}\right]_{\zeta=\zeta_1}+\int_0^{\zeta_1}\left\{\frac{d\phi_n}{d\zeta}\right\}^2d\zeta$$

この右邊は正になる。又 $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}>0$ 故 $\lambda_n\geqq0$ である。從つて $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_1}$ を，一つ與へる毎に $\{\lambda_n\}$ が實數の系列として定まり，夫に應じて基本振動以下陪振動が全部得られる。而して $\{\lambda_n\}$ は $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_1}$ の連續函數である。故に $\zeta>\zeta_1$ の範圍で p を連續的に 0 より ∞ まで變化して行くと $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_1}$ を媒介として，p が $\zeta>\zeta_1$ の範圍で $\{\lambda_n\}$ の要素と次々に一致してゆき，一致する毎に ζ の全變域 $(0,\zeta_\infty)$ を通じて可能な波動の解が生ずる事になる。斯る過程を以て表面波が生じ得る場合には，$\zeta<\zeta_1$ に於ける固有値問題の，各次數の固有値に應じた表面波が，基本振動及びその陪振動として成立し，陪振動に於てはその次數に相當した個數の水平節平面が $\zeta<\zeta_1$ の範圍に生ずる。V の指定の仕方を連續的に變へて行くと，基本振動及び各次の陪振動毎に p が變化して行き，夫々に分散曲線が對應する。斯樣な事は櫻庭氏が特殊な例題で得られた結果に，丁度該當してゐる。

上に述べた議論は嚴密を缺く點が殘つてゐる。即ち，$\zeta<\zeta_1$ の範圍で密度の變る棒の捩れ振動に倣へたけれ共，$\zeta=\zeta_1$ では (12) 式の ϕ の係數即ち密度に相當する値が 0 となる。又 p を變へて行く時，λ と實際に一致する事も吟味が要る。夫にも拘らず，上述の結果が正しい事を言はう。[2]

今 ζ_2 を $0<\zeta_2<\zeta_1$ を滿足する一定値とする。しかる時 $0\leqq\zeta\leqq\zeta_2$ の範圍で，

(1) 例へば寺澤寛一；數學概論第十三卷及第十四章。

(2) 第 5 圖で μ_m, μ_{m+1} 等とあるは l_m, l_{m+1} 等の誤り。

固有値問題

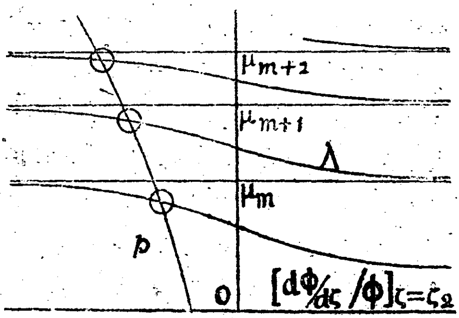
$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}+\lambda\cdot\mu^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right)\phi=0,\left[\frac{d\phi}{d\zeta}\right]_{\zeta=0}=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

を考へると，ϕ の係數は $\lambda\mu^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right)$ は 0 とならず λ と共に $+\infty$ となるから，Sturm の振動定理[(1)]により，次の如き數列 $\{l\}$ が定まる。

$$0<l_m<l_{m+1}<l_{m+2}<\cdots\cdots\to\infty$$

而して (13) の連續な解の $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_2}$ は，各 n に對し $l_{m+n}\leqq\lambda_{m+n+1}<l_{m+n+1}$ の範圍で λ_{m+n+1} の減小函數で $+\infty$ より $-\infty$ まで變化する。但し Suffix $(n+m+1)$ は ϕ の零點の數をあらはす。故に $\zeta>\zeta_1$ の範圍で p を與へて作つた解，($\phi_{\zeta\to\zeta_\infty}=0$ を滿足するものが存在する場合) を $\zeta_1>\zeta\geqq\zeta_2$ の範圍まで延長して $\zeta=\zeta_2$ での $\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi$ の値を求めると，夫を $\zeta=\zeta_2$ での境界條件とする (13) の固有値は，各 l_{m+n}, l_{m+n+1} 間に定まる。p を 0 より $+\infty$ まで變へる間に總での l_{m+n} と一致し，從つて總ての $\{\lambda\}$ の要素と一致する(第 5 圖)。一致する毎に $0\leqq\zeta\leqq\zeta_\infty$ の變域で波動が成立する事は，前に述べた積分方程式の議論と同一である。次に $\zeta_3>\zeta_1$ なる一定値 ζ_3 を採り，上に得た波動の解を，$0\leqq\zeta\leqq\zeta_3$ の間の，(13) なる固有値問題の解と考へる。今度は (13) の ϕ の係數は正及び負の値を採るが，第 4 圖により $\left[\frac{d\phi}{d\zeta}/\phi\right]_{\zeta=\zeta_3}<0$ であつて，斯る場合には Bôcher. の議論がある[(2)]。卽ち固有値 $\{\lambda\}$ は $0,+\infty$ 間では λ_0, λ_1; $\cdots\cdots\to+\infty$ と存在する。而して，$\zeta>\zeta_3$ での解の p を 0 より $+\infty$ まで變へてゆくと，必ず之等 $\{\lambda\}$ と出合ふのであつたから，結局前に述べた積分方程式の議論は依然正しかつた事が分る。

第 5 圖

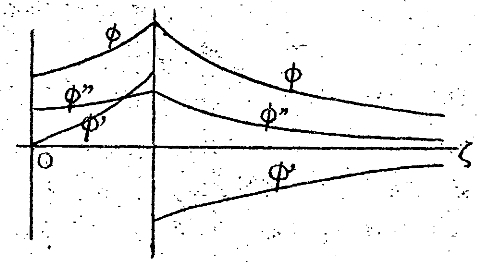


(1) 藤原松三郎；常微分方程式論，p 345.

(2) 藤原松三郎；loc. cit., p. 354.

以上で不十分乍ら一通りの吟味を了へる事にして，只一つ注意を述べておく。夫は今までの事柄は，總て ϕ, $\frac{d\phi}{d\zeta}$ 共に連續な解を探してゐたが，$\frac{d\phi}{d\zeta}$ に不連續を許せば，例へば，到る處 $V<b$ の様な解もあつてよい（第6圖）。$V<b$ の時には分散性が異狀分散の形式を採る傾きがある。例へば物性の連續に變る媒質内の，ある深さに，水平な割目の面があつて Slip を生ずるなら，この面で $\frac{d\phi}{d\zeta}$ が不連續でよい。この性質は物性變化が不連續の場合にも言ひ及ぼし得ると想像されるから，普通のラヴ波の様に，表面に物性の異る層を載せた半無限彈性體でも，境界面に Slip の條件を使へば異狀分散の波動が出來る場合も有りさうである。而してその位相速度 V は，b の最小値より小さい。例へば昨春，澤田龍吉氏[(1)]の注意された新彈性波はこの性質のもので，同氏は特に指摘はされなかつたが，明らかに異狀分散を行つてゐるものである。最近，妹澤教授等[(2)]がレーレー波に於ける異狀分散を説明されたので，事のついでに述べた次第である。

第 6 圖



4. 結 び

不均質半無限彈性體の表面を傳はる，ラブ型表面波に就て，嘗つて櫻庭信一氏が，特殊な例題を用ひて吟味された事のある，波動の存在性に關する議論を行つた。位相速度 V の，S 波速度 b（z の函數）に對する大きさに依り，種々の場合を生ずる。

1. b の最小値より小さい V の表面波は存在しない。
2. b の最大値より大きい V のものは，場合により存在し得るが，波動が存在し得ても一般には振動數と波長の間に定まつた關係が不要である。即ち，振動の形式に應じて分散式が定まる。一つの振動形式に對し，分散式が無數に，且つ互に分離して存在する樣な例もあれば，唯一箇しか對應せ

(1) 澤田龍吉; 氣象集誌, **15**, (1937), p. 248.

(2) 妹澤教授及金井清氏; 昭和13年1月18日地震研究所談話會にて御發表。

ぬ例もある。

3. V が b の最大値と最小値の間にある波動が存在出來れば，基本振動の他に，その陪振動に相當する，無數の互に分離した解が存在出來て各々に對し，分散式が對應する。陪振動に當るものでは次數に應じた箇數の水平節平面が，表面に近い側にある。

尚ほ，妹澤教授の $\mu=cz$ の場合の解式，及び異狀分散の事につき，夫々一言觸れた。

終りに臨み，日頃御鞭撻を辱ふし又この小文を作るに當りても色々有益な御注意を賜つた，高谷測候所長及び中央氣象臺の本多博士，森田稔學兄に厚く御禮申上げる。

昭和13年4月　　　於，水戸測候所