

# 驗 震 時 報

第 10 卷 第 2 號

## 半無限完全彈性體の表面を 傳播する彈性波に就て

正 野 重 方

1. 一樣な完全彈性體の内部に表面に平行な長い棒狀の源がある時、これより出た彈性波が如何に表面を傳播してゆくかといふ問題は故中野廣博士<sup>(1)</sup>により解かれ、その後坂井卓三博士<sup>(2)</sup>は二次元的の棒狀の源の代りに三次元的の點狀の源に關して同じ問題を立派に解決された。同論文に於ては源として球對稱のものを採用されて居る。方位的分布を持つた源の場合は適當な方向微分により、容易に解が得られる筈である。そして源としては内部に小球を考へて第一にそれが一樣に膨脹或は收縮する場合、第二に上半部が膨脹する時に下半部が收縮する場合、第三には表面に垂直の軸の周りに振れる場合といふ様な意味を與へることの出来るものを採用され、各の場合に就て別々に扱はれた。更に一步を進めて次にはその球面上に於て任意の條件を與へるとどうなるかといふ問題が起つて來る。球面上に於て力、又は變位といふ様に物理的に解釋し易い條件を考へることは意味のないことではないであらう。殊に彈性體内には大體壓縮波と振波と呼ばれる二種の波があり得て、これらの波は上の條件により、或る場合には單獨に、或場合には單獨には起されないで、互に適當な割合だけ混つて起されるといふことを考へると上の問題が益重要の様に思へてくる。最近著者は“On the Propagation of Tremors over the Plane Surface of a Semi-Infinite Perfect Elastic Solid”といふ題目の論文を中央氣象臺歐文彙報に發表し

た。その論文で半無限弾性体内に假想的の小球を考へてこの表面上で、垂直變位、垂直力、切線變位、切線力といふ四つの條件が與へられた時に發生する波を調べた。

ここでは同論文に取扱はれてゐる内容の概略と比較的に重要と思はれる結果に就いて述べようと思ふ。

同論文は三つの部分に分れてゐて、第一部では數學的準備を行ひ、第二部では無限弾性體中の波を取扱ひ、第三部では半無限弾性體の表面に於ける變位を研究してゐる。第一部の最後の目的は波動方程式の解の我々の問題に適當な積分表示式を求めることにあるのではあるが、應用數學に於ても重要と思はれる多くの新しい關係式を求めて居る。然しここでは數學的なことは出来るだけ省略する考へから、第一部に關しては述べないことにする。

2. 從來のこの種の理論では壓縮波、振波に相當する源の函數を *a priori* に與へて居た。所が今の理論では更に進んで球面上の條件を満足する様にその函數を定めるといふ仕事がある。球面上に於ける條件に適合する解を得るには球座標によるのが自然であらう。更にこの球より出た波は平面に衝突して二次波を勵起するのであるがその際表面は全く自由であるといふ條件が満足されなければならない。平面に於けるこの條件を満足するためにはカーチアン座標に依るのが自然である。この二つの異なる座標系に屬する境界條件を満足せしめなければならないといふことがこの問題に數學的困難さを起す一つの理由になるのである。今次の様に考へてこの問題を取扱ふことにする。即球面上にある變形又は力が與へられた場合に壓縮波と振波が發生したとする。それらの波が同時に球面を出發したとしても互に異なる速度で傳播してゆき異なる時刻に表面に到達し、そこで各が別々に反射波乃至二次波を發生するであらう。故に初めに球面上の條件を満足する様に運動方程式の解の積分常數を定めた後には各々を獨立に取扱つてよいであらう。又數學的に二つの獨立な波が同速度で進んでゆき表面に衝突した場合でも獨立に表面條件を満足する様にすることの許されるのは運動方程式及び境界條件が線形であることによるのである。

故に初めに無限弾性體中に於ける問題を考へる。

今の問題では運動は時間に對して週期的即ち  $e^{i\omega t}$  に比例すると假定する。變

位ベクトルを  $\psi$  とするとこれは

$$\psi = \text{grad } \Phi + \text{rot } \mathcal{A} \dots \dots \dots (1)$$

と置くことは一般に可能なことである。 $\Phi, \mathcal{A}$  は夫々スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルと呼ばれてゐるがこれの函数形は運動方程式により決定しなければならない。 $\mathcal{A}$  はベクトルであるから、三つの成分を持つのであるが運動方程式は三つであるから、 $\Phi$  と  $\mathcal{A}$  の三成分とのうちにどれか獨立でないものが必要で、四つ共に獨立ではあり得ない。實際に計算して見ると

$$\psi = \text{grad } \Phi + \text{rot } (\Psi_1, 0, 0)_s + \text{rot rot } (\Psi_2, 0, 0)_s \dots \dots \dots (1')$$

と置く都合が好いのである、但し  $\Psi_1, \Psi_2$  は共にベクトルの球座標に於ける動径成分を表はし、 $s$  なる符標は球座標の意味である。球座標にて表した運動方程式に上式を代入すると  $\Phi, \Psi_1, \Psi_2$  は夫々

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R\Phi)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} \\ \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

を満足すると運動方程式も満足されることを證明することが出来る。

(2) の第一式は波動方程式である。又第二式で  $\Psi = R \bar{\Psi}$  とおくと  $\bar{\Psi}$  は第一式の  $\lambda + 2\mu$  の代りに  $\mu$  で置き換へた式を満足することになり結局 (2) の解は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= f(hR) \bar{P}_n^m(\cos \theta) (A \cos m \varphi + A' \sin m \varphi), \\ \Psi_1 &= Rg(kR) \bar{P}_n^m(\cos \theta) (B \cos m \varphi + B' \sin m \varphi), \\ \Psi_2 &= Rg(kR) \bar{P}_n^m(\cos \theta) (C \cos m \varphi + C' \sin m \varphi). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2')$$

$$\begin{aligned} \text{但し } f(hR) &= \frac{1}{\sqrt{hR}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(hR), \quad g(kR) = \frac{1}{\sqrt{kR}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR), \quad h = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} p \\ &= \frac{p}{v_1}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} p = \frac{p}{v_2} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

$\lambda, \mu$  は Lamé の常數、 $\rho$  は密度、 $v_1$  は壓縮波の速度、 $v_2$  は振波の速度とし、 $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$  は Ferrel の  $n$  次  $m$  階の Legendre 陪函数であり、 $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$  は第二種 Hankel 函数で  $e^{i\varphi}$  と組合せて、發散波を與へるものである。

(1') に於て  $\text{grad } \Phi$  は壓縮波で  $\text{rot } (\Psi_1, 0, 0)_s$  は動径方向に變位成分を持たな

い振れ波であるが  $\text{rot rot} (\Psi_2, 0, 0)$  は動径方向にも変位成分を持つて居るのである。壓縮波を縦波、振れ波を横波と呼ぶこともあるが、横波とは進行方向に直角に振動して居る波と解釋すると後者には一寸びつたり來ない感がないでもない。又平面波であれば確かに振れ波は進行方向には変位成分を持たないのである。このことは  $\text{rot rot} (\Psi_2, 0, 0)$  を實際に精しく調べて見ると動径方向の成分は切線方向の成分より  $1/R$  だけ次數が高くなつて居て、源より充分離れた點即ち  $R$  が大きい所では動径方向の成分が早く減少しその點では球面の一部は殆ど平面と見做せるので上の平面波に於ける事柄とは矛盾しない。Lamb<sup>3)</sup> は弾性球の振動を取扱つた時に前者を第一種の振動と呼び、壓縮波と後者の波に相當する部分を第二種の振動と呼んだ。(我々の場合は發散波で Lamb のは定常振動であるが事柄には變りがない。) 又 Lamb は初めからカーテシアン座標にて進み、我々は球座標で進んで居るが適當な變換により一方より一方に變形することが出来ることも證明出来る。(これは同論文の附録とした)。球座標にて弾性體の運動方程式を解くことは既に妹澤博士や小平博士により行はれてゐる。妹澤博士の方法は我々の方法とは異なるが小平博士の方法は我々のものと見掛けは可成りに違ふが結局は同じであることを示すことを出来る。小平博士の論文に於ける  $\Pi_1, \Pi_2$  は我々の  $\Psi_2, \Psi_1$  に等しいものであるが只定義が稍違ふ。即ち我々の場合は  $\Psi_1, \Psi_2$  にベクトルの動径成分といふ意味を與へて居るの反して、小平博士の場合は只  $\Pi_1, \Pi_2$  は (2) の第二式の解といふだけの意味しか與へて居られない様である。その定義の一寸した差が後の理論の發展に著しく影響してゐるのである。初め小平博士の解を見た時  $\Pi_1, \Pi_2$  の意味がわからなかつたが、いろいろと試みて見て(1')の形に到達して、始めて  $\Pi_1, \Pi_2$  の意味がわかつたのである。

次に (2') に於ける積分常數  $A, A', B, B', C, C'$  を球面上の條件より定めなければならぬ。球面上の條件として次の四つを採用した。

$$(i) \vartheta_R = D \bar{P}_n^m (\cos \theta) \cos m\varphi, \quad \vartheta_\theta = \vartheta_\varphi = 0:$$

$$(ii) \vartheta_R = 0, \quad \vartheta_\theta = Em \frac{\bar{P}_n^m (\cos \theta)}{\sin \theta} \cos m\varphi, \quad \vartheta_\varphi = -E \frac{\partial \bar{P}_n^m (\cos \theta)}{\partial \theta} \sin m\varphi: \quad (4)$$

$$(iii) T_{RR} = P \bar{P}_n^m (\cos m\varphi) \cos m\varphi, \quad T_{R\theta} = R_{R\varphi} = 0:$$

$$(iv) T_{RR} = 0, T_{R\theta} = Qm \frac{\bar{F}_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos m\varphi, T_{R\varphi} = -Q \frac{\partial \bar{F}_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin m\varphi.$$

以上の四つの型は最も一般的なものであると思へるのである。ここに  $T_{RR}$  等は歪力を表はすものである。(i) と (iii) の条件に對して  $A'=B'=C'=0$  になり、(ii), (iv) の条件に對しては  $A=A', B=C=C'=0$  になることがわかる。即ち變位は次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \text{grad } \Phi + \text{rotrot}(\Psi_2, 0, 0), & (i), (iii) \text{ の場合,} \\ \varphi &= \text{rot}(\Psi_1, 0, 0), & (ii), (iv) \text{ の場合,} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

$\Phi$  にて與へられる波は  $v_1$  の速度で傳播し、 $\Psi_1, \Psi_2$  にて與へられる波は  $v_2$  の速度で傳播する。(5) の事柄を言葉で表せば、球面に垂直方向の變位、又は力を與へると壓縮波と第二種の振波が出てゆき、切線方向の變位又は力を與へると第一種の振波が出てゆくのである。(5) の第一式に相當する場合を更に詳しく論じ、第二式に相當する場合は後の論文に據ることにした。

第一式の場合に發散波を作るために單位時間になされる平均の仕事を計算すると

$$|W| = \frac{\pi^2}{2n+1} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{D^2}{T} W_i^{(i)} \quad \text{及} \quad |W| = \frac{\pi^2}{2n+1} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{P^2}{T} W_i^{(iii)}$$

$$\left( \text{但し } T = \frac{2\pi}{p} \right) \quad \dots\dots(6)$$

になる。ここで  $W_i^{(i)}$  及  $W_i^{(iii)}$  は  $p, a, \lambda, \mu, n$  の複雑な函数である。 $m$  は  $\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}$  なる係數を通じて表はれ、その係數は  $m$  が大きくなる程大きくなり、1 から  $\Gamma(2n+1)$  迄變化するのであるから、力又は變位の與へ方が同じ次數  $n$  で振幅が同じ帶狀と臺狀である場合には後者の方が多くの仕事がなされ、大きさは  $\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}$  倍になつてゐるのである。又仕事は振幅の二乗に比例するのである。

3. 以上で無限彈性體の場合の解が得られたのであるがこれから半無限彈性體に移ることにする。球面より出た波が表面に當ると反射波乃至二次波が勵起されるのであるが、それは表面は自由であるといふ條件より決定されるのである。 $\Phi$  と  $\Psi_2$  は前にも述べた様に獨立に取扱つてよいので別々に考へてゆくことにする。

半無限弾性體の表面での條件を考へる時にはカーテシアン座標が適當であるが  $\Phi$  は球座標で與へられてゐるのである。故に球座標よりカーテシアン座標に移る橋が必要である。ここで次の公式が役に立つのである。

$$\Phi = A \frac{1}{\sqrt{hR}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(hR) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi = A \lambda_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} P_n^m(\cos u) \cos mve^{-in(ax+\beta y+\gamma(z+d))} \sin u \, du \, dv \dots\dots\dots (7)$$

但し今は  $R^2 = x^2 + y^2 + (z+d)^2$ ,  $\lambda_n^m = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}(n+m)}}{\sqrt{2\pi^3}}$  であり、 $x, y, z$  はカーテシアン座標で  $d$  は前に考へた波の源となる球の表面からの深さである。カーテシアン座標に於て變位は次の形で與へられることは Lamb の論文<sup>(6)</sup>に示されてゐる。

$$\varphi = \text{grad } \Phi + \text{rot rot } (0, 0, \Pi_z^{(1)})_c \dots\dots\dots (8)$$

$c$  はカーテシアン座標の成分を表はし、 $\Phi, \Pi_z^{(1)}$  は夫々  $\nabla^2 \Phi + h^2 \Phi = 0$ ,  $\nabla^2 \Pi_z^{(1)} + k^2 \Pi_z^{(1)} = 0$  を満足する場合は上の  $\varphi$  は運動方程式を満足するのである。第二次波として次の形を假定する。

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(1)} &= A \lambda_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} S P_n^m(\cos u) \cos mve^{-in(ax+\beta y+\gamma(d-z))} \sin u \, du \, dv, \\ \Pi_z^{(1)} &= A \lambda_n^m \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} T P_n^m(\cos u) \cos mve^{-in(ax+\beta y+\gamma d - \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 - 1} z)} \sin u \, du \, dv. \end{aligned} \right\} (9)$$

ここに  $\varepsilon^2 = \frac{h^2}{k^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$  で  $S, T$  は境界條件より定めるものである。これを定めると(8)より變位が得られる。

次に  $\Psi_2$  を考へる。この場合は  $\Phi$  の場合と違ひ、波動方程式の解に  $R$  が掛つてゐる。このことが又都合のよいことなのである。即ち前にも述べたように  $\Psi_2$  はベクトルの動徑方向の成分であるから、 $x$ -,  $y$ -,  $z$ - 方向の成分は  $\Psi_2$  に方向餘弦を乗じたものになる實際に計算して變位を求めると

$$\begin{aligned} \vartheta_x &= -nk^n \frac{\partial(T_n Q_n^m)}{\partial x} + k^n T_{n-1} \frac{\partial Q_n^m}{\partial x}, \quad \vartheta_y = -nk^n \frac{\partial(T_n Q_n^m)}{\partial y} + k^n T_{n-1} \frac{\partial Q_n^m}{\partial y}, \\ \vartheta_z &= -nk^n \frac{\partial(T_n Q_n^m)}{\partial z} + k^n T_{n-1} \frac{\partial Q_n^m}{\partial z} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

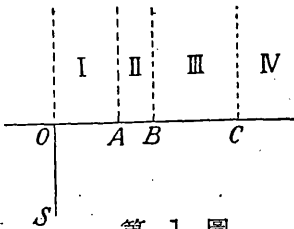
を得る。但し  $T_n = \frac{C}{(hR)^{n+\frac{1}{2}}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(hR)$ ,  $Q_n^m = R^n \bar{P}_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$  である。

(10)に於て各成分の第一項と第二項は可成りに形が異つて居り、 $h^n T_n Q_n^n$  は(7)と同じ形であるから第一項に對しては  $\Phi$  の場合と同様な取扱ひが出来るが第二項に對しては同じ様に行かない。今表面に對して源と對稱の點に像源を逆向きに置いて見ると表面に於ては歪力の切線成分は無くなり、垂直方向のものが倍になることが證明される。又像源を加へると(10)の  $\vartheta_x, \vartheta_y$  のは二倍になるが  $\vartheta_z$  は無くなるのである。所が表面では自由であるといふ條件が成立しなければならぬから、上の垂直歪力と符號の異なる力が働く場合の解を加へれば良いであらう。この様にして  $\Psi_2$  なる入射波に對する二次波による表面の變位が計算されるのである。

振波の入射波に對する以上の議論は坂井博士の振波に對する議論とは大分様子が違ふがそれは源の假定が違ふからである。然し積分形にて與へられた變位の部分は異なる點に注意して置けば坂井博士の用ひられた方法を使ふことが出来るのである。

(10)の第二項に相當する部分を除けば變位は  $u$  と  $v$  に關する二重積分で與へられ、就中  $u$  に關しては複素積分をしなければならないのであるが、正確な積分は求められないので、漸近展開を行ふのである。その際積分路を最急降下線 (path of steepest descent) に選ぶのであるが、その路が觀測點の震央距離により變つて來るのである。或る震央距離より大きくなると積分路が被積分函數の極、岐點等の特異點を通り過ぎそのためにそれ等に關する周邊積分が分れてくるのである。この様にして震央距離により種々な波が現れてくるのである。猶

球面波が表面に當つた場合の數理論の結果の物理的の解釋に關しては坂井博士<sup>(7)</sup>が氣象集誌に發表されたものがあるのでそれを参照されたい。實際にこれらの波の現れる範圍を圖で表はして見ると次の様になる。



今  $S$  に源があると考へる。  $O$  は震央で  $OS = d$  とすると  $A, B, C$  は次式で與へられる點である。

$$A = \frac{d}{\delta_0} \left( = \frac{1.60 d}{\delta_0} \right), \quad B = \frac{d}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \left( = \frac{d}{\sqrt{2}} \right), \quad C = \frac{d}{\delta'_0} \left( = \frac{d}{0.43} \right) \dots \dots (11)$$

但し( )中の値は  $\lambda = \mu$  或は  $\varepsilon^2 = 3$  とした場合の値である。今この様な半徑の三つの圓を震央を中心として表面上に畫き、それらに圍まれた範圍をそれぞれ (I), (II), (III), (IV) と名付けると各範圍で現れる波は次の如きものである。

- (I)  $\vartheta^{(p)}(v_1), \vartheta^{(s)}(v_2), \vartheta^{(s)}(r_2),$
- (II)  $\vartheta^{(p)}(v_1), \vartheta^{(s)}(v_2), \underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}, \vartheta^{(p)}(v_3),$
- (III)  $\vartheta^{(p)}(v_1), \underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}, \underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}, \vartheta^{(p)}(v_3), \vartheta^{(p)}(v_2), \vartheta^{(s)}(v_1),$
- (IV)  $\vartheta^{(p)}(v_1), \underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}, \underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}, \vartheta^{(p)}(v_3), \vartheta^{(p)}(v_2), \vartheta^{(s)}(v_1), \vartheta^{(s)}(v_3).$

但し以上の波の記號の意味は  $\vartheta$  は變位の意味に使ひ、肩符の (p), (s) は夫々入射波が  $\Phi$  であるか  $\Psi_2$  であるかを示し、(v<sub>1</sub>), (v<sub>2</sub>), (v<sub>3</sub>) は夫々それらの入射波により勵起された波の傳播速度を表はしてゐるものであり、v<sub>3</sub> は Rayleigh 波の速度を表はすものである。 $\underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}$  及  $\underline{\vartheta^{(s)}(v_2)}$  の下線は入射波と像源による反射波の合成波及垂直力がなくなるために加へた波を表はすものである。

次に各種の波による表面に於ける彈性體の素片の變位とその性質を簡単に述べて見よう。

(1) (I) に於ける各波の變位成分は次の如く得られる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r^{(p)}(v_1) &= A p_r^{(p)}(v_1) \cos m\varphi \frac{e^{-i(hR - \frac{\pi}{2}(n-2m))}}{R} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hR}\right) \right\}, \\ \vartheta_\varphi^{(p)}(v_1) &= A p_\varphi^{(p)}(v_1) \sin m\varphi \frac{e^{-i(hR - \frac{\pi}{2}(n-2m-1))}}{hRr} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hR}\right) \right\}, \\ \vartheta_z^{(p)}(v_1) &= A p_z^{(p)}(v_1) \cos m\varphi \frac{e^{-i(hR - \frac{\pi}{2}(n-2m))}}{R} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hR}\right) \right\}, \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し } p_r^{(p)}(v_1) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 \theta}}{D(\cos \theta)} \bar{P}_n^m(\cos \theta), \\ p_\varphi^{(p)}(v_1) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \frac{\varepsilon^2 \cos \theta \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 \theta}}{D(\cos \theta)} \bar{P}_n^m(\cos \theta), \\ p_z^{(p)}(v_1) &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2 \cos \theta (\varepsilon^2 - 2 \sin^2 \theta)}{D(\cos \theta)} \bar{P}_n^m(\cos \theta) \\ D(\cos \theta) &= (\varepsilon^2 - 2 \sin^2 \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2 \theta}, \quad R = \sqrt{a^2 + r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

$\vartheta_r, \vartheta_\varphi, \vartheta_z$  の  $r, \varphi, z$  は震央よりの動徑方向、その切線方向、垂直上方の成分を表はすものである。更に運動をよく見るためには變位の比をとつて見るとよゝ。

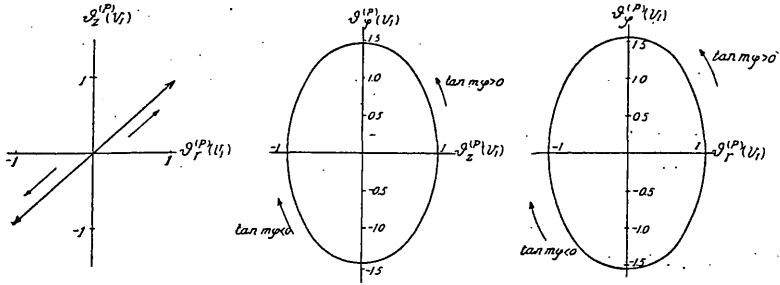


$$\frac{\vartheta_r^{(p)}(v_1)}{\vartheta_z^{(p)}(v_1)} = \frac{2\sin\theta\sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2\theta}}{\varepsilon^2 - 2\sin^2\theta}, \quad \frac{\vartheta_\varphi^{(p)}(v_1)}{\vartheta_z^{(p)}(v_1)} = \frac{2m\sqrt{\varepsilon^2 - \sin^2\theta}}{\varepsilon^2 - 2\sin^2\theta} \frac{\tan m\varphi}{hr} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\vartheta_\varphi^{(p)}(v_1)}{\vartheta_r^{(p)}(v_1)} = m \operatorname{cosec}\theta \frac{\tan m\varphi}{hr} e^{-i\frac{\pi}{2}} \dots\dots\dots(14)$$

今この式より  $\varepsilon^2 = 3$ ,  $\left| \frac{\tan m\varphi}{hr} \right| = m = 1$ ,  $\theta = 40^\circ$  ととつた場合の表面に於ける素片の運動の軌道の三つの直交する面への投射圖を畫いて見ると第2圖のようになる。

第 2 圖



矢印は運動の方向を表はす。

次に  $\vartheta_r^{(s)}(v_2)$  は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r^{(s)}(v_2) &= C2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \bar{P}_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n+2}{2}\pi)}}{R} \left\{ 1 + 0\left(\frac{1}{kR}\right) \right\} \\ &+ C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ (n+m)(n+m-1) \bar{P}_{n-1}^{m-1}(\cos\theta) - \bar{P}_{n-1}^{m+1}(\cos\theta) \right\} \\ &\times \cos m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n}{2}\pi)}}{R} \left\{ 1 + 0\left(\frac{1}{kR}\right) \right\}, \\ \vartheta_\varphi^{(s)}(v_2) &= C2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} nm \bar{P}_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n+1}{2}\pi)}}{kR^2} \left\{ 1 + 0\left(\frac{1}{kR}\right) \right\} \\ &+ C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ (n+m)(n+m-1) \bar{P}_{n-1}^{m-1}(\cos\theta) \bar{P}_{n-1}^{m+1}(\cos\theta) \right\} \\ &\times \sin m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n+2}{2}\pi)}}{R} \left\{ 1 + 0\left(\frac{1}{hR}\right) \right\}, \\ \vartheta_z^{(s)}(v_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

入射波と係源による波との合成波は表面に垂直の變位がないが水平方向の變位は入射波のみによるものの二倍になつてゐるのである。上述の如く垂直變位がないことにより垂直方向に歪が生じて來るのであつてこれを消すために二重

の下線によつて表はした波を生じてくるのである。又水平方向では變位が二倍になつて居り、歪がないのである。このことは簡単な平面波に於て、全く自由な面に波が當ると振幅が二倍になることを知つて居るが、それと同じである。

(15)に於て注意すべき點は第一項は他の波例へば  $\vartheta^{(s)}(v_1)$  に於けると同じ様に  $\varphi$  成分は  $r$ -成分の  $1/r$  の程度であるのに第二項は第一項と同じく  $1/R$  の程度であることである。平面波の場合に於ける結果より考へて第一項は入射面内に振動する振波で第二項は入射面と直角の方向に振動する振波であると考へてよいであらう。便宜上第一項を' 第二項を'' で表はし別々に比を求めて見ると

$$\frac{\vartheta_{\varphi}^{(s)'}(v_2)}{\vartheta_r^{(s)'}(v_2)} = m \frac{\tan m\varphi}{kR} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{\vartheta_{\varphi}^{(s)''}(v_2)}{\vartheta_r^{(s)''}(v_2)} = -\tan m\varphi \dots\dots\dots (16)$$

即ち第一項の部分では表面上で素片は楕圓運動をなし第二項では直線運動をすることがわかる。

次に  $\vartheta^{(s)}(v_2)$  に就て考へる。

$$\left. \begin{aligned} \underline{\vartheta_r^{(s)}(v_2)} &= C p_r^{(s)}(v_2) \cos m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n-2m}{2}\pi)}}{R} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kR}\right) \right\}, \\ \underline{\vartheta_{\varphi}^{(s)}(v_2)} &= C p_{\varphi}^{(s)}(v_2) \sin m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n-2m-1}{2}\pi)}}{krR} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kR}\right) \right\}, \\ \underline{\vartheta_z^{(s)}(v_2)} &= C p_z^{(s)}(v_2) \cos m\varphi \frac{e^{-i(kR - \frac{n-2m-2}{2}\pi)}}{R} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kR}\right) \right\}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

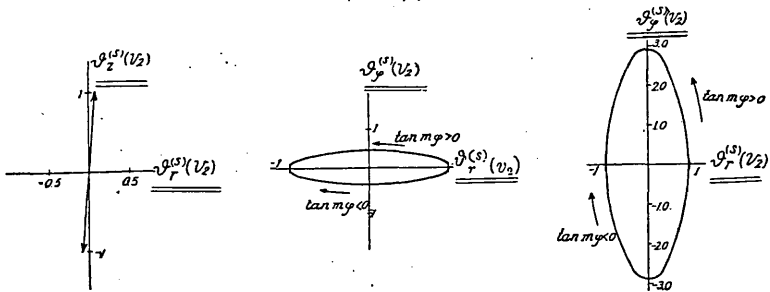
$$\left. \begin{aligned} p_r^{(s)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \theta \cos \theta \left\{ (1-2\sin^2\theta) - 2\cos \theta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2 \theta} \right\}}{E(\cos \theta)} \\ &\quad \times \{ n \cos \theta \bar{P}_n^m(\cos \theta) - (n+m) \bar{P}_{n-1}^m(\cos \theta) \}, \\ p_{\varphi}^{(s)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \frac{\cos \theta \left\{ (1-2\sin^2\theta) - 2\cos \theta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2 \theta} \right\}}{E(\cos \theta)} \\ &\quad \times \{ n \cos \theta \bar{P}_n^m(\cos \theta) - (n+m) \bar{P}_{n-1}^m(\cos \theta) \}, \\ p_z^{(s)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \theta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2 \theta}}{E(\cos \theta)} \\ &\quad \times \{ n \cos \theta \bar{P}_n^m(\cos \theta) - (n+m) \bar{P}_{n-1}^m(\cos \theta) \}, \\ E(\cos \theta) &= (1-2\sin^2\theta)^2 + 4\cos \theta \sin^2\theta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

變位成分の比をとつて見ると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\underline{\underline{\vartheta_r^{(s)}(v_2)}}}{\underline{\underline{\vartheta_z^{(s)}(v_2)}}} &= \frac{\sin \theta \left\{ (1-2\sin^2\theta) - 2\cos \theta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\theta} \right\} e^{i\pi}}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\theta}} \\ \frac{\underline{\underline{\vartheta_\varphi^{(s)}(v_2)}}}{\underline{\underline{\vartheta_z^{(s)}(v_2)}}} &= m \frac{\left\{ (1-2\sin^2\theta) - 2\cos \theta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\theta} \right\} \tan m\varphi e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\theta} kr} \\ \frac{\underline{\underline{\vartheta_\varphi^{(s)}(v_2)}}}{\underline{\underline{\vartheta_r^{(s)}(v_2)}}} &= m \operatorname{cosec} \theta \frac{\tan m\varphi}{kr} e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

(I) の範圍は  $\lambda = \mu$  の場合  $\theta < 35^\circ 16'$  であつてその場合には  $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2\theta}$  は常に實である。  $\varepsilon^2 = 3$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\left| \frac{\tan m\varphi}{kr} \right| = m = 1$  の場合の素片の軌道の投射圖を畫くと次の様になる。

第 3 圖



(2), (II) に於ける波に就て考へる。

$\vartheta^{(w)}(v_1)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_2)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_2)$  は (I) に於けると同様であるがその外に  $\vartheta^{(w)}(v_3)$  即ち  $\Phi$  により勵起された Rayleigh 波が現れて来る。ここでは  $\vartheta^{(w)}(v_1)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_2)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_2)$  に就ては特に注意する程のこともないので  $\vartheta^{(w)}(v_3)$  のみに就て考へることとする。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r^{(w)}(v_3) &= A p_r^{(w)}(v_3) \cos m\varphi e^{-\eta\delta_0 d + i\frac{\eta+m-2}{2}\pi} \frac{\partial}{\partial r} H_m^{(1)}(-kr) \\ &= A \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_r^{(w)}(v_3) \cos m\varphi \sqrt{\kappa} \frac{e^{-\eta\delta_0 d - i(\kappa r - \frac{2n-1}{4}\pi)}}{r} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\vartheta_{\varphi}^{(p)}(v_3) = A p_{\varphi}^{(p)}(v_3) \sin m\varphi e^{-h\delta_0\alpha + i\frac{n+m}{2}\pi} \frac{H_m^{(1)}(-\kappa r)}{r} \quad \dots(20)$$

$$= A \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_{\varphi}^{(p)}(v_3) \sin m\varphi \frac{e^{-h\delta_0\alpha - i(\kappa r - \frac{2n-3}{4}\pi)}}{\sqrt{\kappa r^3}} \left\{ 1 + 0\left(\frac{1}{\kappa r}\right) \right\},$$

$$\vartheta_z^{(p)}(v_3) = A h p_z^{(p)}(v_3) \cos m\varphi e^{-h\delta_0\alpha + i\frac{n+m-3}{2}\pi} H_m^{(1)}(-\kappa r)$$

$$= A \sqrt{\frac{2}{\pi(1+\delta_0^2)}} p_z^{(p)}(v_3) \cos m\varphi \sqrt{\frac{e^{-h\delta_0\alpha - i(\kappa r - \frac{2n-1}{4}\pi)}}{\kappa r}} \left\{ 1 + 0\left(\frac{1}{\kappa r}\right) \right\},$$

$$p_r^{(p)}(v_3) = 4\sqrt{\frac{\varepsilon^2\delta_0}{2\pi}} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1 - \delta_0^2} P_n^m(-i\delta_0)}{\left(\frac{dD}{dr}\right)_{\gamma=-i\delta_0}},$$

$$p_{\varphi}^{(p)}(v_3) = 4\sqrt{\frac{\varepsilon^2\delta_0}{2\pi m}} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1 - \delta_0^2} P_n^m(-i\delta_0)}{\left(\frac{dD}{dr}\right)_{\gamma=-i\delta_0}}, \dots\dots\dots(21)$$

$$p_z^{(p)}(v_3) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2\delta_0}{2\pi}} \frac{\varepsilon^2 - 2 - 2\delta_0^2}{\left(\frac{dD}{dr}\right)_{\gamma=-i\delta_0}} P_n^m(-i\delta_0),$$

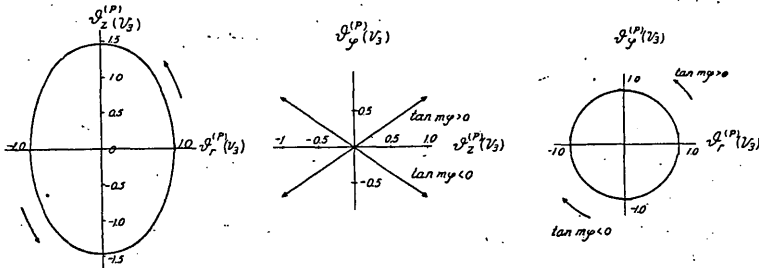
但し  $\kappa = \frac{p}{v_3} = \frac{p}{v_1} \sqrt{1+\delta_0^2}$

$\vartheta_r^{(p)}(v_3)$ ,  $\vartheta_z^{(p)}(v_3)$  の振幅は  $r^{\frac{1}{2}}$ ,  $\vartheta_{\varphi}^{(p)}(v_3)$  は  $r^{\frac{3}{2}}$  に逆比例して減小する。變位の比を求めると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vartheta_r^{(p)}(v_3)}{\vartheta_z^{(p)}(v_3)} &= 2 \frac{\sqrt{1+\delta_0^2} \sqrt{1+\delta_0^2 - \varepsilon^2}}{2\delta_0^2 + 2 - \varepsilon^2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \left( = 0.68 e^{-i\frac{\pi}{2}} \right), \\ \frac{\vartheta_{\varphi}^{(p)}(v_3)}{\vartheta_z^{(p)}(v_3)} &= 2m \frac{\sqrt{1+\delta_0^2} \sqrt{1+\delta_0^2 - \varepsilon^2} \tan m\varphi}{2\delta_0^2 + 2 - \varepsilon^2} \frac{1}{\kappa r} \left( = m 0.68 \frac{\tan m\varphi}{\kappa r} \right), \\ \frac{\vartheta_r^{(p)}(v_3)}{\vartheta_{\varphi}^{(p)}(v_3)} &= m \frac{\tan m\varphi}{\kappa r} e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \right\} \dots(22)$$

( ) の中は  $\varepsilon^2=3$  の場合である。素片の軌道の投影圖は第 4 圖のようになる。

第 4 圖



(3) (III) に於ける波に就て考へる。

この範囲になると  $\vartheta^{(2)}(v_1)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_1)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_2)$ ,  $\vartheta^{(2)}(v_3)$  の外に  $\vartheta^{(2)}(v_2)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_1)$  が現れる。この範囲では  $\frac{1}{\varepsilon^2} < \sin^2 \theta$  になるので  $\vartheta^{(s)}(v_2)$  に於ける  $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - \sin^2 \theta}$  を  $-i\sqrt{\sin^2 \theta - \frac{1}{\varepsilon^2}}$  ととらなければならない。その外は同じであるので  $\vartheta^{(2)}(v_2)$ ,  $\vartheta^{(s)}(v_1)$  だけに就て考へればよい。

初めに  $\vartheta^{(2)}(v_2)$  に就て考へる。 $\vartheta^{(2)}(v_2)$  は次の様に與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r^{(2)}(v_2) &= A p_r^{(2)}(v_2) \cos m\varphi \frac{e^{-\hbar d \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - i(kr - \frac{2n+1}{4}\pi)}}{kR^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{\hbar R} \right) \right\}, \\ \vartheta_\varphi^{(2)}(v_2) &= A p_\varphi^{(2)}(v_2) \sin m\varphi \frac{e^{-\hbar d \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - i(kr - \frac{2n-1}{4}\pi)}}{\hbar^2 R^2 r} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{\hbar R} \right) \right\}, \\ \vartheta_z^{(2)}(v_2) &= A p_z^{(2)}(v_2) \cos m\varphi \frac{e^{-\hbar d \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - i(kr - \frac{2n-1}{4}\pi)}}{kK^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{\hbar R} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

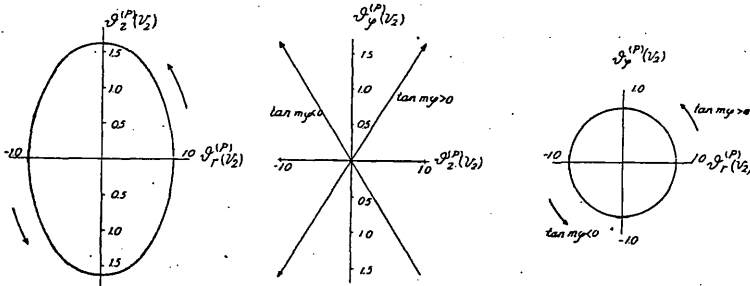
$$\left. \begin{aligned} p_r^{(2)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{3}{4}} \bar{P}_n^m(-i\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\varepsilon \sin \frac{1}{2}\theta (\varepsilon \cos \theta - i\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \theta)^{3/2}}, \\ p_\varphi^{(2)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \varepsilon \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{3}{4}} \bar{P}_n^m(-i\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sin \frac{1}{2}\theta (\varepsilon \cos \theta - i\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \theta)^{3/2}}, \\ p_z^{(2)}(v_2) &= 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{5}{4}} \bar{P}_n^m(-i\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sin \frac{1}{2}\theta (\varepsilon \cos \theta - i\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \theta)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

この波は(23)の指數部分を見てわかる様に表面に沿つて  $v_2$  の速さで進むものであり、又その振幅は  $d$  即ち源の深さが大きくなれば指數的に減少するのであるが、それは絶對的の深さでなく  $\hbar d \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\rho}{v_1} d \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{2\pi}{T v_1} d \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = T v_1$  は波長であるのでそれを  $\lambda$  と書くと  $2\pi \sqrt{\varepsilon^2 - 1} d / \lambda$  になる。即ち深さと波長の比が大きくなれば振幅が減少するのである。故に同じ深さの源に對しても波長の大きいもの即ち週期の長い振動の方が短かい振動より振幅の大きな  $\vartheta^{(2)}(v_2)$  を勵起することになる。振幅の比をとつて見ると次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vartheta_r^{(2)}(v_2)}{\vartheta_z^{(2)}(v_2)} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} e^{i\frac{\pi}{2}} (= 0.61 e^{i\frac{\pi}{2}}), \\ \frac{\vartheta_\varphi^{(2)}(v_2)}{\vartheta_z^{(2)}(v_2)} &= \frac{m}{2} \frac{\varepsilon \tan m\varphi}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} kr} \left( = m 0.61 \frac{\tan m\varphi}{kr} \right), \\ \frac{\vartheta_\varphi^{(2)}(v_2)}{\vartheta_r^{(2)}(v_2)} &= m \frac{\tan m\varphi}{kr} e^{-i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

( )の中は  $\varepsilon^2=3$  の場合の値であつてその場合に素片の運動の軌道の投射圖は次の様になる。

第 5 圖

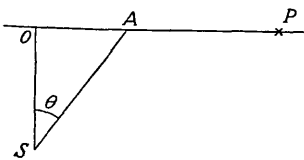


次に  $\vartheta^{(S)}(v_2)$  に就て考へる。

變位成分は次式で考へられる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r^{(S)}(v_1) &= C p_r^{(S)}(v_1) \cos m\varphi \frac{e^{-i\varphi} \left( \frac{R_0 + R_1}{v_2} + \frac{R_1}{v_1} \right) + i \frac{n-2m-2}{2} \pi}{h R^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kR} \right) \right\}, \\ \vartheta_\varphi^{(S)}(v_1) &= C p_\varphi^{(S)}(v_1) \sin m\varphi \frac{e^{-i\left( \frac{R_0 + R_1}{v_2} + \frac{R_1}{v_1} \right) + i \frac{n+2m-3}{2} \pi}}{h^2 R^2 r} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kR} \right) \right\}, \\ \vartheta_z^{(S)}(v_1) &= C p_z^{(S)}(v_1) \cos m\varphi \frac{e^{-i\varphi} \left( \frac{R_0 + R_1}{v_2} + \frac{R_1}{v_1} \right) + i \frac{n-2m+2}{2} \pi}{h R^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kR} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} p_r^{(S)}(v_1) &= 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon^2 \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{5/4}}{(\varepsilon^2 - 2)^3} \frac{\left\{ n \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \bar{P}_n^m \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) - (n+m) \bar{P}_{n-1}^m \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) \right\}}{\sin^2 \theta (\sin \theta \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - \cos \theta)^{3/2}}, \\ p_\varphi^{(S)}(v_1) &= 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon^2 m \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{5/4}}{(\varepsilon^2 - 2)^3} \frac{\left\{ n \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \bar{P}_n^m \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) - (n+m) \bar{P}_{n-1}^m \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) \right\}}{\sin^2 \theta (\sin \theta \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - \cos \theta)^{3/2}}, \\ p_z^{(S)}(v_1) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon^2 \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{3/4}}{(\varepsilon^2 - 2)^2} \frac{\left\{ n \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \bar{P}_n^m \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) - (n+m) \bar{P}_{n-1}^m \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) \right\}}{\sin^2 \theta (\sin \theta \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - \cos \theta)^{3/2}}, \end{aligned} \right\} (27)$$



第 6 圖

但し  $R_0, R_1$  等は次の圖により與へられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{\varepsilon}, \\ R_0 &= SA, \quad R_1 = AP \end{aligned} \right.$$

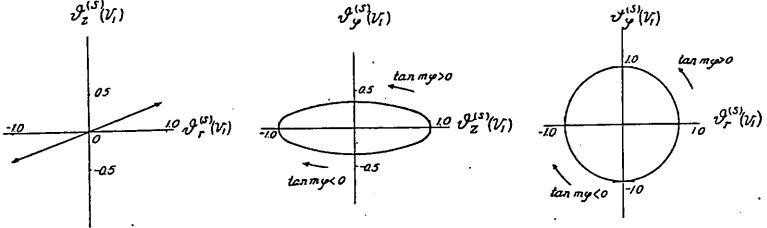
指數部分を見てわかる様にこの波は  $S$  より出發して  $v_2$  の速さで  $A$  迄行き、 $A$  より表面に

沿つて  $v_1$  の速さでゆくものと解釋出来る。勿論走時に関することは衝撃性の波に就て、考へるべきかもしれないがその種の事柄は週期的に考へたのと大した變りがないのである。各成分の比をとると次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vartheta_r^{(s)}(v_1)}{\vartheta_z^{(s)}(v_1)} &= 2 \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^2 - 2} (= 2.83), & \frac{\vartheta_\varphi^{(s)}(v_1)}{\vartheta_z^{(s)}(v_1)} &= m 2.83 \frac{\tan m\varphi}{hr} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \\ \frac{\vartheta_\varphi^{(s)}(v_1)}{\vartheta_r^{(s)}(v_1)} &= m \frac{\tan m\varphi}{hr} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

素片の運動の軌道の投射圖は次の様になる。

第 7 圖



(4), (IV) に於ける波に就て考へる。

この範圍では以上の波の外に  $\vartheta^{(s)}(v_3)$  即ち  $\Psi^{(2)}$  より勵起された Rayleigh 波が現れる。

$\vartheta^{(s)}(v_3)$  の成分は次式で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r^{(s)}(v_3) &= C \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_r^{(s)}(v_3) \cos m\varphi \sqrt{\frac{\kappa}{r}} e^{-\lambda \delta'_0 a - i(\kappa r - \frac{2n-1}{4}\pi)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right) \right\}, \\ \vartheta_\varphi^{(s)}(v_3) &= C \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_\varphi^{(s)}(v_3) \sin m\varphi \sqrt{\frac{1}{hr^3}} e^{-\lambda \delta'_0 a - i(\kappa r - \frac{2n-3}{4}\pi)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right) \right\}, \\ \vartheta_z^{(s)}(v_3) &= C \sqrt{\frac{2}{\pi(1+\delta_0'^2)}} p_z^{(s)}(v_3) \cos m\varphi \sqrt{\frac{\kappa}{r}} e^{-\lambda \delta'_0 a - i(\kappa r - \frac{2n-3}{4}\pi)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right) \right\}, \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\left. \begin{aligned} p_r^{(s)}(v_3) &= 4\sqrt{2\pi} \frac{\delta'_0 \left(1 + 2\delta_0'^2 - 2\delta'_0 \sqrt{1 + \delta_0'^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}\right)}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\gamma = -i\delta'_0}} \\ &\times \{in\delta'_0 \bar{P}_n^m(-i\delta'_0) + (n+m)\bar{P}_{n-1}^n(-i\delta'_0)\}, \\ p_\varphi^{(s)}(v_3) &= 4\sqrt{2\pi} m \frac{\delta'_0 \left(1 + 2\delta_0'^2 - 2\delta'_0 \sqrt{1 + \delta_0'^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}\right)}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\gamma = -i\delta'_0}} \\ &\times \{in\delta'_0 \bar{P}_n^m(-i\delta'_0) + (n+m)\bar{P}_{n-1}^m(-i\delta'_0)\}, \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

$$p_z^{(s)}(v_3) = 4\sqrt{2\pi} \frac{\delta'_0 \sqrt{1+\delta'_0{}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{r=-i\delta'_0}} \times \{in\delta'_0 \bar{P}_n^m(-i\delta'_0) + (n+m)\bar{P}_{n-1}^m(-i\delta'_0)\},$$

但し  $\kappa = \frac{p}{v_3} \sqrt{1+\delta'^2}$  である。

成分の比をとつて見ると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vartheta_r^{(s)}(v_3)}{\vartheta_z^{(s)}(v_3)} &= \frac{\sqrt{1+\delta'_0{}^2} \left(1+2\delta'_0{}^2 - 2\delta'_0 \sqrt{1+\delta'_0{}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+\delta'_0{}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} (= 0.68 e^{i\frac{\pi}{2}}) \\ \frac{\vartheta_\phi^{(s)}(v_3)}{\vartheta_z^{(s)}(v_3)} &= m \frac{\sqrt{1+\delta'_0{}^2} \left(1+2\delta'_0{}^2 - 2\delta'_0 \sqrt{1+\delta'_0{}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}\right) \tan m\phi}{\sqrt{1+\delta'_0{}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \kappa r} \dots (31) \\ &= m \frac{0.68 \tan m\phi}{\kappa r}, \\ \frac{\vartheta_\phi^{(s)}(v_3)}{\vartheta_r^{(s)}(v_3)} &= m \frac{\tan m\phi}{\kappa r} e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \right\}$$

( ) 中の値は  $\varepsilon^2=3$  の場合であるが(22)の( )中と全く同じ値をもつて居ることは注目すべきことである。これは  $\varepsilon^2=3$  といふ特別の値に對して成立するものでなく任意の  $\varepsilon$  に對して(22)と(28)の第二邊が見掛上は著しい違ひのあるにも關らず一致することを證明することが出来るのである。このことに就ては更に次節で述べることにする。

(IV) は  $r = \frac{d}{\delta'_0}$  以上  $r = \infty$ 迄の範圍をとり得るのであるから、 $\vartheta^{(s)}(v_1)$ 、 $\vartheta^{(s)}(v_2)$  等に就て多少の注意が必要である。何故かなれば(13)及び(22)を見ると  $\cos \theta$  なる因數が總てに含まれてゐるのである。 $\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}$  であるから  $r = \infty$  で  $\cos \theta = 0\left(\frac{1}{r}\right)$  になる。故に充分大きな  $r$  に對しては第一項が  $0\left(\frac{1}{r^2}\right)$  になるから漸近展開の第二項と同じ程度になる。故に第二項も求めて見なければならぬ。可成りに厄介な計算をすると次の結果が得られる。

初めに  $\vartheta^{(s)}(v_1)$  に就て考へる。

(i)  $n-m$ : 偶數



$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta_r^{(p)}(v_1) &= A \bar{p}_r^{(p)}(v_1) \left( d - \frac{4i(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{h(\varepsilon^2-2)^2} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i\left(hr - \frac{n-2m}{2}\pi\right)}}{r^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hr}\right) \right\}, \\
 \vartheta_\varphi^{(p)}(v_1) &= A \bar{p}_\varphi^{(p)}(v_1) \left( d - \frac{4i(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{h(\varepsilon^2-2)^2} \right) \sin m\varphi \frac{e^{-i\left(hr - \frac{n-2m-1}{2}\pi\right)}}{hr^3} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hr}\right) \right\}, \\
 \vartheta_z^{(p)}(v_1) &= A \bar{p}_z^{(p)}(v_1) \left( d - \frac{4i(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{h(\varepsilon^2-2)^2} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i\left(hr - \frac{n-2m}{2}\pi\right)}}{r^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hr}\right) \right\}, \\
 \bar{p}_r^{(p)} &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2-1)^2} \bar{P}_n^m(0), \\
 \bar{p}_\varphi^{(p)} &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2-2)^2} \bar{P}_n^m(0), \\
 \bar{p}_z^{(p)} &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-2} \bar{P}_n^m(0).
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

(ii)  $n-m$ : 奇數

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta_r^{(p)}(v_1) &= A \bar{p}_r^{(p)}(v_1) \left( \frac{d^2}{r} + \frac{i}{h} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i\left(hr - \frac{n-2m}{2}\pi\right)}}{r^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hr}\right) \right\}, \\
 \vartheta_\varphi^{(p)}(v_1) &= A \bar{p}_\varphi^{(p)}(v_1) \left( \frac{d^2}{r} + \frac{i}{h} \right) \sin m\varphi \frac{e^{-i\left(hr - \frac{n-2m-1}{2}\pi\right)}}{hr^3} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hr}\right) \right\}, \\
 \vartheta_z^{(p)}(v_1) &= A \bar{p}_z^{(p)}(v_1) \left( \frac{d^2}{r} + \frac{i}{h} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i\left(hr - \frac{n-2m}{2}\pi\right)}}{r^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{hr}\right) \right\}, \\
 \bar{p}_r^{(p)}(v_1) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2-2)^2} \left( \frac{\bar{P}_n^m(\gamma)}{\gamma} \right)_{\gamma=0}, \\
 \bar{p}_\varphi^{(p)}(v_1) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2-2)^2} \left( \frac{\bar{P}_n^m(\gamma)}{\gamma} \right)_{\gamma=0}, \\
 \bar{p}_z^{(p)}(v_1) &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-2} \left( \frac{\bar{P}_n^m(\gamma)}{\gamma} \right)_{\gamma=0}.
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

成分の比は(14)に於て  $\sin \theta = 1$  と置いたものと同じになる。

次に  $\vartheta^{(s)}(v_2)$  に就て考へる。

(i)  $n-m$ : 偶數

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{\vartheta}_r^{(s)}(v_2) &= C \underline{p}_r^{(s)}(v_2) \left( \frac{d^2}{r} + \frac{i}{k} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i\left(kr - \frac{n-2m-2}{2}\pi\right)}}{r^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right\}, \\
 \underline{\vartheta}_\varphi^{(s)}(v_2) &= C \underline{p}_\varphi^{(s)}(v_2) \left( \frac{d^2}{r} + \frac{i}{k} \right) \sin m\varphi \frac{e^{-i\left(kr - \frac{n-2m-3}{2}\pi\right)}}{kr^3} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right\},
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

$$\begin{aligned} \underline{\vartheta_z^{(s)}}(v_2) &= C \bar{p}_z^{(s)}(v_2) \left( \frac{d^2}{r} + \frac{i}{k} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i(kr - \frac{n-2m+1}{2}\pi)}}{r^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kr} \right) \right\}, \\ \bar{p}_r(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ n \bar{P}_n^m(0) - (n+m) \left( \frac{\bar{P}_{n-1}^m(\gamma)}{\gamma} \right)_{\gamma=0} \right\}, \\ \bar{p}_\varphi(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ n \bar{P}_n^m(0) - (n+m) \left( \frac{\bar{P}_{n-1}^m(\gamma)}{\gamma} \right)_{\gamma=0} \right\}, \\ \bar{p}_z(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \left\{ n \bar{P}_n^m(0) - (n+m) \left( \frac{\bar{P}_{n-1}^m(\gamma)}{\gamma} \right)_{\gamma=0} \right\}. \end{aligned} \quad \dots\dots (37)$$

成分の比は(19)に於て  $\cos \theta = 0$ ,  $\sin \theta = 1$  と置いたものと同じになる。

(ii)  $n-m$ : 奇數

$$\begin{aligned} \underline{\vartheta_r^{(s)}}(v_2) &= C \bar{p}_r^{(s)}(v_2) \left( d - \frac{2\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{k} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i(kr - \frac{n-2m}{2}\pi)}}{r^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kr} \right) \right\}, \\ \underline{\vartheta_\varphi^{(s)}}(v_2) &= C \bar{p}_\varphi^{(s)}(v_2) \left( d - \frac{2\sqrt{2-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{k} \right) \sin m\varphi \frac{e^{-i(kr - \frac{n-2m-1}{2}\pi)}}{kr^3} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kr} \right) \right\}, \\ \underline{\vartheta_z^{(s)}}(v_2) &= C \bar{p}_z^{(s)}(v_2) \left( d - \frac{4\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{k} \right) \cos m\varphi \frac{e^{-i(kr - \frac{n-2m-1}{2}\pi)}}{r^2} \left\{ 1 + 0 \left( \frac{1}{kr} \right) \right\}, \\ \bar{p}_r^{(s)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+m) \bar{P}_{n-1}^m(0), \\ \bar{p}_\varphi^{(s)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+m) \bar{P}_{n-1}^m(0), \\ \bar{p}_z^{(s)}(v_2) &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} (n+m) \bar{P}_{n-1}^m(0). \end{aligned} \quad \dots\dots (39)$$

この場合は第二項が今迄のものとは少し異なる形に利いてきて、成分の比は次の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\vartheta_r^{(s)}}(v_2)}{\underline{\vartheta_z^{(s)}}(v_2)} &= 1.22 \frac{kd - 2.45}{kd - 4.90} c^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{\underline{\vartheta_\varphi^{(s)}}(v_2)}{\underline{\vartheta_z^{(s)}}(v_2)} = m 1.22 \frac{kd - 2.45 \tan m\varphi}{kd - 4.90} \frac{1}{kr}, \\ \frac{\underline{\vartheta_\varphi^{(s)}}(v_2)}{\underline{\vartheta_r^{(s)}}(v_2)} &= m \frac{\tan m\varphi}{kr} e^{-i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad \dots\dots (40)$$

3.2 に於て注意した如く  $\vartheta^{(s)}(v_3)$  の各成分の比と  $\vartheta^{(s)}(v_2)$  の各成分の比が任意の値に就て全く等しいことを證明してみる。

$\delta_0$  は(13)第4式を満足する根であるので次の式を満足する。

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^2 - 2(1 + \delta_0^2)\}^2 &= 4\delta_0(1 + \delta_0^2)\sqrt{1 + \delta_0^2 - \varepsilon^2} \text{ 或は } \varepsilon^2 - 2(1 + \delta_0^2) \\ &= \frac{4\delta_0(1 + \delta_0^2)\sqrt{1 + \delta_0^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2 - 2(1 + \delta_0^2)} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\kappa \text{ の定義より } (1 + \delta_0'^2)\varepsilon^2 = 1 + \delta_0'^2 \text{ 或は } 1 + \delta_0'^2 = \frac{1 + \delta_0'^2}{\varepsilon^2} \dots\dots\dots (42)$$

なる関係を得る。(42) を (31) の第一式に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} \vartheta_r^{(s)}(v_3)}{\vartheta_z^{(s)}(v_3)} &= \frac{\sqrt{1 + \delta_0'^2}}{\sqrt{1 + \delta_0'^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} \left\{ (1 + 2\delta_0'^2) - 2\delta_0' \sqrt{1 + \delta_0'^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \delta_0'^2} (2 + 2\delta_0'^2 - \varepsilon^2 - 2\delta_0' \sqrt{1 + \delta_0'^2 - \varepsilon^2})}{\delta_0' \varepsilon^2} \end{aligned}$$

(41) を上式に代入すると

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{1 + \delta_0'^2}}{\varepsilon^2 \delta_0'} \left\{ \frac{4\delta_0(1 + \delta_0^2)\sqrt{1 + \delta_0^2 - \varepsilon^2}}{2 + 2\delta_0^2 - \varepsilon^2} - 2\delta_0 \sqrt{1 + \delta_0^2 - \varepsilon^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \delta_0'^2}}{\varepsilon^2 \delta_0'} 2\delta_0 \sqrt{1 + \delta_0^2 - \varepsilon^2} \left( \frac{2 + 2\delta_0^2 - 2 - 2\delta_0^2 + \varepsilon^2}{2 + 2\delta_0^2 - \varepsilon^2} \right) = 2 \frac{\sqrt{1 + \delta_0'^2} \sqrt{1 + \delta_0^2 - \varepsilon^2}}{2 + 2\delta_0^2 - \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (43)$$

(43) と (22) の第一式を比較すると  $\frac{\vartheta_r^{(s)}(v_3)}{\vartheta_z^{(s)}(v_3)} = \frac{\vartheta_r^{(p)}(v_3)}{\vartheta_z^{(p)}(v_3)}$  なることがわかる。

以上のことは Rayleigh 波の一つの特性である。即ち Rayleigh 波とは浅海に於ける長波の様に一定の速度で進み、又その運動の性質は勵起した原因には無関係である。即ち振波で起しても、壓縮波で起しも、振幅は原因によるが特性は變らないのである。常に道を往く車と逆向きの廻轉をするのである。

$\vartheta^{(p)}(v_3)$  と  $\vartheta^{(s)}(v_3)$  は觀測點へは同時に到着し性質も同じであるから觀測からは全く區別することは全く出来ないものである。

終りに次の點に一言蛇足を加へる。

この原論文では初めに半無限彈性體内の球面の條件に合はず様に發散波を求め、それが表面に當り表面の條件に合ふ様に二次波を求めた。これではその二次波のために初めの球面に於ける條件が満足されなくなるといふ疑問がある。即ち二次波が彈性體内に進入してゆき、球面上で又新しい波を勵起すると考へてそれを求めなければいけないのではないかといふ疑問がある。それに對して次の二つの答へを用意して居る。

1, 物理的に先ず考へればここで考へた球面とは如何なるものであるかといふことである。この問題を地震に應用しようと思ふ場合には震源とは如何なる

ものかといふ根本的問題に關聯して居る。我々の考へたのは週期的の場合であるが衝撃性の場合にはそれを總ての週期に就て積分することに依つて得られるのである。その際球面にて第三次波に對する條件を満足さすといふことは衝撃性の波が球面より出て表面に當り、又内部に進入し、球面ではねかへるといふことになる。所が震源がその波が歸つて來る時刻迄實際に波をはね返す様な構造にあるだらうか。或る場合には歸つてきた波に對しては素通りをさすことがあり得ないだらうか。初めに與へた球面は何時迄も空窩である必要が必ずしもないのである。衝撃性の第二次波を素通りさす様な解を作るには週期的の場合にも球面に於ける第三次波に關する問題は考へる必要がないのである。初めに考へた球面といふのは未知の複雑な物理的現象を起してゐる震源を圍んだ假想的球面であつて、その内部の物理的變化のために或る瞬間にその假想的球面に力が働くと考へるのである。只恐らくは彈性體理論の應用の出來ない震源附近と彈性波の媒體としての彈性體との二つの境界といふだけの意味に球面を考へるのである。故に第三次波を考へることは物理的には必ずしも考へない場合よりより一層正しいとは言ひきれないのである。

2, 若し球面が實際にも空窩の如き第三次波を起す様な場合には數學としては第二次波が球面上で如何なる變位乃至歪力を起すかを計算すればその後はその新しいものを我々の表面上の條件の代りに用ひればよいだけであつて、其操作は數學的には大した困難なことではないのである。その様にして得た新しい波の勢力は震源が特に淺くない限り第一次のものに比して非常に弱いと考へてよいことは明かである。この問題は機會があれば考へて見度いと思つて居る。

原論文は岡田臺長、藤原先生の獎勵と本多博士の激勵、坂井博士の懇篤なる注意と指導と校閲の賜であります。謹んで諸先生に御禮申し上げます。

(昭和 13 年 4 月 30 日)

1. H. Nakano, Jap. Journ. Astronomy and Geophysics, II, No. 5 (1925)
2. T. Sakai, Geophys. Mag. VIII. 1, (1934)
3. H. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. XIII 189 (1881)
4. K. Sezawa, Bull. Earthq. Res. Inst. VI. (1929) 1
5. 小平吉男, 氣象集誌 第 2 輯第 10 卷第 4 號 236 頁
6. H. Lamb, Phil Trans. 203 (1904) 1
7. 坂井卓三, 氣象集誌 第 2 輯第 12 卷第 11 號 553 頁